

# 邻近节点小间距的网络可靠性的计算

何 明<sup>1,2</sup>, 袁杭萍<sup>1</sup>, 胡爱群<sup>2</sup>, 罗 晨<sup>1</sup>

(1 解放军理工大学 指挥自动化学院, 江苏 南京 210007;

2 东南大学 信息科学与工程学院, 江苏 南京 210096)

[摘要] 提出通过节点有序排列的随机图模型来计算网络系统中节点对可靠性的方法, 该方法基于使用滑动窗口技术的递归算法, 滑动窗口由数个连续节点构成. 窗口包含的所有节点的连通概率可以在单步中计算出来, 随后窗口向前滑动一个节点, 重复该过程直到最终窗口到达最后的节点, 此时用连通概率即可计算网络系统的节点对可靠性. 该算法尤其适用于邻近节点间距小的网络.

[关键词] 网络可靠性, 2-终端可靠性,  $K$ -终端可靠性, 随机图

[中图分类号] TP 393 [文献标识码] A [文章编号] 1672-1292(2008)04-0029-03

## Computing the Reliability of Network With Small Distances Between Adjacent Nodes

He Ming<sup>1,2</sup>, Yuan Hangping<sup>1</sup>, Hu Aiqun<sup>2</sup>, Luo Chen<sup>1</sup>

(1. Institute of Comm and Automation PLA University of Science and Technology Nanjing 210007 China

2. Information Science and Engineering Institute, Southeast University, Nanjing 210096 China)

**Abstract** A new method is presented for computing the node-pair reliability of network systems modeled by random graphs with nodes arranged in sequence. It is based on a recursive algorithm using the sliding window technique, and the window is composed of several consecutive nodes. In a single step, the connectivity probabilities for all nodes included in the window are computed. Subsequently, the window is moved one node forward. This process is repeated until, in the last step, the window reaches the terminal node. The connectivity probabilities found at that point are used to compute the node-pair reliability of the network system in question. The algorithm is designed especially for graphs with small distances between adjacent nodes.

**Key words** network reliability, two-terminal reliability,  $K$ -terminal reliability, random graph

目前, 在网络系统中计算节点对可靠性的方法大致可归为两类: 一类是基于事先获取的最小路径; 另一类是基于网络系统事件树分析. 但是, 多数方法的最大问题在于计算复杂度大, 若不对网络结构做出一些假设, 计算网络可靠性将是一个 NP 难题<sup>[1]</sup>. 例如: 文献[2]中计算  $K$ -终端可靠性的算法, 假设图有适当间距意味着图中的边相互依赖, 只适用于节点间距适当的图. 本文仅基于邻近节点间的距离不超过 5 这惟一的假设, 提出一种通过随机图来计算网络系统中节点对可靠性的新方法.

### 1 概念及假设

设  $G = (V, E)$  表示一个随机图,  $V$  和  $E$  分别是节点和边的集合. 假设  $G$  中节点按序排成一列, 使得邻近节点距离很小. 两个节点间距离可定义为节点序号差的绝对值. 该方法计算  $G$  的  $s-t$  (源点  $v_s$  到终点  $v_t$ ) 可靠性不需要事先给出  $G$  的所有最小割集和最小路径. 若邻近节点距离不超过 2, 该方法既适用有向图又适用于无向图, 并且图中不仅边可以失效, 节点也可以失效 (许多方法都是基于只有边可以失效的假设). 该方法主要成功之处在于其低计算复杂度  $O(n)$ , 其中  $n$  表示  $G$  中节点的数目. 由于复杂度很大程度上依

收稿日期: 2008-06-18  
基金项目: 国家 863 计划 (2007AA01Z432, 2007AA01Z433) 和国家 242 信息安全计划课题 (2006A07) 资助项目.  
通讯联系人: 何明, 讲师, 博士后, 研究方向: 信息安全和建模与仿真. E-mail: bkie\_horse@126.com

赖  $G$  中任意两个邻近节点的最大距离  $(G)$ , 而  $(G)$  依赖于节点的排序. 因此, 节点合适的索引, 可以最小化  $(G)$ , 这对于方法的效率至关重要. 和线性最佳排序一样, 通常情况这是一个 NP 完全问题<sup>[3]</sup>.

节点和边的状态都是独立的, 因此每个节点  $v_i$  的可用概率可表示为  $p_V(i)$ , 而  $q_V(i)$  则为  $v_i$  的失效概率. 同理, 每个边  $(v_i, v_j)$  的可用概率可表示为  $p_E(i, j)$ , 而  $q_E(i, j)$  则为  $(v_i, v_j)$  的失效概率.

假设  $G$  中节点是线性排列的, 并且邻近 (直接连接) 现象只发生在序号差值很小的节点之间. 可用如下条件表示:

$$V = \{v_1, \dots, v_n\}, \quad (v_i, v_k) \in E \quad |i - k| \leq \delta, \quad (1)$$

其中  $\delta$  是一个很小的数, 例如  $\delta = 5$   $(v_i, v_k) \in E$  是指  $v_i$  和  $v_k$  通过一条边直接相连, 也就是两点相邻. 我们用  $R_{s-t}(G)$  表示  $G$  的  $s-t$  可靠性, 而  $s-t$  可靠性可定义为所讨论的两点 (源点  $v_s$  和终点  $v_t$ ), 它们之间存在一条由  $G$  中一系列的节点和边组成的通路的概率.

很容易将随机图解释成一个信号传输网络. 设  $\{v_i - v_k\}$  表示信号从  $v_i$  到达  $v_k$  的事件, 信号可能间接通过另一些媒介节点. 设  $\{v_i - v_k\}$  表示信号从  $v_i (i = s)$  出发或途经  $v_i (i \neq s)$  然后直接传到  $v_k$ . 由于节点和边都是独立的, 很明显有

$$R_{s-t}(G) = P_r(\{v_s - v_t\}) = p_V(i)p_E(i, k). \quad (2)$$

如果  $p_V(i) = 1$  那么事件  $\{v_i - v_k\} ((v_i, v_k) \in E)$  则不是独立的. 当然对于  $p_V(i) = 1$  我们有

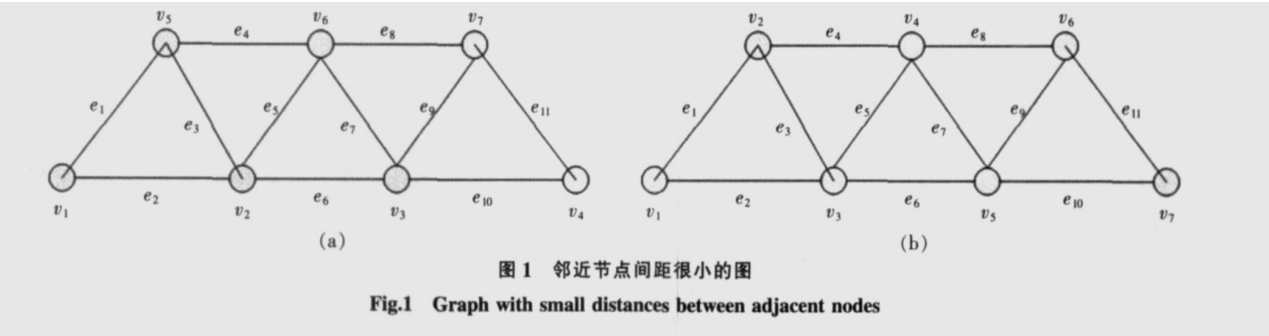
$$\begin{aligned} P_r(\{v_i - v_k\} \cap \{v_i - v_l\}) &= p_V(i)p_E(i, k)p_E(i, l) \\ P_r(\{v_i - v_k\})P_r(\{v_i - v_l\}) &= p_V(i)p_E(i, k)p_V(i)p_E(i, l). \end{aligned} \quad (3)$$

因此, 对于确定的  $i$   $\{v_i - v_k\} ((v_i, v_k) \in E)$  只有在  $p_V(i) = 1$  时才是独立的. 所以, 应用概率  $p(i, k)$ 、 $q(i, k)$  时必须注意此点.

## 2 $(G) = 3$ 时网络系统的可靠性

本文的目的基于以  $G$  中元素 (节点或边) 的概率来表示  $R_{s-t}(G)$ , 提出一种基于滑动窗口技术的递归算法. 在每一步中都将计算由小窗口中节点构成的连通概率, 随后窗口向右滑动一个节点的距离, 最终计算在最后一步选出的概率的和, 即  $R_{s-t}(G)$ .

图 1 是两个邻近节点间距很小的示例图, 用来说明顶点适当的索引如何在获取  $G$  中较小的排列时发挥作用. 图 1(a) 和图 1(b) 在拓扑结构上是等价的, 但图 1(b) 对节点重新编号, 有最佳编号的顶点.



### 2.1 算法理论基础

本节讨论在  $(G) = 3$  时, 节点  $v_s$  和  $v_t$  在  $\{v_1, \dots, v_n\}$  中 不深入, 也就是  $1 \leq s \leq 3$   $n - 2 \leq t \leq n$  的情况下, 一种计算  $R_{s-t}(G)$  的方法. 假设  $G$  是一个无向图, 其边可能失效但节点总是处于可用状态. 我们有  $p_V(i) = 1$   $1 \leq i \leq n$  和  $p_E(j, k) = p(j, k)$ ,  $q_E(j, k) = q(j, k)$ , 其中  $(v_j, v_k)$  属于边集  $E$ .  $A_k^{(i)}$  表示事件从源节点 (可以是  $v_1, v_2$  或者  $v_3$ ) 到节点  $v_k$  存在一条通路, 而这些节点都属于  $\{v_1, \dots, v_i\}$ , 其中  $i \geq 3$   $k \geq i$   $B_k^{(i)}$  是  $A_k^{(i)}$  的补. 我们需要一个辅助事件  $C_j^{(i)}$ ,  $1 \leq j \leq 10$   $i \geq 3$  时, 得到以下公式:

$$\begin{aligned} C_1^{(i)} &= B_{i-2}^{(i)} & B_{i-1}^{(i)} & A_i^{(i)} & \overline{\{v_{i-2} \sim v_{i-1}\}}; & C_2^{(i)} &= B_{i-2}^{(i)} & B_{i-1}^{(i)} & A_i^{(i)} & \{v_{i-2} \sim v_{i-1}\}; \\ C_3^{(i)} &= B_{i-2}^{(i)} & A_{i-1}^{(i)} & B_i^{(i)} & \overline{\{v_{i-2} \sim v_i\}}; & C_4^{(i)} &= B_{i-2}^{(i)} & A_{i-1}^{(i)} & B_i^{(i)} & \{v_{i-2} \sim v_i\}; \\ C_5^{(i)} &= B_{i-2}^{(i)} & A_{i-1}^{(i)} & A_i^{(i)}; & & C_6^{(i)} &= A_{i-2}^{(i)} & B_{i-1}^{(i)} & B_i^{(i)} & \overline{\{v_{i-1} \sim v_i\}}; \\ C_7^{(i)} &= A_{i-2}^{(i)} & B_{i-1}^{(i)} & B_i^{(i)} & \{v_{i-1} \sim v_i\}; & C_8^{(i)} &= A_{i-2}^{(i)} & B_{i-1}^{(i)} & A_i^{(i)}; \\ C_9^{(i)} &= A_{i-2}^{(i)} & A_{i-1}^{(i)} & B_i^{(i)}; & & C_{10}^{(i)} &= A_{i-2}^{(i)} & A_{i-1}^{(i)} & A_i^{(i)}. \end{aligned}$$

(4)

2 2 算法流程

寻找  $v_{i-2}^{(3)}$ 、 $v_{i-1}^{(3)}$  和  $v_i^{(3)}$  的坐标;  
for 每个  $i$  3 to  $n-1$  do  
寻找  $v_{i-2}^{(i-1)}$ 、 $v_{i-1}^{(i-1)}$  和  $v_i^{(i-1)}$  的坐标;  
for 每个  $s$  1 to 3 do  
for 每个  $t$   $n-2$  to  $n$  do  
计算  $R_{s-t}(G)$ .

2 3 计算复杂度分析

由  $v_{i-2}^{(i)}$  计算  $v_{i-1}^{(i-1)}$ 、由  $v_{i-1}^{(i)}$  计算  $v_i^{(i-1)}$  和由  $v_i^{(i)}$  计算  $v_{i-1}^{(i-1)}$  所必须的初等算术运算数量是  $12t$ , 因此, 算法所要求的计算时间大约是  $(n-3)381t$ . 其中,  $t$  是 1 次初等运算所需的时间, 所以该算法的计算复杂度为  $O(n)$ .

3 计算示例

图 2 给出了一个  $\Gamma(G)=3$  的网络的例子, 可以证明本文算法不仅可以应用于  $\Gamma(G)=3$  时的网络系统, 还可以应用于经过较小修改转换后具有该特性的系统.

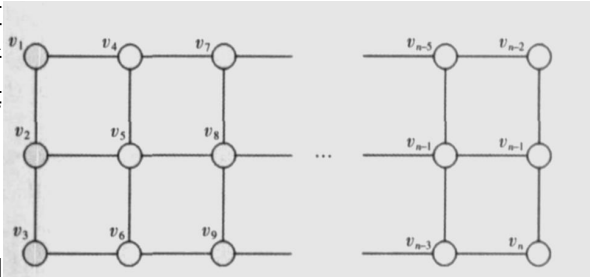


图 2  $\Gamma(G)=3$  的晶格状网络  
Fig.2 A lattice-shaped network with  $\Gamma(G)=3$

表 1 阶为 5 且边的可靠性相同的完全图与不同  $p_E$  对应的  $R_{s-t}(G)$  值

Table 1 Selected values of $R_{s-t}(G)$ for complete graph of order 5 with equally reliable edges									
$p_E$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$R_{s-t}(G)$	0.13134	0.31753	0.52528	0.71325	0.85352	0.93947	0.98143	0.99653	0.99979

从表 1 的数据结果可以看出, 以  $G$  中元素的概率可以有效地表示  $R_{s-t}(G)$ , 在每一步中计算出由小窗口中节点构成的连通概率, 最终可获得  $R_{s-t}(G)$  的值.

4 结论

邻近节点间距很小的图有重要的用途, 可以用来作为测试那些可以计算网络可靠性近似值而得不到精确值的方法的精确度的标准<sup>[4]</sup>. 当  $\Gamma(G)=3$  且含有大量节点的图中, 如果本文提出的方法产生可接受的近似值, 那么在通常的情况下, 也就是  $\Gamma(G)$  取任意值时, 该方法可取得较好的结果.

[参考文献] (References)

[1] Ball M O. Computational complexity of network reliability analysis: an overview [J]. IEEE Trans Reliab, 1986(35): 230-239  
[2] Lin M S. A linear-time algorithm for computing  $K$ -terminal reliability on proper interval graphs [J]. IEEE Trans Reliab, 2002, 51(1): 58  
[3] Galtier J, Laugier A, Pons P. Algorithms to evaluate the reliability of a network [C] // Proceedings of the Workshop on the Design of Reliable Communication Networks, 2005: 93-100.  
[4] Ramirez-Marquez JE, Coit D W. A Monte-Carlo simulation approach for approximating multi-state two-terminal reliability [J]. Reliab Eng Syst Saf, 2005, 87(2): 141.

[责任编辑: 丁蓉]