

关于多元向量值正交小波包性质的研究

张新成¹, 谢时新², 陈清江³

(1 开封大学 信息工程学院, 河南 开封, 475004 2 商丘职业技术学院 计算机系, 河南 商丘, 476000

3 西安交通大学 理学院, 陕西 西安, 710049)

[摘要] 引进了向量值多分辨分析与多元向量值正交小波的概念. 给出多元向量值正交小波包的定义. 提出具有数量矩阵伸缩的多元向量值正交小波包的构造方法. 运用代数学理论、算子理论与积分变换讨论了多元向量值正交小波包的性质. 进而构造向量值函数空间 $L^2(\mathbf{R}^d, \mathbf{C}^r)$ 的一组新的正交基.

[关键词] 正交, 多元, 向量值多分辨分析, 向量值尺度函数, 向量值小波包, 加细方程

[中图分类号] O174.2 [文献标识码] A [文章编号] 1672-1292(2006)01-0052-05

On the Orthogonal Multivariate Vector-Valued Wavelet Packets

ZHANG Xincheng¹, XIE Shixin², CHEN Qingjiang³

(1. College of Information Engineering Kaifeng University, Kaifeng 475004, China

2. Department of Computer, Shangqiu Vocational Technology College, Shangqiu 476000, China

3. School of Science, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract In this paper the vector-valued multiresolution analysis and the orthogonal vector-valued wavelet are introduced. The definition of the multivariate vector-valued wavelet packets is given and a procedure for constructing them is presented. The properties for the vector-valued wavelet packets has been investigated by using algebra theory, operator theory and integral transformation. Furthermore, new orthonormal basis of space $L^2(\mathbf{R}^d, \mathbf{C}^r)$ is obtained by using the orthogonal vector-valued wavelet packets.

Key words orthogonal multivariate vector-valued multiresolution analysis, vector-valued scaling functions, vector-valued wavelet packets, refinement equation

0 引言

小波包^[1]由于拥有优良的特性而在科学和工程方面获得广泛的应用^[2~4]. Coifman等^[5]首先引入一元正交小波包的概念. 杨守志等^[6]构造了 $a(2 \leq a \in \mathbf{Z})$ 尺度多重正交小波包, 它在应用上灵活性更强. Shen^[7]将一元正交小波包的概念推广到多元正交小波的情形, 构造了多元不可分正交小波包. 向量值小波是一种广义多小波. Xia等^[8]引入向量值小波的概念, 研究了向量值正交小波的存在性及其构造方法. Fowler等^[9]运用向量值双正交小波变换研究了海洋涡流现象. 然而, 向量值小波与多小波^[10]是有区别的: 表现在对固定时间内, 向量值小波不仅用来在时域上而且在向量的各成分之间去相关; 而多小波的构造仅仅强调信号在时域上不相关. 在多小波和信号表示中, 研究向量值小波是必要而有意义的. 鉴于现实世界中绝大多数信息是多维信息, 因此, 将小波包的概念推广到多元向量值小波的情形是必要的. 本文给出数量矩阵 $aI(2 \leq a \in \mathbf{Z})$ 伸缩的多元向量值正交小波包的定义及其构造方法, 讨论了这种小波包的性质, 得到向量值函数空间 $L^2(\mathbf{R}^d, \mathbf{C}^r)$ 的一个新的基底.

本文中 $\mathbf{C}, \mathbf{R}, \mathbf{Z}$ 分别表示复数集, 实数集和整数集. 令 $\mathbf{Z}_+ = \{n: n \in \mathbf{Z}, n \geq 0\}$, 设常数 $d, r \in \mathbf{Z}_+$, 而且 $d, r \geq 2$. \mathbf{R}^d 表示 d 维实欧几里得空间, \mathbf{C}^r 表示 r 维复欧几里得空间. 记 $\mathbf{Z}^d = \{(z_1, z_2, \dots, z_d): z_v \in \mathbf{Z},$

收稿日期: 2005-09-10

基金项目: 河南省自然科学基金资助项目 (0211044800).

作者简介: 张新成 (1971-), 讲师, 主要从事数据库及软件开发的教学与研究. E-mail: kfxcc@kfu.edu.cn

$v = 1, 2, \dots, d\}$, $\mathbf{Z}_+^d = \{(z_1, z_2, \dots, z_d) : z_v \in \mathbf{Z}_+, v = 1, 2, \dots, d\}$. 对于任意子集 $X, Y \subseteq \mathbf{R}^d$, 记 $aX = \{ax : x \in X\}$, $X + Y = \{x + y : x \in X, y \in Y\}$, $X - Y = \{x - y : x \in X, y \in Y\}$.

根据有限群理论, \mathbf{Z}_+^d 中存在 a^d 个元素 $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{a^d-1}$ 使得 $\mathbf{Z}^d = \bigcup_{\rho \in \Gamma_0} (\rho + a\mathbf{Z}^d)$, $(\rho + a\mathbf{Z}^d) \cap (\rho + a\mathbf{Z}^d) = \emptyset$, 其中 $\Gamma_0 = \{\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{a^d-1}\}$ 表示商群 $\mathbf{Z}^d / a\mathbf{Z}^d$ 的所有不同代表元的集合, 并且约定 $\rho_0 = \underline{0}$ (其中 $\underline{0}$ 为 \mathbf{Z}_+^d 的零元素), ρ_1, ρ_2 为集合 Γ_0 的任意两个不同元素. 记 $\Gamma = \Gamma_0 - \underline{0}$ 命令 Γ, Γ_0 为指标集.

定义向量值函数空间 $L^2(\mathbf{R}^d, \mathbf{C}^r)$ 为所有的复向量值函数 $F(t)$ 的集合, 即

$L^2(\mathbf{R}^d, \mathbf{C}^r) = \{F(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_r(t))^T : f_v(t) \in L^2(\mathbf{R}^d), v = 1, 2, \dots, r\}$, 这里, T 表示向量或矩阵的转置.

对于 $F \in L^2(\mathbf{R}^d, \mathbf{C}^r)$, 定义算子 F 的范数为 $\|F\| = \left[\sum_{v=1}^r \int_{\mathbf{R}^d} |f_v(t)|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}$. 定义向量值函数 $F(t)$ 的积分为 $\int_{\mathbf{R}^d} F(t) dt = \left[\int_{\mathbf{R}^d} f_1(t) dt, \int_{\mathbf{R}^d} f_2(t) dt, \dots, \int_{\mathbf{R}^d} f_r(t) dt \right]^T$. 定义 $F(t)$ 的傅立叶变换为 $F(\omega) = \int_{\mathbf{R}^d} F(t) \exp\{-i\langle t, \omega \rangle\} dt$ 其中 $\langle t, \omega \rangle$ 表示 d 维实向量 t 与 ω 的内积.

对于 $F, G \in L^2(\mathbf{R}^d, \mathbf{C}^r)$, 定义 $F(t)$ 与 $G(t)$ 的内积符号为如下矩阵,

$$[F, G] = \int_{\mathbf{R}^d} F(t) G(t)^* dt \quad (1)$$

* 表示复共轭的转置.

定义 1 称一个向量值函数列 $\{F_k(t)\}_{k \in \mathbf{Z}^d} \subset U \subset L^2(\mathbf{R}^d, \mathbf{C}^r)$ 为子空间 U 的规范正交集, 如果它满足:

$$[F_k, F_n] = \delta_{k,n} I_r, \quad k, n \in \mathbf{Z}^d \quad (2)$$

I_r 表示 $r \times r$ 阶单位矩阵. $\delta_{k,n}$ 是广义 Kronecker 符号, 使得 $\delta_{k,n} = 1 (k = n); \delta_{k,n} \neq 1 (k \neq n)$.

定义 2 称 $F(t) \in L^2(\mathbf{R}^d, \mathbf{C}^r)$ 是正交的向量值函数, 如果它的平移 $\{F(t-k)\}_{k \in \mathbf{Z}^d}$ 是一个规范正交集, 即

$$[F(\cdot - k), F(\cdot - n)] = \delta_{k,n} I_r, \quad k, n \in \mathbf{Z}^d \quad (3)$$

定义 3 称向量值函数列 $\{F_k(t)\}_{k \in \mathbf{Z}^d} \subset U \subset L^2(\mathbf{R}^d, \mathbf{C}^r)$ 为子空间 U 的正交基, 如果它满足 (2) 式, 并且, 对任意 $G(t) \in U$, 存在唯一的 $r \times r$ 常数矩阵序列 $\{Q_k\}_{k \in \mathbf{Z}^d}$, 使得

$$G(t) = \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} Q_k F_k(t) \quad (4)$$

1 多元向量值多分辨分析

多分辨分析方法是构造小波的重要方法之一, 先引入多元向量值多分辨分析的概念.

定义 4 称 $L^2(\mathbf{R}^d, \mathbf{C}^r)$ 的一个闭子空间序列 $\{V_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$ 是一个多元向量值多分辨分析, 如果它满足以下条件,

- (a) $\dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \dots$;
- (b) $\bigcap_{j \in \mathbf{Z}} V_j = \{0\}; \text{clos}_{L^2(\mathbf{R}^d, \mathbf{C}^r)} \left(\bigcup_{j \in \mathbf{Z}} V_j \right) = L^2(\mathbf{R}^d, \mathbf{C}^r)$;
- (c) $F(t) \in V_j \Leftrightarrow F(at) \in V_{j+1}, j \in \mathbf{Z}$;

(d) 存在一个向量值函数 $\mathbf{h}(t) \in V_0$, 使得 $\{\mathbf{h}(t-k)\}_{k \in \mathbf{Z}^d}$ 构成 V_0 的一个 Riesz 基. 由于 $\mathbf{h}(t) \in V_0 \subset V_b$, 则存在一个有限支撑的 $r \times r$ 常数矩阵序列 $\{A_k\}_{k \in \mathbf{Z}^d}$, 使得:

$$\mathbf{h}(t) = \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} A_k \mathbf{h}(at-k) \quad (5)$$

称方程 (5) 为加细方程, 并且称 $\mathbf{h}(t)$ 为向量值尺度函数. 记 $A(\omega) = \left[\frac{1}{a} \right] \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} A_k \cdot e^{-i\langle k, \omega \rangle}$.

则 (5) 的频域形式为:

$$\hat{\mathbf{h}}(\omega) = A(\omega/a) \hat{\mathbf{h}}(\omega/a), \quad \omega \in \mathbf{R}^d \quad (6)$$

设 $W_j (j \in \mathbf{Z})$ 是 V_j 在 V_{j+1} 中的正交补空间, 并且存在 $a^d - 1$ 个向量值函数 $\gamma_\rho(t) \in L^2(\mathbf{R}^d, \mathbf{C}^r)$, $\rho \in \Gamma$ 使得 $\gamma_\rho(t)$ 的平移和伸缩构成 $W_j (j \in \mathbf{Z})$ 的一个 Riesz 基, 则

$$W_j = \text{clos}_{\mathcal{L}^2(\mathbf{R}^d, \mathbf{C}^r)} \langle \Upsilon_\rho(a^j t - k): k \in \mathbf{Z}^d, \rho \in \Gamma \rangle, \quad j \in \mathbf{Z} \quad (7)$$

由于 $\Upsilon_\rho(t) \in W_0 \subset V_1$, $\rho \in \Gamma$, 因此, 存在 $a^d - 1$ 个 $r \times r$ 阶有限支撑的常数矩阵序列 $\{B_k^{(\rho)}\}_{k \in \mathbf{Z}^d}$ 使得

$$\Upsilon_\rho(t) = \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} B_k^{(\rho)} \mathbf{h}(at - k), \quad \rho \in \Gamma \quad (8)$$

在 (8) 式的两边实施 Fourier 变换, 并记 $B^{(\rho)}(\omega) = \left[\frac{1}{a} \right] \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} B_k^{(\rho)} \cdot e^{-i \langle k, \omega \rangle}$, 得:

$$\Upsilon_\rho(\omega) = B^{(\rho)}(\omega/a) \hat{\mathbf{h}}(\omega/a), \quad \omega \in \mathbf{R}^d, \rho \in \Gamma \quad (9)$$

称向量值函数 $\Upsilon_\rho(t) \in L^2(\mathbf{R}^d, \mathbf{C}^r)$, $\rho \in \Gamma$ 是对应于多元向量值正交尺度函数 $\mathbf{h}(t)$ 的多元向量值正交小波, 若 $\{\Upsilon_\rho(t - k): k \in \mathbf{Z}^d, \rho \in \Gamma\}$ 是 W_0 的 Riesz 基, 并且

$$[\mathbf{h}(\cdot), \Upsilon_\rho(\cdot - k)] = 0, \quad k \in \mathbf{Z}^d, \rho \in \Gamma \quad (10)$$

$$[\Upsilon_\rho(\cdot) \Upsilon_\mu(\cdot - k)] = \delta_{\rho\mu} I_r, \quad k \in \mathbf{Z}^d, \rho, \mu \in \Gamma \quad (11)$$

记子空间

$$W_j^{(\rho)} = \text{clos}_{\mathcal{L}^2(\mathbf{R}^d, \mathbf{C}^r)} \langle \Upsilon_\rho(a^j \cdot - k): k \in \mathbf{Z}^d \rangle, \quad \rho \in \Gamma, j \in \mathbf{Z} \quad (12)$$

根据 W_j 的定义以及 (10) - (12), 可得:

定理 1 如果 $\Upsilon_\rho(t) \in L^2(\mathbf{R}^d, \mathbf{C}^r)$, $\rho \in \Gamma$ 是对应于多元向量值正交尺度函数 $\mathbf{h}(t)$ 的多元向量值正交小波, \oplus 表示正交和, 则

$$L^2(\mathbf{R}^d, \mathbf{C}^r) = \bigoplus_{j \in \mathbf{Z}} W_j = \bigoplus_{j \in \mathbf{Z}} \left(\bigoplus_{\rho \in \Gamma} W_j^{(\rho)} \right). \quad (13)$$

2 多元向量值小波包的定义与性质

为了构造向量值小波包, 记 $\Psi_0(t) = \mathbf{h}(t)$, $\Psi_\rho(t) = \Upsilon_\rho(t)$, $P_k^{(0)} = A_k$, $P_k^{(\rho)} = B_k^{(\rho)}$, $\rho \in \Gamma$, $k \in \mathbf{Z}^d$, 则向量值函数 $\mathbf{h}(t)$ 与 $\Upsilon_\rho(t)$ 所满足的加细方程 (5), (8) 合并记为:

$$\Psi_\rho(t) = \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} P_k^{(\rho)} \Psi_0(at - k) \quad (14)$$

对于任意的 $\alpha \in \mathbf{Z}_+^d$ 与给定的向量值正交尺度函数 $\Psi_0(t) = \mathbf{h}(t)$, 令:

$$\Psi_\alpha(t) = \Psi_{a^\sigma + \rho}(t) = \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} P_k^{(\rho)} \Psi_0(at - k), \quad \rho \in \Gamma_0. \quad (15)$$

其中 $\sigma \in \mathbf{Z}_+^d$, 是 $\alpha = a^\sigma + \rho$, $\rho \in \Gamma_0$ 成立的唯一元.

定义 5 称向量值函数集 $\{\Psi_{a^\sigma + \rho}(t), \sigma \in \mathbf{Z}_+^d, \rho \in \Gamma_0\}$ 为关于多元向量值正交尺度函数 $\mathbf{h}(t)$ 的向量值小波包. 其中 $\Psi_{a^\sigma + \rho}(t)$ 由 (15) 式给出.

在 (15) 式的两边实施 Fourier 变换, 得:

$$\Psi_{a^\sigma + \rho}(\omega) = P^{(\rho)}(\omega/a) \Psi_0(\omega/a), \quad \omega \in \mathbf{R}^d, \rho \in \Gamma_0 \quad (16)$$

其中

$$P^{(\rho)}(\omega) = \left[\frac{1}{a} \right] \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} P_k^{(\rho)} \cdot e^{-i \langle k, \omega \rangle}, \quad \rho \in \Gamma_0 \quad (17)$$

则有 $P^{(0)}(\omega) = A(\omega)$, $P^{(\rho)}(\omega) = B^{(\rho)}(\omega)$, $\rho \in \Gamma$.

下面讨论多元向量值小波包的性质.

引理 1 假设 $F(t) \in L^2(\mathbf{R}^d, \mathbf{C}^r)$, 则 $F(t)$ 是向量值正交函数的充要条件为

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}^d} F(\omega + 2k\pi) F(\omega + 2k\pi)^* = I_r \quad (18)$$

证明 若 $F(t)$ 是向量值正交函数, 根据 (3) 式, 得:

$$\delta_{\mathbf{I}_k} I_r = \langle F(\cdot), F(\cdot - k) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbf{R}^d} F(\omega) F(\omega)^* \cdot \exp\{i \langle k, \omega \rangle\} d\omega =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbf{R}^d} \sum_{n \in \mathbf{Z}^d} F(\omega + 2n\pi) F(\omega + 2n\pi)^* \cdot e^{i \langle k, \omega \rangle} d\omega$$

这蕴涵着 (18) 成立. 反之, 命题也成立.

引理 2 若 $\rho, \mu \in \Gamma_0$ 而且 $\Psi_\rho(t) \in L^2(\mathbf{R}^d, \mathbf{C}^r)$ 是对应于多元向量值正交尺度函数 $\mathbf{h}(t)$ 的向量值

正交小波函数, 则有

$$\sum_{u \in \Gamma_0} \mathbf{P}^{(p)} [a^{-1}(\omega + 2u\pi)] \mathbf{P}^{(1)} [a^{-1}(\omega + 2u\pi)]^* = \delta_{\mu} \mathbf{I}_r. \quad (19)$$

证明 由 (10), (11) 知, $\{\Psi_{\rho}(t-k), k \in \mathbf{Z}^d, \rho \in \Gamma_0\}$ 是规范正交集. 由定义 2 与引理 1:

$$\begin{aligned} \delta_{\mu} \mathbf{I}_r &= \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} \Psi_{\rho}(\omega + 2k\pi) \Psi_{\mu}(\omega + 2k\pi)^* = \\ &= \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} \mathbf{P}^{(p)} [a^{-1}(\omega + 2k\pi)] \mathbf{T}_0 [a^{-1}(X + 2kP)] \mathbf{T}_0 [a^{-1}(X + 2kP)]^* \mathbf{P}^{(L)} [a^{-1}(X + 2kP)]^* = \\ &= \sum_{u \in \Gamma_0} \mathbf{P}^{(p)} \left[\frac{X + 2uP}{a} \right] \mathbf{T}_0 \left[\frac{X + 2uP}{a} + 2nP \right] \mathbf{T}_0 \left[\frac{X + 2uP}{a} + 2nP \right]^* \mathbf{P}^{(L)} \left[\frac{X + 2uP}{a} \right]^* = \\ &= \sum_{u \in \Gamma_0} \mathbf{P}^{(p)} [a^{-1}(X + 2uP)] \mathbf{P}^{(L)} [a^{-1}(X + 2uP)]^*. \end{aligned}$$

定理 2 若 $\{\gamma_A(t)\}_{A \in \mathbf{Z}_+^d}$ 是关于多元向量值正交尺度函数 $\mathbf{h}(t)$ 的向量值小波包, 则

$$[\gamma_A(\#), \gamma_A(\# - n)] = \mathbf{D}_{(n)}, \quad n \in \mathbf{Z}^d, \quad A \in \mathbf{Z}_+^d. \quad (20)$$

证明 (归纳法) 当 $A = \mathbf{0}$ 时, $\gamma_{\mathbf{0}}(t) = \mathbf{h}(t)$, 由 (3) 知, (20) 成立. 假设对任意的 $A = (A_1, A_2, \dots, A_d) \in \mathbf{Z}_+^d$, 而且 $|A| = \sum_{m=1}^d A_m < G(GI - \mathbf{Z}_+ - \{0\})$ 时, 命题成立. 下面说明对于 $A \in \mathbf{Z}_+^d$, $|A| = G$ 时, 命题

也成立. 令 $A = aR + Q$ 其中 $R \in \mathbf{Z}_+^d, Q \in \Gamma_0$. 由于 $a \geq 2$ 所以 $|R| < |A|$, 运用归纳假设, 得: $\sum_{k \in \mathbf{Z}^d} \mathbf{T}_R (X + 2kP) \mathbf{T}_R (X + 2kP)^* = \mathbf{I}_r$.

于是, 由引理 1 引理 2 与 (16) 式, 得:

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} \gamma_A(X + 2kP) \gamma_A(X + 2kP)^* &= \\ \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} \mathbf{P}^{(p)} \left[\frac{X + 2kP}{a} \right] \mathbf{T}_R \left[\frac{X + 2kP}{a} \right] \mathbf{T}_R \left[\frac{X + 2kP}{a} \right]^* \mathbf{P}^{(p)} \left[\frac{X + 2kP}{a} \right]^* &= \\ \sum_{u \in \Gamma_0} \mathbf{P}^{(p)} \left[\frac{X + 2uP}{a} \right] \left\{ \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} \mathbf{T}_R \left[\frac{X + 2uP}{a} + 2kP \right] \mathbf{T}_R \left[\frac{X + 2uP}{a} + 2kP \right]^* \right\} \mathbf{P}^{(p)} \left[\frac{X + 2uP}{a} \right]^* &= \\ \sum_{u \in \Gamma_0} \mathbf{P}^{(L)} (a^{-1}(X + 2uP)) \mathbf{P}^{(L)} (a^{-1}(X + 2uP))^* &= \mathbf{I}_r. \end{aligned}$$

所以, 等式 $[\gamma_A(\#), \gamma_A(\# - n)] = \mathbf{D}_{(n)}, \quad n \in \mathbf{Z}^d, \quad A \in \mathbf{Z}_+^d$ 是成立的.

定理 3 若 $\{\gamma_A(t), A \in \mathbf{Z}_+^d\}$ 是关于多元向量值正交尺度函数 $\gamma_{\mathbf{0}}(t)$ 的向量值小波包, 则对任意的 $n \in \mathbf{Z}^d, L, M \in \Gamma_0$ 有 $[\gamma_{aR+L}(\#), \gamma_{aR+M}(\# - n)] = \mathbf{D}_{(M \oplus \mathbf{0}_n)}$.

证明 由于 $\mathbf{R}^d = H_{\mathbf{R} \in \mathbf{Z}^d} ([Q, 2aP]^d + 2akP)$, 记 $N = X/a$ 且, 当 $k \in \mathbf{Z}^d, k, m \in \mathbf{Z}^d$ 时, $([Q, 2aP]^d + 2akP) \cap ([Q, 2aP]^d + 2amP) = \emptyset$. 运用 (16) 式和引理 1, 得:

$$\begin{aligned} [\gamma_{aR+L}(\#), \gamma_{aR+M}(\# - n)] &= \frac{1}{(2P)^d} \int_{\mathbf{R}^d} \gamma_{aR+L}(X) \gamma_{aR+M}(X)^* \exp\{i3n, X\} dX = \\ &= \frac{1}{(2P)^d} \int_{\mathbf{R}^d} \mathbf{P}^{(L)} \left[\frac{X}{a} \right] \mathbf{T}_R \left[\frac{X}{a} \right] \mathbf{T}_R \left[\frac{X}{a} \right]^* \mathbf{P}^{(M)} \left[\frac{X}{a} \right]^* \exp\{i3n, X\} dX = \\ &= \frac{1}{(2P)^d} \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} \int_{[Q, 2aP]^d + 2akP} \mathbf{P}^{(L)}(N) \mathbf{T}_R(N) \mathbf{T}_R(N)^* \mathbf{P}^{(M)}(N)^* \exp\{i3n, X\} dX = \\ &= \frac{1}{(2P)^d} \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} \int_{[Q, 2aP]^d} \mathbf{P}^{(L)}(N) \left[\sum_{k \in \mathbf{Z}^d} \mathbf{T}_R(N + 2kP) \mathbf{T}_R(N + 2kP)^* \right] \mathbf{P}^{(M)}(N)^* \exp\{i3n, X\} dX = \\ &= \frac{1}{(2P)^d} \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} \int_{[Q, 2P]^d} \mathbf{P}^{(L)}(a^{-1}(X + 2uP)) \mathbf{P}^{(M)}(a^{-1}(X + 2uP))^* \exp\{i3n, X\} dX = \\ &= \frac{1}{(2P)^d} \int_{[Q, 2P]^d} \mathbf{D}_{(L, M)} \exp\{i3n, X\} dX = \mathbf{D}_{(M \oplus \mathbf{0}_n)}. \end{aligned}$$

为了讨论向量值函数空间 $L^2(\mathbf{R}^d, \mathbf{C}^r)$ 的正交分解关系, 引入伸缩算子 $DF(t) = F(at)$, 其中 $F(t) \in L^2(\mathbf{R}^d, \mathbf{C}^r)$. 并记 $D\delta = \{DF(t): F(t) \in \delta\}$, 其中子集 $\delta \subset L^2(\mathbf{R}^d, \mathbf{C}^r)$. 对于任意的 $R \in \mathbf{Z}_+^d$, 定义

$$\delta_R = \left\{ F(t): F(t) = \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} \mathbf{M}_k \gamma_R(t-k), \{\mathbf{M}_k\} \in \ell^2(\mathbf{Z}^d, \mathbf{C}^{ar}) \right\} \quad (22)$$

其中 $\tilde{t}^2(\mathbf{Z}^d, \mathbf{C}^{r\otimes}) = \left\{ \|\mathbf{Z}^d\|_Y, \mathbf{C}^{r\otimes}, (\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2)^2 = \sum_{i,j=1}^r \sum_{k,l=1}^d |a_{ijkl}(k)|^2 < +\infty \right\}$,

则 $\delta_0 = V_0$, $\delta Q = W_0^{(Q)}$, 其中 $Q \neq \emptyset$. 假设 $(P^{(Q)}(a^{-1}(X + 2PL)))_{Q \neq \emptyset}$ 是酉矩阵, 则根据酉矩阵理论, 得到如下引理.

引理 3^[11] 对任意的 $R \in \mathbf{Z}_+^d$, 空间 $D\delta R$ 可正交分解为子空间 δ_{aR+Q} 的和. 即

$$D\delta R = \bigoplus_{Q \neq \emptyset} \delta_{aR+Q} \quad (23)$$

对任意的 $j \in \mathbf{Z}_+^d - \{0\}$, 记 $j^\otimes = \{A = (A_1, A_2, \dots, A_d) \in \mathbf{Z}_+^d - \{0\} : a^{j-1} \mid A_i, a^{j_i} - 1, i = 1, 2, \dots, d\}$. 下面是一个本文的主要结果.

定理 4 向量值函数集 $\{7A(\# - k), A \in j^\otimes, k \in \mathbf{Z}^d\}$ 构成 $D^j W_0$ 的一个正交基. 特别地, 向量值函数集 $\{7A(\# - k), A \in \mathbf{Z}_+^d, k \in \mathbf{Z}^d\}$ 构成 $L^2(\mathbf{R}^d, \mathbf{C}^r)$ 的一个正交基.

证明 根据 (23) 式, 得到 $D\delta_0 = \bigoplus_{Q \neq \emptyset} \delta_Q$ 即

$$D\delta_0 = \delta_0 \oplus \bigoplus_{Q \neq \emptyset} \delta_Q \quad (24)$$

因为 $\delta_0 = V_0$, $W_0 = \bigoplus_{Q \neq \emptyset} W_0^{(Q)} = \bigoplus_{Q \neq \emptyset} \delta_Q$ 所以, $D\delta_0 = V_0 \oplus W_0$. 根据 (23) 与 (24) 式, 并用归纳法, 得:

$D^j \delta_0 = D^{j-1} \delta_0 \oplus (A_{j^\otimes} \delta_A), j \in \mathbf{Z}_+^d - \{0\}$ (25)

因为 $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$, 于是 $D^j \delta_0 = D^{j-1} \delta_0 \oplus D^{j-1} W_0$.

从而, 对任意的 $j \in \mathbf{Z}_+^d$, $D^j W_0 = A_{j^\otimes} \delta_A$. 由 (25) 与定理 1 得:

$$L^2(\mathbf{R}^d, \mathbf{C}^r) = V_0 \oplus \bigoplus_{j \neq 0} D^j W_0 = \delta_0 \oplus \bigoplus_{j \neq 0} (A_{j^\otimes} \delta_A) = A_{\mathbf{Z}_+^d} \delta_A \quad (26)$$

根据定理 2 $\{7A(\# - k), A \in j^\otimes, k \in \mathbf{Z}^d\}$ 构成 $D^j W_0$ 的一个正交基. 再根据 (26) 式, 向量值函数集 $\{7A(\# - k), A \in \mathbf{Z}_+^d, k \in \mathbf{Z}^d\}$ 构成 $L^2(\mathbf{R}^d, \mathbf{C}^r)$ 的一个正交基.

[参考文献] (References)

[1] CHUI C K. 小波分析导论 [M]. 程正兴译. 西安: 西安交通大学出版社, 1994.
CHUI C K. An Introduction to Wavelets [M]. CHENG Zhengxing Translation. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 1994. (in Chinese)

[2] TOKIYAT H, ABBASZADEH A K, RAHMAN M M, et al. Rail defect diagnosis using wavelet packet decomposition [J]. IEEE Trans Industry Appl. 2003, 39(5): 1454-1461.

[3] MARTIN M B, BELL A E. New image compression technique using multiwavelet packets [J]. IEEE Trans Image Processing, 2001, 10(4): 500-511.

[4] DENG H, LING H. Fast solution of electromagnetic integral equations using adaptive wavelet packet transform [J]. IEEE Trans on Antennas and Propagation, 1999, 47(4): 674-682.

[5] COIFMAN R R, MEYER Y, WICKERHAUSER M V. Wavelet analysis and signal processing [C] // Beylkin G Wavelets and Their Applications. Boston: Jones and Barlett MA, 1992. 153-178.

[6] 杨守志, 程正兴. a 尺度多重正交小波包 [J]. 应用数学, 2000, 13(1): 61-65.
YANG Shouzhì, CHENG Zhengxing. Orthogonal multiwavelet packets with scale a [J]. Mathematica Applicata, 2000, 13(1): 61-65. (in Chinese)

[7] SHEN Z. Non tensor product wavelet packets in $L^2(\mathbf{R}^d)$ [J]. SIAM Math Anal. 1995, 26(4): 1061-1074.

[8] XIA X G, SUTER B W. Vector-valued wavelets and vector filter banks [J]. IEEE Trans Signal Processing, 1996, 44(3): 508-518.

[9] FOWLER J E, HUA L. Wavelet transforms for vector fields using omnidirectionally balanced multiwavelets [J]. IEEE Trans Signal Processing, 2002, 50(12): 3018-3027.

[10] TURCAJOVA R. An algorithm for the construction of symmetry orthogonal multiwavelets [J]. SIAM Matrix Anal Appl. 2003, 25(2): 532-550.

[11] 杨建伟, 程正兴, 杨守志. 任意矩阵伸缩的正交小波包 [J]. 高等学校计算数学学报, 2003, 25(1): 91-96.
YANG Jianwei, CHENG Zhengxing, YANG Shouzhì. Orthogonal wavelet packets of arbitrary integer-valued dilation matrix [J]. Journal of Higher School Computing Mathematics, 2003, 25(1): 91-96.