

数字系统中比例系数和采样周期影响稳定性的研究

祝雪妹

(南京师范大学控制科学与工程系, 南京, 210042)

[摘要] 从理论上详细研究了数字控制系统中控制器放大倍数及采样周期对系统稳定性影响的问题, 其结论对数字控制系统的分析、设计和参数整定具有重要的参考价值.

[关键词] 数字控制系统; 比例系数; 采样周期; 稳定性

[中图分类号] TP271+.82; [文献标识码] A; [文章编号] 1008-1925(2001)03-0008-04

0 引言

随着计算机的发展, 计算机的控制系统发展非常迅速, 出现了各种各样的先进控制技术, 但 PID 控制规律仍然是计算机控制系统中应用十分广泛的控制规律. 因为 PID 控制器的参数整定方便、结构改变灵活、操作人员易于掌握, 对于大多数控制对象都能获得满意的控制效果.

在连续系统中有根轨迹和频率特性等方法研究控制器参数对系统特性的影响. 在数字离散控制系统中, 除了 PID 三个影响参数外, 采样周期 T 对系统的闭环特性同样产生很大的影响. 本人结合在实际工作中的体会, 从理论上进行一些探讨, 对比例数字控制器放大倍数 K 和采样周期 T 对闭环系统的影响进行了研究, 得到的结论直观明了, 对数字控制系统的分析和参数整定具有重要的参考价值.

1 对象特性和控制系统描述

为了讨论方便起见, 假设一个如图 1 所示的简单数字控制系统. 控制器为纯比例规律放大系数为 K , 对象 $G_p(S)$ 为二阶特性

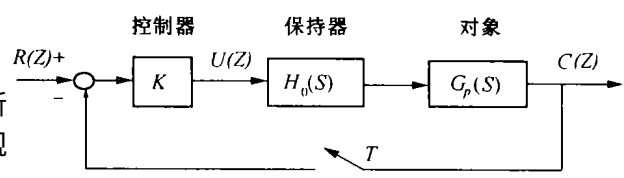


图 1 简单的数字控制系统

1.1 连续时间的闭环特性

设 $G_p(S) = \frac{\omega_0^2}{S^2 + 2\zeta_0\omega_0S + \omega_0^2}$ 则闭环特性为:

$$C(S)/R(S) = \frac{K\omega_0^2}{S^2 + 2\zeta_0\omega_0S + \omega_0^2(1+K)} \tag{1}$$

闭环特征方程为:

$$S^2 + 2\zeta_0\omega_0S + \omega_0^2(1+K) = 0 \tag{2}$$

闭环特征根为:

$$S_{1,2} = -\zeta_0\omega_0 \pm \sqrt{\zeta_0^2 - (1+K)}\omega_0 \tag{3}$$

由上两式可知, 只要 ζ_0, ω_0 大于零, $K > 0$ 时闭环连续系统永远是稳定的, 其闭环阻尼系数为 $\zeta = \frac{\zeta_0}{\sqrt{1+K}}$.

1.2 数字控制系统的闭环特性

由图 1 所示系统的离散特性, 可由脉冲传递函数来表示:

$$G_p(Z) = \frac{C(Z)}{U(Z)} = Z[G_p(S)H_0(S)] = (1-Z^{-1})Z[G_p(S)/S] \quad (4)$$

其中, $H_0(S)$ 为零阶保持器的传递函数.

当 ζ_0 取不同的数值, 开环系统具有不同的特性, $G_p(Z)$ 同样具有不同的表达式形式, 由于篇幅所限, 在此仅讨论 $0 < \zeta_0 < 1$ 时, 也即对象为欠阻尼特性的情况, 则:

$$G_p(Z) = \frac{C(Z)}{U(Z)} = \frac{AZ + B}{Z^2 - 2e^{-\zeta_0\omega_0T}\cos(\omega_0\sqrt{1-\zeta_0^2}T)Z + e^{-2\zeta_0\omega_0T}} \quad (5)$$

其中, T 为采样周期.

$$A = 1 - e^{-\zeta_0\omega_0T}[\cos(\omega_0\sqrt{1-\zeta_0^2}T) + \frac{\zeta_0^2}{\sqrt{1-\zeta_0^2}}\sin(\omega_0\sqrt{1-\zeta_0^2}T)] \quad (6)$$

$$B = e^{-\zeta_0\omega_0T}[e^{-\zeta_0\omega_0T} - \cos(\omega_0\sqrt{1-\zeta_0^2}T) + \frac{\zeta_0^2}{\sqrt{1-\zeta_0^2}}\sin(\omega_0\sqrt{1-\zeta_0^2}T)] \quad (7)$$

由开环脉冲传递函数, 可以求得在纯比例作用下的闭环特性为:

$$G(Z) = \frac{C(Z)}{R(Z)} = \frac{KG_p(Z)}{1 + KG_p(Z)} \quad (8)$$

可得闭环特征方程为: ($0 < \zeta_0 < 1$ 的情况)

$$Z^2 - 2e^{-\zeta_0\omega_0T}\cos(\omega_0\sqrt{1-\zeta_0^2}T)Z + e^{-2\zeta_0\omega_0T} + K[AZ + B] = 0 \quad (9)$$

由(9)式可知, 对于数字离散系统而言, 其闭环特征式与控制器的放大系数 K , 开环阻尼系数 ζ_0 , 频率 ω_0 及采样周期 T 有关, 式(9)为研究系统的特性提供了依据.

为了进一步研究离散系统的闭环特征根与过渡过程的关系, 利用 Z 变换和拉普拉斯变换之间的关系可知 $Z = e^{Ts}$, 对于连续系统而言, 系统稳定的条件是所有闭环特征根在 S 平面的左半平面, 而对于离散系统而言, 所有的闭环特征根在 Z 平面的单位圆内, 也即 $|Z| < 1$. 为了更直观地表达 Z 平面根的位置与过渡过程关系, 假设 Z 平面的闭环特征根用极坐标($R, \pm\theta$)来表示, 则相对应的闭环阻尼系数 ζ ($0 < \zeta_0 < 1$ 的情况)可由下列算式推得:

$$Z = e^{Ts} = e^{(-\zeta_0\omega_0 \pm j\sqrt{1-K-\zeta_0^2}\omega_0)T} \quad (10)$$

$$= e^{-\zeta_0\omega_0T} \cdot e^{\pm j\sqrt{1-K-\zeta_0^2}\omega_0T} \quad (11)$$

因此

$$R = e^{-\zeta_0\omega_0T} \quad (12)$$

$$\theta = \sqrt{1+K-\zeta_0^2}\omega_0T \quad (13)$$

又因

$$\zeta = \frac{\zeta_0}{\sqrt{1+K}} \quad (14)$$

由上面(12)、(13)和(14)式可以推得:

$$\zeta = \frac{-\ln R}{\sqrt{\ln^2 R + \theta^2}} \quad (15)$$

因此, 对数字系统闭环极点的大小($R, \pm \theta$) 已知, 那么相对应的阻尼系数 ζ 即可求得, 系统的闭环的阶跃响应特性可以很容易求得. 因此($R, \pm \theta$) 与 K, T 和 ζ_0, ω_0 有关, 下面将进一步讨论.

2 稳定性分析

2.1 $\zeta_0, \omega_0 T$ 和 K 对稳定性影响

由(9)式可知, 对于离散系统其闭环特性将由 3 个参数确定, 分别为 K, ζ_0 和 $\omega_0 T$ (考虑无因次化), 可以分别求出在不同开环阻尼系数 $\zeta_0, \omega_0 T$ 时的 K 的临界稳定值. 但由(9)式可以看出, 欲计算出某一已知开环阻尼系数 ζ_0 及采样周期 $\omega_0 T$ (无因次化) 下的

临界稳定的 K 值计算非常复杂, 而且很不直观. 在此利用 MATLAB^[1] 语言编程和开环脉冲传递函数 $GH(Z) = KG_p(Z)$ 画出 K 变化的根轨迹, 根轨迹与单位圆相交的 K 值, 即为 K 的临界稳定值. 开环脉冲传递函数为:

$$GH(Z) = \frac{K(AZ + B)}{Z^2 - (2e^{-\zeta_0 \omega_0 T} \cos(\omega_0 \sqrt{1 - \zeta_0^2} T))Z + e^{-2\zeta_0 \omega_0 T}} \quad (16)$$

用 MATLAB 语言编程可以容易地画出当取某一组 ζ_0 和 $\omega_0 T$ 时, K 变化的根轨迹及求出根轨迹与单位圆的交点, 即可求出临界 K 值. 以下给出以 $\zeta_0 = 0.2, \omega_0 T = 0.7$ 时的 K 变化时 Z 平面的根轨迹及与单位圆相交交点的 MATLAB 程序:

```
zita= 0.2          ;  ζ0= 0.2
ω0t= 0.7          ;  ω0T= 0.7
e= exp(- zita0* ω0t)
ωd= ω0t* sqrt(1- zita0* zita0)
c= cos(ωd)
s= sin(ωd)
zita= zita0/sqrt(1- zita0* zita0)
b1= 2* e* c
c1= e* e
a= 1- e* (c+ zita1* s)
b= e* (e- c+ zita1* s)
num= [ a  b]
den= [ 1  - b1  c1]
rlocus(num, den)
hold on
theta= 0: 0.5* pi/ 180: 2* pi
x= sin(theta)
y= cos(theta)
plot(x, y, 'r')
[ r, k] = rlocus(num, den)
[ gain, poles] = rlocfind(num, den)
```

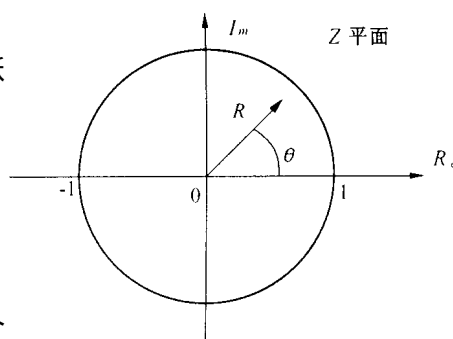


图2 离散闭环极点极坐标表示

运行上述程序即可求出 $\zeta_0 = 0.2$, $\omega_0 T = 0.7$ 时, 系统临界稳定的 K 值为 1.1830, 也可得到如图 3 所示的根轨迹图。

分别取 ζ_0 , $\omega_0 T$ 为不同的数值, 执行上述程序可求得相对应的临界稳定的 K 值, 将这些曲线以取不同的 ξ_0 和 $\omega_0 T$ 作图得图 4, 对于不同的 ζ_0 曲线的右边对应的是不稳定的 K 值。由这些曲线族可以方便地求出在已知 ζ_0 时, $\omega_0 T$ 和临界稳定的 K 值。

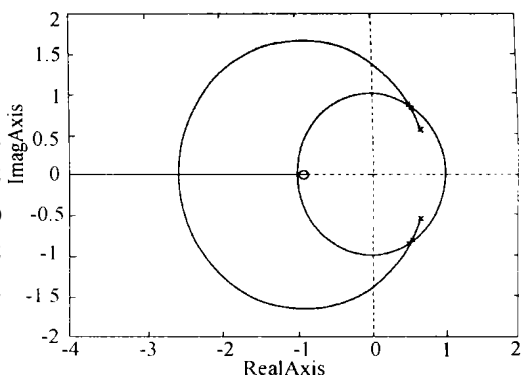


图 3 根轨迹与单位圆交点

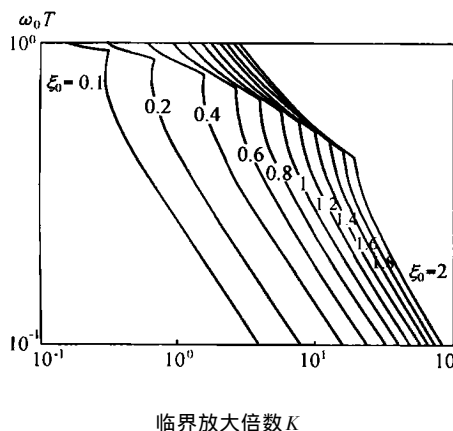


图 4 不同的 ζ_0 , $\omega_0 T$ 时的 K 的临界稳定边界曲线

2.2 应用举例

设对象特性为:

$$G_p(s) = \frac{20}{s^2 + 10s + 20} \quad (17)$$

则可求得 $\omega_0 = 4.47$, $\zeta_0 = 1.12$ 取采样周期为 $T = 0.10$, 由图 4 找 $\zeta_0 = 1.12$, $\omega_0 = 4.47$ 时的临界稳定 K 值为 12.34. 临界稳定边界法是参数整定中常用的方法. 因此, 用此法很容易求得数字离散控制系统中临界稳定的 K 值大小. 利用稳定边界法^[2], 取该系统合适的放大系数为 $K_p = 6.17$, 采样周期 $T = 0.10$, 系统得到满意的阶跃响应曲线. 若放大系数 $K_p = 6.17$ 保持不变, 由图 4 可以看出, 当 T 增加时, 系统将会出现不稳定, 当 $T > 0.3$ 时, 系统将会发散。

3 结论

综上所述, 对于数字系统而言, 系统的特性与控制器参数有关外, 与采样周期 T 有着直接的关系. 本文所介绍的方法及其结论对数字控制系统的分析、运行和参数整定等在实际工程应用中具有重要价值。

[参考文献]

- [1] 黄文梅. 系统分析与仿真——MATLAB 语言及应用[M]. 湖南长沙: 国防科技大学出版社, 1999
- [2] 王锦标. 过程计算机控制[M]. 北京: 清华大学出版社, 1992

The Effect of the Gain and Sampling Interval on the stability in a Digital Control System

Zhu Xuemei

(Department of Control Science and Engineering, Nanjing Normal University, Nanjing, 210042, PRC)

Abstract: This paper discusses the effect of the gain of the controller and the sampling interval on the stability. The result is very important for the design, analysis and controller parameter settings of the system.

Key words: Digital Control System, Gain, Sampling Interval, Stability

[责任编辑: 刘健]