最短路径算法在多阶段决策中的应用

王　琼

(南京师范大学 数学与计算机科学学院, 江苏 南京 210097)

[摘要]　介绍了最短路径算法的研究发展. 针对多阶段决策问题, 给出了利用最短路径算法的求解思路和实例, 即图结点表示状态、弧表示状态之间的先后关系. 针对套汇问题, 指出了其与一般最短路径问题的本质差异: 求解路径上权值乘积的最大值. 并基于 Floyd算法框架, 提出了最大获利的套汇算法, 算法计算结果优于以往文献.

[关键词]　最短路径, 多阶段决策, 套汇问题

[中图分类号] TP311　[文献标识码] B　[文章编号] 1672-1292(2008) 01-0084-04

Application of Shortest Path Algorithm in Multi-Stage Decision

Wang Qiong

(School of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, Nanjing 210097, China)

Abstract　Research and development of the shortest path algorithm is introduced. Regarding multi-stage decision problems, ideas and practical examples of resolution by using shortest path algorithm are presented. The method is that decision states are represented as nodes of graph and the sequential relation of states are arcs of graph. Regarding arbitrage problem, a new algorithm is presented. Regarding arbitrage problem, the paper points out distinguishing characteristic with traditional shortest path problem: solving maximum of weight's product of path. Based Floyed algorithm framework, maximum profit arbitrage algorithm is presented. The algorithm' results are better than those of the former literatures.

Key words　shortest path, multi-stage decision, arbitrage problem

最短路径算法是图论中的一个比较典型的算法. 最短路径算法包括指定顶点对之间的最短路径算法和所有顶点间的最短路径算法.

多年来, 最短路径问题的研究, 一直是图论、算法设计领域的研究热点, 有众多各有特色的算法, 其中最知名的是求解单源最短路径的 Dijkstra算法、求解多源最短路径的 Floyd算法、以及求解带负权值的最短路径的 Bellman-Ford算法[1].

对最短路径问题的研究分为算法研究和应用研究两个方面. 近年来, 算法研究的思路, 有的着眼于减少迭代次数[2]; 有的着眼于求解从源节点到其它各节点的所有最短路径[3,4]; 有的着眼于求解带某种约束条件的最短路径[5]; 有的着眼于算法适应网络环境的动态变化[6,7]; 有的着眼于将神经网络、遗传算法等用于近似最短路径的搜索之中[8,9]. 最短路径算法在交通路线设计、城市网络设计、物流选址、网络的路由等方面的应用更是层出不穷.

多阶段决策问题的特征是: 决策过程可以分为若干个相互联系的阶段, 每个阶段都要做出一个子决策, 这个子决策既决定了本阶段的效益, 也决定了下一阶段的初始状态. 当每一个阶段的决策确定后, 就得到一个决策序列, 即策略. 多阶段决策的目标是使各个阶段的效益总和达到最优.

本文对多阶段决策问题和最短路径算法之间的密切关联进行了一些深入讨论, 并给出两个实例.

1　设备更新问题

1.1　问题分析

设备更新问题是多阶段决策问题的一个实例[10]. 问题描述为: 设在计划期 n年中, 每年年初都可以考

收稿日期: 2006-09-10
作者简介: 王　琼 (1968-), 副教授, 研究方向: 算法设计、计算机图形学. E-mail: wangqiong@njnu.edu.cn

虑更新设备, 已知第 i年初如果更新设备的话, 支付购买新设备的费用为 $a_i\ (i = 1, 2, \cdots n)$, 更新后第 j年的设备运行费用为 $b_j\ (j = 1, 2, \cdots m)$, 应如何决策才能使 n 年内购新设备费用与设备运行费用之和最小.

表面上看, 该问题与最短距离算法没有什么关联. 但若将每个决策状态视作一个顶点, 状态之间的前后关系视作一条有向弧, 则整个决策过程就转换成了一个有向图模型. 于是, 决策过程中最优决策的代价就和有向图上的最短距离对应起来了.

1.2　建立有向图模型

将第 i年年初购买新设备的决策状态, 记作 $v_i\ (i = 1, 2, \cdots 5)$; 将第 n年年末的状态, 记作 v_{n+1}, 建立有向图模型, 如图 1所示.

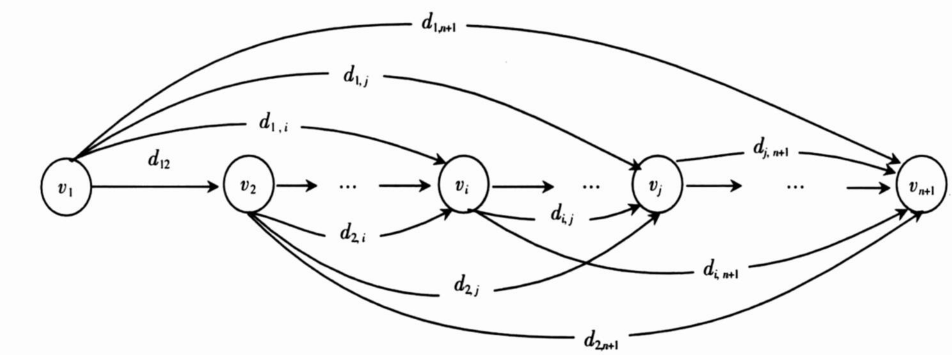

图 1　设备更新问题的决策网络

Fig.1　Decision network of equipment updating problem

从 v_1 到 v_{n+1} 存在的每条路径, 对应着一个决策过程. 如路径 $v_1 \to v_i \to v_j \to v_{n+1}$ 表示: 第 1年年初购买新设备, 第 i年年初购买新设备, 第 j年年初购买新设备, 然后一直用到第 n年年末.

弧 $v_i \to v_j$ 的权值记作 $d_{i,j}$, 值为第 i年年初购买新设备的费用, 与第 i年年初到第 j年年初的设备运行费用, 记作 $d_{ij} = a_i + \sum_{k=1}^{j-i} b_k$.

1.3　最短路径算法的应用

按照图 1, 建立相应的邻接矩阵, 套用 Dijkstra算法, 可以在时间复杂度 $O(n^2)$内, 计算得到从 v_1到 v_{n+1}的最短路径, 即为设备更新的最佳决策序列. 决策路径上的权值之和, 即为 n 年内购新设备和维护设备运行的最小费用.

2　套汇决策问题

2.1　问题分析

所谓套汇是指利用货币汇兑率的差异将一个单位的某种货币转换为大于一个单位的同种货币. 假设 1美元可以买 0.62英镑, 1英镑可以买 9.22法郎, 且 1法郎可以买到 0.1美元. 通过货币兑换, 一个商人可以从 1美元开始买入, 得到 $0.62 \times 9.22 \times 0.18 = 1.028952$美元, 从而获得 2.9% 的利润.

设已知 n种货币, 其间兑换率矩阵 $\boldsymbol{R} = (r_{ij})_{n\times n}$, r_{ij}表示 1个单位货币 i可以买到的货币 j的单位数, $r_{ii} = 1 (i = 1, 2, \cdots, n)$. 套汇问题[11] 就是为每种货币 i找出一个互不相同的货币序列 $i_1, i_2, \cdots, i_k$, 使得 $p_i = r_{ii_1} \cdot r_{i_1 i_2} \cdot \cdots \cdot r_{i_k i} > 1$, 即该兑换序列可以赢利; 同时要求 p_i 值最大化, 即赢利最多.

本质上, 套汇问题也属于多阶段决策问题, 可以套用有向图模型: 将货币形式视作图中顶点, 将货币的兑换视作有向弧, 将兑换率视作弧的权值.

2.2　最短路径算法的改进应用

本文认为套汇决策问题依然可以借鉴最短路径算法的思路, 但有其特殊性, 主要体现在: 目标 p_i 是乘积形式; 需求解其最大值; 兑换序列对应图中的简单回路, 其中的货币种类不可重复出现.

Floyd算法的主要思路是, 依次以各个顶点为中介尝试比较所有路径. 本文在此框架基础上, 提出以下最大获利套汇算法:

设 $d_{i,j}^{k}$表示第 i种货币和第 j种货币之间,已经尝试了货币 1、2…k作为中间货币的组合后的最大获利, $p_{i,j}^{k}$表示与 $d_{i,j}^{k}$相对应的套汇顶点序列.

①初始化: $d_{i,j}^{0} = r_{i,j}$, $p_{i,j}^{k} =$ 空.

②若套汇序列 $p_{i,k}^{k-1}$、$p_{k,j}^{k-1}$、k无共同货币形式,且 $i \neq k$, $j \neq k$(此条件保证无回路);且 $d_{i,k}^{k-1} \times d_{k,j}^{k-1} > d_{i,j}^{k-1}$,则 $d_{i,j}^{k} = d_{i,k}^{k-1} \times d_{k,j}^{k-1}$,同时合并路径 $p_{i,j}^{k} = p_{i,k}^{k-1}$& k& $p_{k,j}^{k-1}$.

③若 $k == n$,则第 i种货币的最佳套汇序列为 $p_{i,i}^{n}$,最佳获利为 $d_{i,i}^{n}$.

2.3 算例说明

假设有人民币(CNY)、英镑(GBP)、新加坡元(SGD)、美元(USD)、港币(HKD)、欧元(EUR)、日元(JPY)和瑞士法郎(CHF)等 8种货币的兑换率如表 1所示.

表 1　8种货币兑换率(2003年 7月 27日)

Table 1　Rate of currency exchange

	CNY	GBP	SGD	USD	HKD	EUR	JPY	CHF
CNY	1	0.074 7	0.211 2	0.120 8	0.942 2	0.105	14.346 3	0.162 8
GBP	13.387	1	2.827	1.591 6	12.612 9	1.405 1	192.053	2.179 6
SGD	4.735 3	0.353 7	1	0.572 1	4.461 6	0.497	67.934 7	0.771
USD	8.277 4	0.628 3	1.748	1	7.798 8	0.868 8	118.75	1.347 7
HKD	1.061 4	0.079 3	0.224 1	0.128 2	1	0.111 4	15.226 7	0.172 8
EUR	9.527 3	0.711 7	2.012	1.151	8.976 4	1	136.681	1.551 2
JPY	0.069 7	0.005 2	0.014 7	0.008 4	0.065 7	0.007 3	1	0.011 3
CHF	6.141 9	0.458 8	1.297	0.742	5.786 7	0.644 7	88.112 7	1

计算结果见表 2,好于文献[11]的计算结果.

表 2　8种货币最大获利套汇路径

Table 2　Arbitrage path of maximum profit

	最大获利套汇路径	最大获利套汇路径的收益率
CNY	CNY→GBP→CNY	0.074 7 × 13.387 = 1.000 01
GBP	GBP→CNY→SGD→USD→GBP	13.387 × 0.211 2 × 0.572 1 × 0.628 3 = 1.016 29
SGD	SGD→USD→GBP→CNY→SGD	0.572 1 × 0.628 3 × 13.387 × 0.211 2 = 1.016 29
USD	USD→GBP→CNY→SGD→USD	0.628 3 × 13.387 × 0.211 2 × 0.572 1 = 1.016 29
HKD	HKD→GBP→CNY→SGD→JPY→HKD	0.079 3 × 13.387 × 0.211 2 × 67.934 7 × 0.065 7 = 1.000 71
EUR	EUR→GBP→CNY→EUR	0.711 7 × 13.387 × 0.105 = 1.000 39
JPY	JPY→HKD→GBP→CNY→SGD→JPY	0.065 7 × 0.079 3 × 13.387 × 0.211 2 × 67.934 7 = 1.000 71
CHF	CHF→GBP→CNY→SGD→CHF	0.458 8 × 13.387 × 0.211 2 × 0.771 = 1.000 13

3　结论

多阶段决策问题其实有多种解法.本文探讨了借助有向图模型,直接利用最短径算法的途径.在该途径中,流程步骤与问题中的概念联系直观,便于调整、扩展.文中讨论的套汇问题就是一个灵活变更的例子.本文提出的最大获利的套汇算法,若忽略其中的起点、终点货币类型相同的约束,可以自然地转换为最大获利的换汇算法,在现实生活中有较好的应用价值.

[参考文献](References)

[1] 潘金贵,顾铁成编译. 现代计算机常用数据结构与算法[M]. 南京:南京大学出版社, 1994: 352-398.

Pan Jingui, Gu Tiecheng. Common Data Structures and Algorithms of Modern Computer[M]. Nanjing: Nanjing University Press, 1994: 352-398. (in Chinese)

[2] 王苏男,宋伟. 最短路径算法的比较[J]. 系统工程与电子技术, 1994, 16(5): 42-49.

Wang Sunan, Song Wei. Comparision of the shortest path algorithms[J]. Systems Engineering and Electronic, 1994, 16(5): 42-49. (in Chinese)

[3] 孙强,沈建华. Dijkstra的一种改进算法[J]. 计算机工程与应用, 2002, 38(3): 99-101.

Sun Qiang, Shen Jianhua. An improved algorithm of Dijkstra algorithm[J]. Computer Engineering and Applications, 2002,

38(3): 99- 101. (in Chinese)
[4] 王涛, 李伟生. 最短路径子图[J]. 北方交通大学学报, 2004, 28(4): 46- 49.
Wang Tao, Li Weisheng. The shortest path subgraph[J]. Journal of Northern Jiaotong University, 2004, 28(4): 46- 49. (in Chinese)
[5] 孙强, 杨宗源. 求受顶点数限制的最短路径问题的一个算法[J]. 计算机工程, 2002, 28(9): 73- 74.
Sun Qiang, Yang Zongyuan. A new algorithm for vertices-constrained shortest path[J]. Computer Engineering, 2002, 28(9): 73- 74. (in Chinese)
[6] 刘玉海, 肖江阳. 一种新型最短路径搜索算法的研究[J]. 计算机工程与应用, 2001, 37(17): 109- 110.
Liu Yuhai, Xiao Jiangyang. Research on an new shortest algorithm[J]. Computer Engineering and Applications, 2001, 37(17): 109- 110. (in Chinese)
[7] 安红岩, 胡光岷. 网络最短路径的动态算法[J]. 计算机工程与应用, 2003, 39(1): 173- 174.
An Hongyan, Hu Guangmin. A new dynamic algorithm for network mininun distance[J]. Computer Engineering and Applications, 2003, 39(1): 173- 174. (in Chinese)
[8] 杨云, 孙向军. 一种启发式遗传算法及其在最短路径求取中的应用[J]. 计算机工程与应用, 2003, 39(1): 12- 14.
Yang Yun, Sun Xiangjun. An algorithm based on illumination and it' s application in shortest path algorithm[J]. Computer Engineering and Applications, 2003, 39(1): 12- 14. (in Chinese)
[9] 毕军, 付梦印, 张宇河. 一种改进的蚁群算法求解最短路径问题[J]. 计算机工程与应用, 2003, 39(1): 107- 109.
Bi Jun, Fu Mengyin, Zhang Yuhe. An improved ant colony algorithm for the shortest path problem[J]. Computer Engineering and Applications, 2003, 39(1): 107- 109. (in Chinese)
[10] 姜启源. 数学模型[M]. 北京: 高等教育出版社, 1993.
Jiang Qiyuan. Mathematical Model[M]. Beijing: Higher Education Press, 1993. (in Chinese)
[11] 高尚. 套汇问题研究[J]. 数学的实践与认识, 2005, 35(10): 36- 40.
Gao Shang. Research on arbitrage problem[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2005, 35(10): 36- 40. (in Chinese)

[责任编辑: 严海琳]

(上接第 79页)

[8] Xu J H. Designing nonlinear classifiers through minimizing VC dimension bound[J]. Lecture Notes in Computer Sciences, 2005, 3496: 900- 905.
[9] 徐士良. 常用算法程序集(C语言描述) [M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.
Xu Shiliang. Set Procedures Commonly Used Algorithm (C Description Language) [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004. (in Chinese)
[10] 袁亚湘, 孙文瑜. 最优化理论与方法[M]. 北京: 科学出版社, 2003.
Yuan Yaxiang, Sun Wenyu. Optimization Theory and Methods[M]. Beijing: Science Press, 2003. (in Chinese)
[11] Himmelblau D M. 实用非线性规划[M]. 北京: 科学出版社, 1981.
Himmelblau D M. Practical Nonlinear Programming[M]. Beijing: Science Press, 1981. (in Chinese)
[12] 刘宝光编著. 非线性规划[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 1988.
Liu Baoguang. Nonlinear Programming[M]. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 1988. (in Chinese)
[13] Osuna E, Freund R, Girosi F. An improved training algorithm for support vector machines[C] // IEEE Workshop on Neural Networks for Signal Processing. Amelea Island, FL: IEEE, 1997: 276- 285.
[14] Joachins T. Making large-scale SVM learning practical[C] // Scholkopf B, Burges C J C, Smola A J. Advances in Kernel Methods-Support Vector Learning. Cambridge MA: MIT Press, 1998: 41- 56.
[15] Platt J C. Sequential minimal optimization: a fast algorithm for training support vector machines[R]. Microsoft Research Technical Report MSR- TR- 98- 14, 1998.

[责任编辑: 严海琳]