

# 两自由度碰撞振动系统的动力学分析

魏艳辉<sup>1</sup>, 李群宏<sup>1</sup>, 徐洁琼<sup>1</sup>, 陆启韶<sup>2</sup>

(1. 广西大学 数学与信息科学学院, 广西南宁 530004 2. 北京航空航天大学 理学院, 北京 100083)

**[摘要]** 基于 Poincaré 映射的方法, 通过解析的方法导出了一类具有阻尼的两自由度碰撞振动系统的单碰周期  $n$  次谐运动存在性判据, 经过数值模拟验证了理论分析的正确性, 并给出了分析其稳定性的判别公式, 通过数值模拟, 讨论系统的局部分岔与全局分岔, 同时比较了系统参数变化对其周期运动的影响, 发现在强阻尼、弱激励、小质量比、较大恢复系数下系统将会出现较多的有规律的周期碰撞。

**[关键词]** 碰撞振动, 周期运动, Poincaré 映射, 稳定性, 全局分岔

**[中图分类号]** O175 O322 **[文献标识码]** A **[文章编号]** 1672-1292(2007)01-0085-08

## Dynamic Analysis of Two-Degree-of-Freedom Vibro-Impact Systems

Wei Yanhui<sup>1</sup>, Li Qunhong<sup>1</sup>, Xu Jieqiong<sup>1</sup>, Lu Qishao<sup>2</sup>

(1. College of Mathematics and Information Science, Guangxi University Nanning 530004, China)

(2. School of Science, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

**Abstract** The vibro-impact systems are familiar with the non-smooth dynamic systems. The dynamics research of the vibro-impact systems not only is significant in theory but also has practical values in engineering. Firstly, using the Poincaré map method, we get an existent criterion of single impact period- $n$  motion in a two-degree-of-freedom vibro-impact system with damper. It is shown that our conclusions are valid through the numerical simulations. Moreover, the satiability of periodic motions is studied and the corresponding Jacobian matrix formula is derived. Finally we debate the effect of system parameters on periodic motions, exhibiting the numerical simulations method, the local bifurcation and global bifurcation, and the influence of the change of parameters in the system on its periodic motion, and find that the vibro-impact systems appear more disciplinary periodic impact under strong damping, feeble harmonic excitation, small ratio of quality and quite big coefficient of restitution.

**Key words** vibro-impact, periodic motion, Poincaré map, stability, global bifurcation

## 0 引言

碰撞振动问题产生于机械、车辆和核反应堆等多个工程领域。在机械系统优化、高速列车的动力学分析、核反应堆的可靠性设计及噪声控制等方面, 碰撞振动问题的研究具有重要的意义。许多学者对碰撞振动这种复杂的动力学行为进行了广泛的研究。早期的研究主要针对单自由度碰撞振动系统。Shaw 等<sup>[1]</sup> 对弹跳小球问题的一个简化数学模型, 证明系统周期运动存在倍化序列, 并且当振动台的振幅达到一定值时, 存在 Smale 马蹄。Nordmark<sup>[2]</sup> 采用局部映射的方法研究了冲击振子的擦边现象, 发现它是振子由周期运动直接进入混沌运动的主要原因。Whiston<sup>[3]</sup> 在研究简谐激励下无阻尼线性冲击振子时, 首先应用奇异性理论研究了擦边映射的 Poincaré 映射不可微性。Chin<sup>[4]</sup> 等人对 Poincaré-Nordmark 映射做单参数开折后详细研究了它的性质, 发现该映射具有十分丰富的动力学行为, 如存在擦边分岔、反向周期递增分岔、多周期解共存的现象, 并给出了最大周期轨道碰撞运动的一般分析方法。

收稿日期: 2006-07-06

基金项目: 国家自然科学基金(10461001)、广西自然科学基金(0640002)和广西研究生教育创新计划(2006105930701M16)资助项目。

作者简介: 魏艳辉(1980-), 女, 硕士研究生, 主要从事非线性动力学方向的学习与研究。E-mail: wyh801126@sina.com

通讯联系人: 李群宏(1964-), 教授, 博士, 主要从事微分动力系统分岔理论的教学与研究。E-mail: lqunhse@sina.com

在多自由度碰撞系统的研究方面, Fredriksson 和 Nordmark<sup>[5]</sup>引入不连续拉回映射, 建立起了多自由度冲击振子的 Poincaré 映射极其规范形的计算, 为研究高维不光滑系统提供了重要的理论工具. Meijaard<sup>[6]</sup>把经典的 Hopf 分岔理论拓展到碰撞系统. 谢建华等<sup>[7,8]</sup>对一类两自由度碰撞系统, 采用中心流形和规范形定理的方法, 研究余维二分岔和  $T^2$  环面分岔. 金栋平等<sup>[9]</sup>研究了由两个振子对碰构成的碰撞系统, 用间断分析方法研究了系统参数对周期碰撞的影响. 李群宏等<sup>[10]</sup>运用解析的方法研究了一类无阻尼的双自由度碰撞系统, 给出了次谐周期运动的存在性、稳定性和共存性的结果.

本文研究了一类具有阻尼的两自由度碰撞振动系统, 运用解析的方法研究了次谐周期运动的存在性与稳定性, 通过数值模拟的方法, 进一步研究了系统参数对周期运动的影响.

## 1 碰撞振动系统的力学模型及其运动方程

由两质量分别为  $M_1, M_2$  的质块构成的两自由度碰撞振动系统如图 1 所示. 线性弹簧刚度为  $K_i$ . 线性粘性阻尼系数为  $C_i$ . 记时间为  $t$ . 两质块分别受到简谐激励力  $f_i(t) = f_i \cos(\omega t + \varphi)$ , ( $i = 1, 2$ ) 的作用. 设质块  $M_1, M_2$  的平衡位置相距  $\Delta$ . 分别取它们的平衡位置为原点建立坐标, 位移用  $y_1$  和  $y_2$  表示. 设在时刻  $t$  时, 两质块的位移分别为  $y_1(t)$  和  $y_2(t)$ , 显然有  $y_1(t) - y_2(t) \leq \Delta$  且当等号成立时碰撞发生.

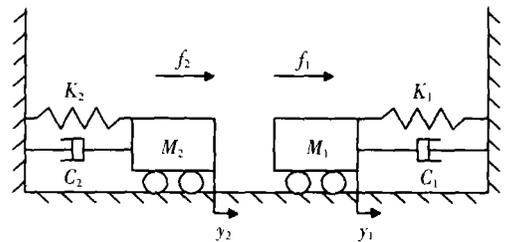


图 1 两自由度碰撞系统

Fig.1 Schematic of the two-degree-of-freedom impact oscillator

系统在自由运动阶段的方程为:

$$\begin{cases} M_1 \ddot{y}_1 + C_1 \dot{y}_1 + K_1 y_1 = f_1 \cos(\omega t + \varphi) \\ M_2 \ddot{y}_2 + C_2 \dot{y}_2 + K_2 y_2 = f_2 \cos(\omega t + \varphi) \end{cases} \quad (1)$$

引入无量纲量  $x_i = K_1 \frac{y_i}{f_1}$ ,  $m = \frac{M_1}{M_2}$ ,  $\omega_1 = \omega \sqrt{\frac{M_1}{K_1}}$ ,  $\omega_2 = \omega \sqrt{\frac{M_1}{K_2}}$ ,  $t = t \sqrt{\frac{K_1}{M_1}}$ ,  $\xi_i = \frac{C_i}{2} \sqrt{\frac{K_1}{M_1}}$ , ( $i = 1, 2$ ),  $\delta = K_1 \frac{\Delta}{f_1}$ ,  $f = m \frac{f_2}{f_1}$ . 无碰撞时该系统的无量纲运动方程为:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 + 2\xi_1 x_1 + x_1 = \cos(\omega_1 t + \varphi) \\ \dot{x}_2 + 2\xi_2 \omega_2 x_2 + \omega_2^2 x_2 = f \cos(\omega_1 t + \varphi) \end{cases} \quad (2)$$

方程 (2) 的解为

$$\begin{cases} x_1(t) = N(A_1 S_s + B_1 C_s) + D_1 S_w + G_1 C_w \\ x_2(t) = M(A_2 S_t + B_2 C_t) + D_2 S_w + G_2 C_w \end{cases} \quad (3)$$

其中  $A_1, A_2, B_1, B_2$  是由初始条件决定的积分常数, 且  $N = e^{-\xi_1(t-t_0)}$ ,  $S_s = \sin \sqrt{1-\xi_1^2}(t-t_0)$ ,

$$C_s = \cos \sqrt{1-\xi_1^2}(t-t_0), D_1 = \frac{2\xi_1 \omega_1 \cos \varphi - (1-\omega_1^2) \sin \varphi}{(2\xi_1 \omega_1)^2 + (1-\omega_1^2)^2}, S_w = \sin \omega_1 t$$

$$G_1 = \frac{2\xi_1 \omega_1 \sin \varphi + (1-\omega_1^2) \cos \varphi}{(2\xi_1 \omega_1)^2 + (1-\omega_1^2)^2}, C_w = \cos \omega_1 t, M = e^{-\xi_2 \omega_2(t-t_0)}, D_2 = \frac{2\xi_2 \omega_1 \omega_2 \cos \varphi - (\omega_2^2 - \omega_1^2) \sin \varphi}{(2\xi_2 \omega_1 \omega_2)^2 + (\omega_2^2 - \omega_1^2)^2} f,$$

$$G_2 = \frac{2\xi_2 \omega_1 \omega_2 \sin \varphi + (\omega_2^2 - \omega_1^2) \cos \varphi}{(2\xi_2 \omega_1 \omega_2)^2 + (\omega_2^2 - \omega_1^2)^2} f, S_t = \sin \sqrt{1-\xi_2^2} \omega_2(t-t_0), C_t = \cos \sqrt{1-\xi_2^2} \omega_2(t-t_0).$$

## 2 碰撞周期运动的研究

若两质块在  $t_0$  时刻发生碰撞, 且相邻两次碰撞间经历了  $n$  个激励力周期, 即间隔时间为  $\frac{2n\pi}{\omega_1}$ , 称为单碰撞周期  $n$  运动. 记碰撞恢复系数为  $r$ , 根据碰撞定理和碰撞过程动量守恒定律, 得到碰撞条件为:

$$x_1(t_0) - x_2(t_0) = \delta \quad (4)$$

$$x_2(t_{0+}) - x_1(t_{0+}) = r[x_1(t_{0-}) - x_2(t_{0-})], \quad (5)$$

$$m\dot{x}_1(t_{0+}) + \dot{x}_2(t_{0+}) = m\dot{x}_1(t_{0-}) + \dot{x}_2(t_{0-}), \quad (6)$$

-, + 分别表示碰撞前后的瞬时, 碰撞前后的瞬时速度关系可由方程(5) 和(6) 解出

$$\dot{x}_1(t_{0+}) = a\dot{x}_1(t_{0-}) + b\dot{x}_2(t_{0-}), \quad (7)$$

$$\dot{x}_2(t_{0+}) = c\dot{x}_1(t_{0-}) + d\dot{x}_2(t_{0-}), \quad (8)$$

$$\text{式中, } a = \frac{m-r}{m+1}, b = \frac{r+1}{m+1}, c = \frac{m(r+1)}{m+1}, d = \frac{1-mr}{m+1}.$$

周期性条件为:

$$x_i(t_{0-}) = x_i\left(t_{0-} + \frac{2n\pi}{\omega_1}\right) \quad (i = 1, 2). \quad (9)$$

$$\dot{x}_i(t_{0-}) = \dot{x}_i\left(t_{0-} + \frac{2n\pi}{\omega_1}\right)$$

## 2.1 碰撞周期运动存在性

下面用解析方法讨论碰撞系统(2) 存在单碰周期  $n$  运动的条件. 碰撞系统(2) 的相空间为  $R^4 \times R^1$ . 记  $V_1 = \dot{x}_1, V_2 = \dot{x}_2$ , 并定义

$$\Sigma = \{(x_1, V_1, x_2, V_2, t) \in R^4 \times S \mid x_1 - x_2 = \delta\}, \quad (10)$$

式中,  $S = \{t \pmod{2n\pi} \mid t \in R^+\}$ , 取  $\Sigma$  为 Poincaré 映射, 则单碰周期  $n$  运动转化为 Poincaré 映射的不动点.

下面来构造 Poincaré 映射  $P$ , 此过程分为两个阶段. 首先考虑发生碰撞的阶段, 用映射  $P_1$  来定义, 碰撞前后的点分别用  $(x_{10-}, V_{10-}, V_{20-}, t_{0-})$  和  $(x_{10+}, V_{10+}, V_{20+}, t_{0+})$  表示, 则:

$$P_1: (x_{10-}, V_{10-}, V_{20-}, t_{0-}) (\in \Sigma) \mapsto (x_{10+}, V_{10+}, V_{20+}, t_{0+}), \quad (11)$$

由于是瞬时碰撞, 故有  $t_{0+} = t_{0-} = t_0, x_{10+} = x_{10-} = x_{10}$ . 其次考虑碰撞后瞬时到下一次碰撞前瞬时的阶段, 用映射  $P_2$  来定义, 下一次碰撞前瞬时的点用  $(x_{11-}, V_{11-}, V_{21-}, t_{1-})$  表示, 有

$$P_2: (x_{10+}, V_{10+}, V_{20+}, t_{0+}) \mapsto (x_{11-}, V_{11-}, V_{21-}, t_{1-}) (\in \Sigma), \quad (12)$$

于是从碰撞面  $\Sigma$  出发, 经过一次碰撞再回到碰撞面  $\Sigma$  的 Poincaré 映射  $P$  可以写成

$$P = P_2 \circ P_1: (x_{10-}, V_{10-}, V_{20-}, t_{0-}) (\in \Sigma) \mapsto (x_{11-}, V_{11-}, V_{21-}, t_{1-}) (\in \Sigma). \quad (13)$$

因此, 只要当  $t_1 - t_0 = 0 \pmod{\frac{2n\pi}{\omega_1}}$  时,  $(x_{11-}, V_{11-}, V_{21-}) = (x_{10-}, V_{10-}, V_{20-})$  成立, 就有单碰周期  $n$  运动存在.

下面推导单碰周期  $n$  运动存在的条件, 令  $V_1, V_2$  表示两质块在碰撞前的速度, 即  $V_1 = \dot{x}_1(t_{0-}), V_2 = \dot{x}_2(t_{0-})$ , 根据碰撞条件有

$$x_{10} = B_1 + D_1 S_0 + G_1 C_0, \quad (14)$$

$$aV_1 + bV_2 = -B_1 \xi_1 + A_1 \xi_1 + D_1 \omega_1 C_0 - G_1 \omega_1 S_0, \quad (15)$$

$$x_{20} = B_2 + D_2 S_0 + G_2 C_0, \quad (16)$$

$$cV_1 + dV_2 = -B_2 \xi_2 \omega_2 + A_2 \xi_2 \omega_2 + D_2 \omega_1 C_0 - G_2 \omega_1 S_0, \quad (17)$$

其中,  $S_0 = \sin(\omega_1 t_0), C_0 = \cos(\omega_1 t_0), \xi_i = \sqrt{1 - \xi_i^2}, \xi_s = \sqrt{1 - \xi_s^2}$ .

另由周期性条件, 当  $t_1 = t_0 + \frac{2n\pi}{\omega_1}$  时, 有  $x_1(t_{1-}) = x_{10}, \dot{x}_1(t_{1-}) = V_1, x_2(t_{1-}) = x_{20}, \dot{x}_2(t_{1-}) = V_2$ , 可得:

$$x_{10} = N_1^{-1}(A_1 S_n + B_1 C_n) + D_1 S_0, \quad (18)$$

$$V_1 = -N_1^{-1} \xi_1 (A_1 S_n + B_1 C_n) + N_1^{-1} \xi_1 (A_1 C_n - B_1 S_n) + (C_0 D_1 - G_1 S_0) \omega_1, \quad (19)$$

$$x_{20} = x_{10} - \delta = M_1^{-1}(A_2 S_{2n} + B_2 C_{2n}) + D_2 S_0 + G_2 C_0, \quad (20)$$

$$V_2 = -M_1^{-1} \xi_2 \omega_2 (A_2 S_{2n} + B_2 C_{2n}) + M_1^{-1} \xi_2 \omega_2 (A_2 C_{2n} - B_2 S_{2n}) + (C_0 D_2 - G_2 S_0) \omega_1, \quad (21)$$

其中,  $S_{2n} = \sin\left(\frac{2n\pi\omega_2\sqrt{1-\xi_2^2}}{\omega_1}\right), C_{2n} = \cos\left(\frac{2n\pi\omega_2\sqrt{1-\xi_2^2}}{\omega_1}\right), M_1 = e^{\frac{2n\pi\xi_2\omega_2}{\omega_1}}, N_1 = e^{\frac{2n\pi\xi_1}{\omega_1}}$ ,

$$S_n = \sin\left[\frac{2n\pi \sqrt{1-\xi_1^2}}{\omega_1}\right], C_n = \cos\left[\frac{2n\pi \sqrt{1-\xi_1^2}}{\omega_1}\right].$$

若满足条件  $S_n \neq 0, C_n \neq 0$  从式 (14) ~ (21) 可得到一个关于  $x_{10}$  的一元二次方程

$$n_2 x_{10}^2 + n_1 x_{10} + n_0 = 0 \tag{22}$$

系数  $n_2, n_1, n_0$  的表达式过长, 此处从略. 由上述分析可得到以下结论:

**命题** 碰振系统 (2) 参数满足二次方程 (22) 有实数解, 且  $x_2(t, t_0, x_{10}, V_1, V_2) - x_1(t, t_0, x_{10}, V_1, V_2) > \delta$  成立,  $\forall t \in (t_0, t_0 + \frac{2n\pi}{\omega_1})$ , 则该碰振系统存在单碰周期  $n$  运动.

### 2.2 数值模拟结果

根据前面所述的命题, 选取一定范围的参数值进行数值模拟. 当取  $\xi_1 = 0.0001, \xi_2 = 0.5, \varphi = 0.1, \omega_2 = 1, \delta = 0.15, r = 0.8, m = 0.5, \omega_1 = 2.01, f = 4$  时, 碰振系统 (2) 存在单碰周期一运动如图 2 所示. 图 2(a) 分别为振子  $x_1$  和  $x_2$  的时间历程图 (虚线表示振子  $x_1$ , 实线表示振子  $x_2$ ), 图 2(b) 分别为振子  $x_1$  和  $x_2$  的相图.

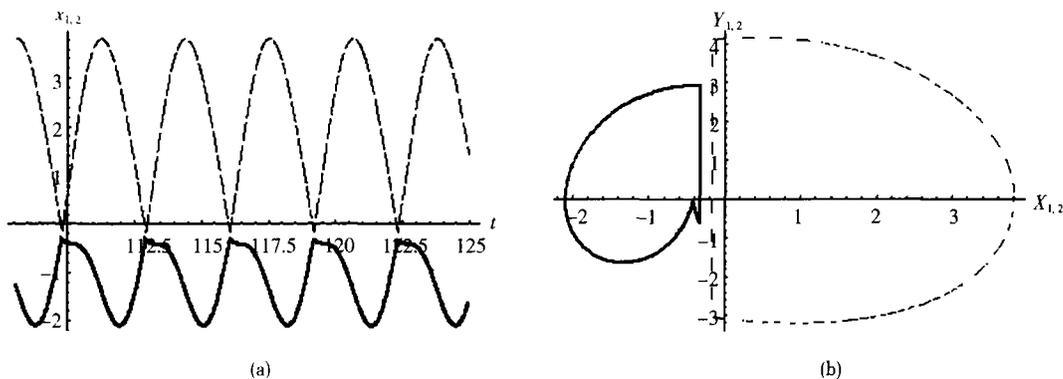


图 2 单碰周期一运动

Fig.2 Single impact period-1 motions

当取参数  $\xi_1 = 0.0001, \xi_2 = 0.5, \varphi = 0.1, \omega_2 = 1, \delta = 0.15, r = 0.8, m = 0.5, w_1 = 4.1, f = 10$  时, 碰振系统 (2) 存在单碰周期二运动, 如图 3 所示.

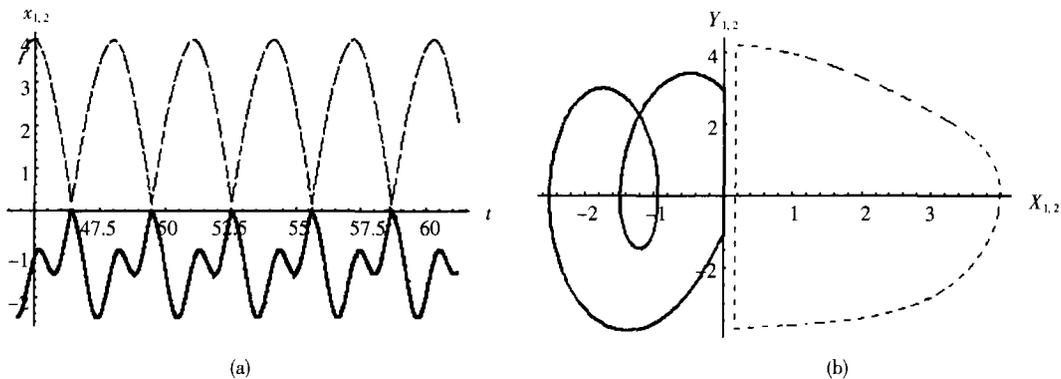


图 3 单碰周期二运动

Fig.3 Single impact period-2 motions

当参数不满足命题的条件时, 碰振系统 (3) 存在其他丰富的运动形式. 取参数  $\xi_1 = 0, \xi_2 = 0, \varphi = 0, \omega_2 = 1.1, \delta = 0.15, r = 0.8, m = 0.5, \omega_1 = 2.1, f = 4$  时, 碰振系统 (2) 存在双碰周期二运动, 如图 4 所示.

### 3 碰撞周期运动的稳定性研究

现在来研究周期解的稳定性问题. 取 Poincaré 截面为  $\Sigma$ , 及 Poincaré 映射为  $P$ , 于是系统 (2) 的周期解的稳定性转化为 Poincaré 映射 (13) 的不动点稳定性问题. 设  $(x_{10}, V_{10}, V_{20}, t_0) \in \Sigma$  是映射  $P$  的不动点,

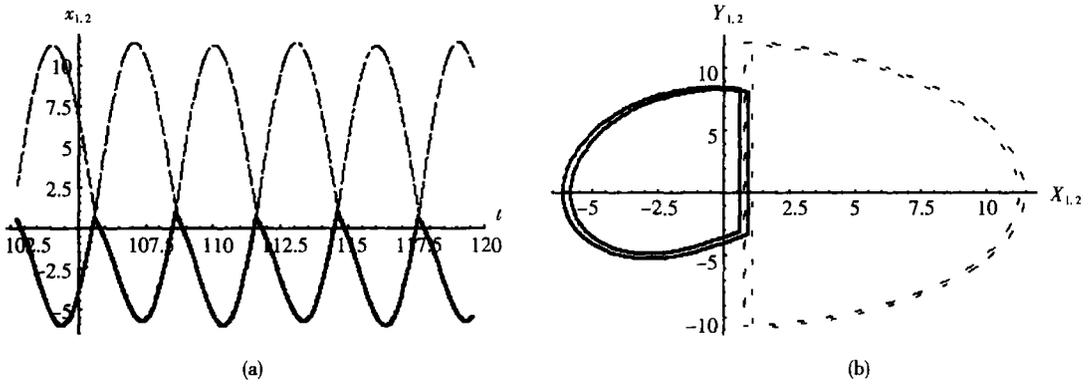


图 4 双碰周期二运动

Fig.4 Double impacts period-2 motions

为了讨论其稳定性, 需要计算 Poincaré 映射在该点处的 Jacobi 矩阵:

$$DP(x_{10}, V_{10}, V_{20}, t_0) = \left[ \frac{\partial P_i}{\partial X_j} \right]_{(x_{10}, V_{10}, V_{20}, t_0)} \quad (i, j = 1, 2, 3, 4), \quad (23)$$

式中,  $P_i(X_1, X_2, X_3, X_4)$  是  $P(X_1, X_2, X_3, X_4)$  的第  $i$  个分量, 而  $(X_1, X_2, X_3, X_4)$  代表变量  $(x_1, V_1, V_2, t)$

因为映射  $P$  可分解为:  $P = P_2 \circ P_1$ , 其中  $P_1$  由碰撞条件给出, 即

$$P_1: (x_{10}, V_{10}, V_{20}, t_0) \mapsto (x_{10}, V_{10+}, V_{20+}, t_0), \quad (24)$$

其中,  $V_{10+} = aV_{10} + bV_{20}$ ,  $V_{20+} = cV_{10} + dV_{20}$ , 有

$$DP_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (25)$$

而映射  $P_2$  由方程(2) 的解确定, 且由隐函数定理可得:

$$DP_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, \quad (26)$$

该矩阵中各元素的具体表达式此处从略.

于是

$$DP = DP_2 \circ DP_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & aa_{12} + ca_{13} & ba_{12} + da_{13} & a_{14} \\ a_{21} & aa_{22} + ca_{23} & ba_{22} + da_{23} & a_{24} \\ 0 & ca_{33} & da_{33} & a_{34} \\ 0 & ca_{43} & da_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, \quad (27)$$

由此可得特征方程为:

$$\lambda^4 + \beta_1 \lambda^3 + \beta_2 \lambda^2 + \beta_3 \lambda + \beta_4 = 0, \quad (28)$$

其中

$$\beta_1 = -a_{11} - aa_{22} - ca_{23} - da_{33} - a_{44},$$

$$\beta_2 = -aa_{12}a_{21} - ca_{13}a_{21} + aa_{11}a_{22} + ca_{11}a_{23} + da_{11}a_{33} + (-bc + ad)a_{22}a_{33} - ca_{24}a_{43} - da_{34}a_{43} + a_{11}a_{44} + aa_{22}a_{44} + ca_{23}a_{44} + da_{33}a_{44},$$

$$\beta_3 = (-bc + ad)a_{22}a_{34}a_{43} + ca_{13}a_{21}a_{44} + (bc - ad)a_{22}a_{33}a_{44} + a_{12}a_{21} [(-bc + ad)a_{33} + aa_{44}] - ca_{14}a_{21}a_{43} + a_{11} [ca_{24}a_{43} + da_{34}a_{43} - ca_{23}a_{44} - da_{33}a_{44} + a_{22}((bc - ad)a_{33} - aa_{44})],$$

$$\beta_4 = -(bc - ad)(a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})(a_{34}a_{43} - a_{33}a_{44}),$$

由方程(28) 得到:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{\sqrt{\Omega}}{2} - \frac{\beta_1}{4} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\Delta + \frac{-\beta_1^3 + 4\beta_1\beta_2 - 8\beta_3}{4\sqrt{\Omega}}} \\ \lambda_{3,4} &= -\frac{\sqrt{\Omega}}{2} - \frac{\beta_1}{4} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\Delta - \frac{-\beta_1^3 + 4\beta_1\beta_2 - 8\beta_3}{4\sqrt{\Omega}}} \end{aligned} \right\}, \quad (29)$$

其中,

$$\begin{aligned} \Phi &= 2\beta_2^3 - 9\beta_1\beta_2\beta_3 + 27\beta_3^2 + 27\beta_1^2\beta_4 - 72\beta_2\beta_4, \\ \Gamma &= -4(\beta_2^2 - 3\beta_1\beta_3 + 12\beta_4)^3 + \Phi^2, \\ \Omega &= \frac{(\sqrt{\Gamma} + \Phi)^{\frac{1}{3}}}{3 \cdot 2^{\frac{1}{3}}} + \frac{\beta_1^2}{4} - \frac{2\beta_2}{3} + \frac{2^{\frac{1}{3}}(\beta_2^2 - 3\beta_1\beta_2 + 12\beta_4)}{3(\sqrt{\Gamma} + \Phi)^{\frac{1}{3}}}, \\ \Delta &= -\frac{(\sqrt{\Gamma} + \Phi)^{\frac{1}{3}}}{3 \cdot 2^{\frac{1}{3}}} + \frac{\beta_1^2}{2} - \frac{4\beta_2}{3} - \frac{2^{\frac{1}{3}}(\beta_2^2 - 3\beta_1\beta_2 + 12\beta_4)}{3(\sqrt{\Gamma} + \Phi)^{\frac{1}{3}}}. \end{aligned}$$

根据上述特征值  $\lambda_i (i = 1, 2, 3, 4)$ , 能够判别系统 (2) 的周期解的稳定性: 即当  $|\lambda_i| < 1$  时, 周期解为渐近稳定的; 若有一个  $|\lambda_i| > 1$  则周期解是不稳定的. 此外, 还可以讨论周期解的分岔情况: 当 Poincaré 映射在不动点处有一个特征值为 +1 而其它特征值严格位于单位圆内时, 将发生鞍结分岔; 当某个特征值变为 -1, 而其它特征值严格位于单位圆内时, 将会出现倍周期分岔; 若有一对共轭复特征值且其模为 1 而其它特征值严格位于单位圆内时, 则将发生 Hopf 分岔; 当同时存在一对模为 1 共轭复特征值以及一个等于 -1 的特征值时, 另外一个特征值严格位于单位圆内, 将会发生 Hopf-flip 分岔.

### 4 系统局部分岔与全局分岔分析

取参数  $\xi_1 = 0.1, \xi_2 = 0.1, \varphi = 0, \omega_2 = 10, \delta = 0, r = 0.8, m = 0.05, f = 4$ ,  $\omega_1$  的取值从 2.58 到 3 进行数值模拟得到碰振系统 (2) 的局部分岔图如图 5(a) 所示, 图 (b)、(c)、(d) 分别为  $\omega_1 = 2.6519, 2.6520, 2.8$  时 Poincaré 截面上的投影图. 当  $\omega_1 = 2.6519$  时, 系统 (2) 存在单碰周期一运动, 此时系统 (2) 发生倍周期分岔.  $\omega_1 = 2.6797$  时, 碰振系统 (2) 存在双碰周期二运动,  $\omega_1 = 2.8$  时, 系统处于混沌状态.

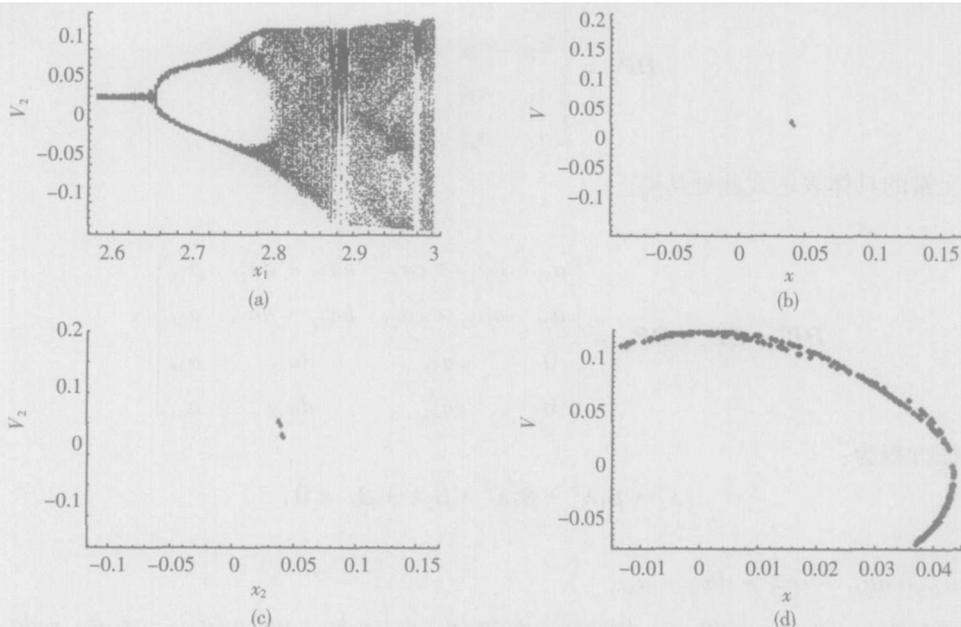


图 5 倍周期分岔图

Fig.5 Period doubling bifurcation

碰振系统 (2) 的力学模型中含有 7 个系统参数:  $\xi_1, \xi_2, \delta, r, m, f, \omega_1$ . 随着激振频率  $\omega_1$  的变化, 系统将会呈现出不同的运动. 取系统参数  $\xi_1 = 0.1, \xi_2 = 0.1, \delta = 0, r = 0.8, m = 0.5, f = 4$  作为基准参数,  $\omega_1$  为分岔参数, 通过数值计算, 分析系统各参数对其周期运动的影响. 图 6 是在基准参数下碰振系统 (2) 随激

振频率  $\omega_1$  变化的全局分岔图. 在图 7 中, 仅给出了改变的参数量, 其余未标注的参数与系统的基准参数相同. 通过计算表明: 当增大外激励力  $f$  时, 振子  $x_1$  碰撞前瞬时速度减小, 如图 7(a) 和 (b) 所示; 当增大系统的阻尼时, 系统碰撞前瞬时速度增加. 当减小系统的阻尼时, 系统处于混沌状态, 如图 7(c) 和 (d) 所示; 当增大质量比  $m$  时, 系统会出现更多的不稳定运动, 且碰撞前瞬时速度增大, 当减小质量比时, 振子  $x_1$  碰撞前瞬时速度减小, 如图 7(e)、(f) 所示; 当增大  $\delta$  时, 不会对系统产生较大影响, 如图 7(g) 所示; 当减小恢复系数时, 系统出现更多的不稳定运动, 如图 7(h) 所示. 上述结果表明在相同的参数条件下, 碰撞系统 (2) 在弱阻尼、强激励、大质量比、小恢复系数情况下将会发生更多的不稳定运动. 而在强阻尼、弱激励、小质量比、较大恢复系数下将会出现较多的有规律的周期碰撞.

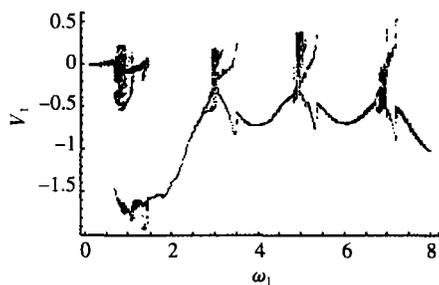


图 6 全局分岔图

Fig.6 Global bifurcation

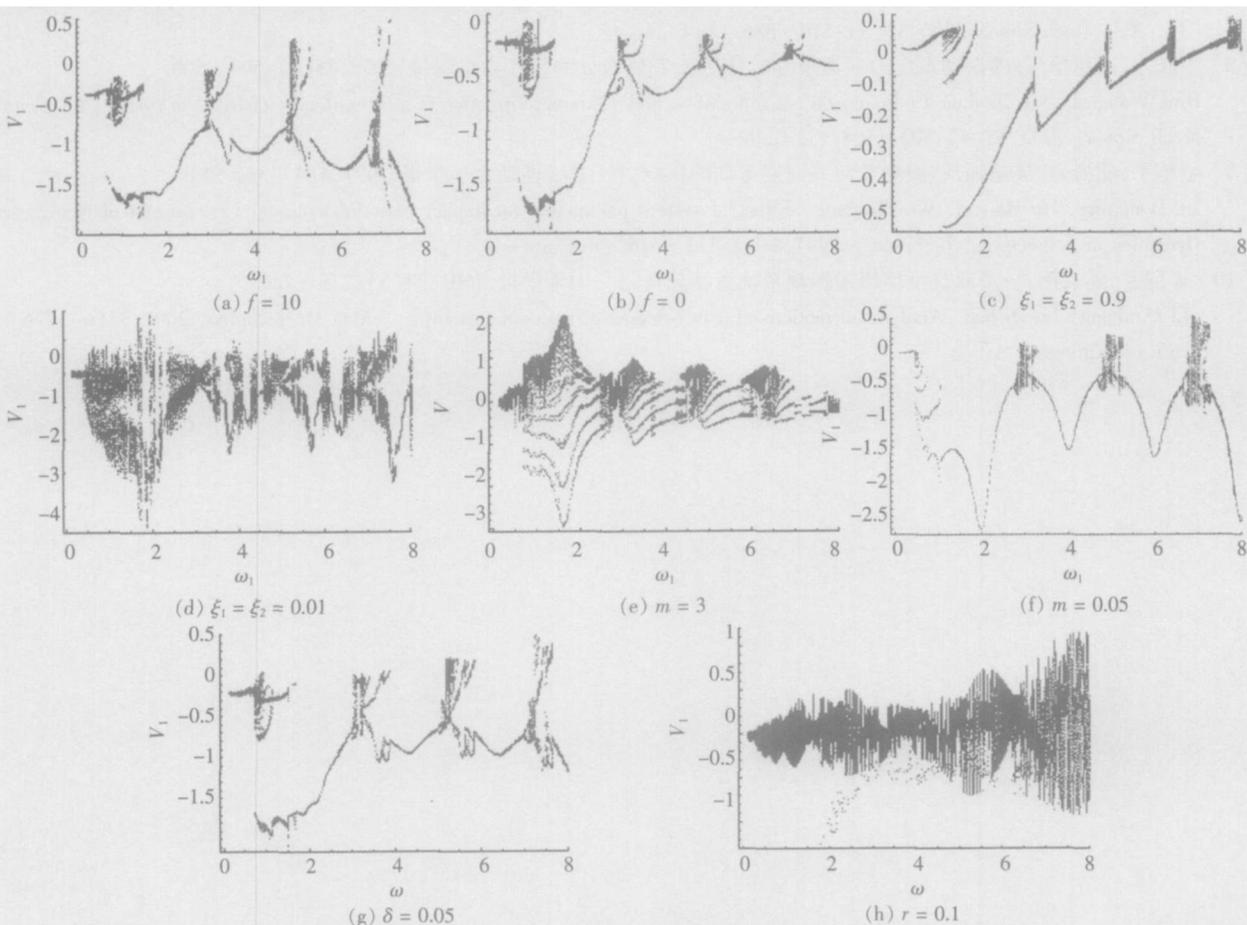


图 7 全局分析

Fig.7 Global analysis

## 5 结束语

本文对由两个振子对碰构成的碰撞系统的动力学行为进行了详细研究. 由于两自由度碰撞系统动力学的复杂性, 很难用解析的方法进行研究. 运用 Poincaré 映射方法, 得到该系统单碰周期  $n$  次谐运动存在性判据, 并讨论周期运动的稳定性. 数值模拟验证了上述方法的正确性. 同时, 还通过数值模拟的方法讨论了系统参数对周期运动的影响, 能避免系统工作在混沌状态, 降低噪声, 改善工作环境, 为碰振系统的优化设计及改造提供一定的依据. 与文 [9] 在不同基准参数下, 采用多参数变化讨论系统参数对周期运动的影响结果相比, 除质量比的变化引起不同的运动形式外, 其他结果基本一致.

## [参考文献] (References)

- [1] Shaw S W, Holmes P J. A periodically forced impact oscillator with large dissipation [J]. *J Appl Mech*, 1983, 50: 849-857
- [2] Nordmark A B. Non-periodic motion caused by grazing incidence in an impact oscillator [J]. *J Sound and Vibration*, 1991, 145(2): 279-297.
- [3] Whiston G S. Singularities in vibro-impact dynamics [J]. *J Sound and Vibration*, 1992, 152(3): 427-460.
- [4] Chin W, Ott E, Nusse H E, et al. Universal behaviour of impact oscillators near grazing incidence [J]. *Phys Lett A*, 1995, 201: 197-204.
- [5] Fredriksson M H, Nordmark A B. Bifurcation caused by grazing incidence in many degrees of freedom impact oscillators [J]. *Proc R Soc Lond A*, 1997, 453: 1261-1276.
- [6] Meijaard J P. A mechanism for the onset of chaos in mechanical systems with motion-limiting stop [J]. *Chaos Solitons and Fractals*, 1996, 7(10): 1649-1658.
- [7] 罗冠炜, 谢建华, 孙训方. 两自由度塑性碰撞振动系统的动力学研究 [J]. *力学学报*, 2000, 32(5): 579-586  
Luo Guanwei, Xie Jianhua, Sun Xunfang. Dynamics of a two-degree-of-freedom vibration system with perfectly plastic impacts [J]. *Acta Mech Sinica*, 2000, 32(5): 579-586 (in Chinese)
- [8] 丁旺才, 谢建华. 碰撞振动系统的一类余维二分岔及  $T^2$  环面分岔 [J]. *力学学报*, 2003, 35(4): 503-508  
Ding Wangcai, Xie Jianhua. Codimension-2 bifurcation and  $T^2$  torus bifurcation of a three-degree-of-freedom system [J]. *Acta Mech Sinica*, 2003, 35(4): 503-508 (in Chinese)
- [9] 金栋平, 胡海岩, 吴志强. 碰撞参数对其周期运动的影响 [J]. *非线性动力学学报*, 1997, 4(4): 312-316  
Jin Dongping, Hu Haiyan, Wu Zhiqiang. Effect of system parameters on impact periodic motions [J]. *Journal of Nonlinear Dynamics in Science and Technology*, 1997, 4(4): 312-316 (in Chinese)
- [10] 李群宏, 陆启韶. 一类双自由度碰撞振动系统运动分析 [J]. *力学学报*, 2001, 33(6): 776-786  
Li Qunhong, Lu Qishao. Analysis to motions of a two-degree-of-freedom system [J]. *Acta Mech Sinica*, 2001, 33(6): 776-786 (in Chinese)

[责任编辑: 严海琳]