

# 估计噪声方差与 Kalman 滤波的传感器动态补偿

陈战平

(南京师范大学 计算机科学与技术学院, 江苏 南京 210046)

**[摘要]** 传感器动态补偿后的输出噪声被加重且方差未知. 为有效地抑制补偿后的噪声干扰, 研究了一种在未知观测噪声方差条件下, 采用卡尔曼滤波去噪的传感器动态补偿算法. 补偿器的参数通过参考模型和系统辨识的方法得到, 同时, 利用参考模型建立卡尔曼滤波器, 消除高频噪声对测量精度的影响. 由于补偿器的输出信号可以用一个  $M$  阶多项式分段逼近, 利用小波消失矩原理对输出信号的噪声进行方差估计, 从而解决了在未知观测噪声的条件下卡尔曼滤波失效问题. 最后, 通过仿真和应用实验, 验证了该方法的有效性.

**[关键词]** 动态补偿, 噪声, 方差估计, 滤波

**[中图分类号]** TP212 **[文献标志码]** A **[文章编号]** 1672-1292(2011)03-0013-05

## Dynamic Compensating of Sensor Based on Noise Variance Estimation and Kalman Filtering

Cheng Zhanping

(School of Computer Science and Technology, Nanjing Normal University, Nanjing 210046, China)

**Abstract:** After sensor dynamic compensation, the output signal of the noise is increased and the variance is unknown. In order to effectively suppress noise, a dynamic compensation algorithm of adopting Kalman filter de-noising is researched in unknown measurement noise variance. Parameters of the compensator were obtained by reference model and system identification. At the same time, Kalman filter was constructed with reference mode to eliminate high frequency effected measurement precision. On account of the compensator's output signal piecewise approximated by a polynomial with a degree of  $M$ , the noise variance can be estimated to utilize vanishing moments of wavelet, and the Kalman filter under the unknown measurement noise variance condition is valid. Simulation experimental results show that the approach is effective.

**Key words:** dynamic compensation, noise, variance estimation, filtering

在工业动态测量系统中, 需要传感器具有良好的动态特性, 能迅速反映被测对象的变化. 但是许多传感器都存在一定的动态响应滞后, 在对瞬变信号实施测量时, 形成动态测量误差. 通过在传感器的输出端串接一个补偿器, 使传感器频带得到适当延伸, 可以达到扩展传感器频带和减小动态误差的目的<sup>[1-5]</sup>. 但是, 在测量系统中存在着噪声干扰, 而噪声又是一个高频信号, 所以, 补偿器的增加将会引起严重的噪声放大, 影响测量系统的精度. 如何消除动态补偿后的信号噪声, 是动态测量需要解决的关键问题之一.

卡尔曼(Kalman)滤波是一种最优随机滤波技术, 能够很好地消除噪声对测量系统信号的干扰. 但是, 在采用 Kalman 滤波时, 如果系统模型以及观测噪声的统计特性描述不准确, 卡尔曼滤波的性能将严重恶化, 甚至出现滤波发散<sup>[6]</sup>. 而在传感器动态补偿时, 系统的模型参数和输出信号的噪声方差是未知的. 为此, 本文研究了一种基于模型参考和噪声方差估计建立 Kalman 滤波器的传感器动态补偿算法, 以消除传感器动态误差以及补偿后的高频噪声干扰. 该算法采用参考模型和系统辨识得到补偿器的参数; 将参考模型作为卡尔曼滤波器的系统模型; 同时, 本文采用了文献[7]所提出的, 利用小波消失矩实时估计输出信号噪声方差的方法<sup>[7]</sup>, 以解决在未知观测噪声的条件下卡尔曼滤波失效问题.

收稿日期: 2011-05-24.

通讯联系人: 陈战平, 讲师, 研究方向: 测控技术研究. E-mail: cexpjx@163.com

## 1 动态测量误差补偿

一种基于模型参考的动态补偿器设计原理如图 1 所示. 图中  $H(z)$  具有理想的带通特性, 能够满足动态测量的要求.  $x(t)$  为输入激励信号,  $u(t)$ 、 $y(t)$  和  $d(t)$  分别为传感器、补偿器和参考模型的输出信号.  $\delta(t)$  为传感器输出端的测量噪声.  $\theta$  为补偿器  $\bar{G}(z)$  待辨识的参数.  $\bar{G}(z)$  在理想情况应采用高通滤波器, 但是, 高通滤波器会引起更严重的噪声放大, 因此, 在这里采用了带通滤波器<sup>[5]</sup>. 在不考虑传感器输出端的测量噪声  $\delta(t)$  的情况下, 可将  $\bar{G}(z)$  的设计问题转化为最小二乘的系统辨识问题. 补偿器的输出为:

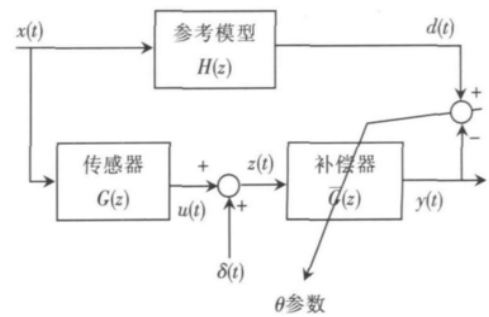


图 1 动态补偿原理示意图

Fig.1 Dynamic compensation principle diagram

$$y(t) = - \sum_{i=1}^p a_i y(t-i) + \sum_{j=0}^q b_j u(t-j), \quad (1)$$

式中  $a_i$  和  $b_j$  为补偿器的参数;  $p$  和  $q$  为补偿器的阶次. 补偿器的设计是通过实验数据  $\bar{G}(z)$  对系统辨识的最优化过程, 即使得:

$$J = \min E[ [d(t) - y(t)]^2 ], \quad (2)$$

式中  $E$  是数学期望. 但是, 在传感器输出端的测量噪声  $\delta(t)$  是不可避免的. 在噪声扰动下, 采用均方误差为准则的系统辨识方法, 无法得到补偿器参数  $\theta$  的无偏估计. 在这里采用误差白化的最小二乘法辨识<sup>[8]</sup>, 得到参数  $a_i$  和  $b_j$ . 这样, 经过补偿后的传感器系统具有满足动态测量要求的带通特性.

## 2 卡尔曼滤波算法

在增加了动态补偿环节后, 测量系统的带宽增大, 使得传感器动态响应的快速性得到了保证, 但是, 高频噪声干扰被加重. 为了保证一定的测量精度, 必须消除噪声对输出信号的干扰. 由于动态测量信号  $y(t)$  是时变的, 为了保证测量结果的实时性, 需要采用递推计算的实时数字滤波器消除噪声, 而常用的平均滤波、傅里叶滤波和小波滤波都无法满足实时性要求. Kalman 滤波是一种最优实时滤波器, 能够很好地消除噪声对测量系统信号的干扰.

设在离散域上线性系统状态方程为:

$$\begin{cases} X(t+1) = AX(t) + B(u(t+1) + \delta(t+1)) \\ y(t+1) = CX(t+1) + \eta(t+1) \end{cases}, \quad (3)$$

式中  $A$  为状态转移矩阵,  $B$  为输入矩阵,  $C$  为观测矩阵;  $X(t) \in R^n$  为状态向量;  $u(t) \in R$  为系统输入量;  $\delta(t) \in R$  过程噪声信号;  $y(t) \in R$  为系统实际输出(观察信号);  $\eta(t) \in R$  为观察噪声信号. 离散卡尔曼滤波器递推算法为:

由  $t$  时刻到  $t+1$  时刻的协方差阵预测:

$$P_{t+1|t} = AP(t)A^T + B\Omega B^T. \quad (4)$$

由  $t$  时刻到  $t+1$  时刻的状态预测:

$$\hat{X}_{t+1|t} = A\hat{X}(t). \quad (5)$$

$t+1$  时刻滤波增益:

$$\Gamma_{t+1} = P_{t+1|t}C^T / (CP_{t+1|t}C^T + \Psi). \quad (6)$$

$t+1$  时刻状态估计:

$$\hat{X}(t+1) = \hat{X}_{t+1|t} + \Gamma_{t+1}(y(t+1) - C\hat{X}_{t+1|t}). \quad (7)$$

$t+1$  时刻滤波器输出:

$$\hat{y}(t+1) = C\hat{X}(t+1). \quad (8)$$

$t+1$  时刻协方差阵估计:

$$P(t+1) = (I - \Gamma_{t+1}C)P_{t+1|t}. \quad (9)$$

式中  $\Psi$  为系统观察噪声方差;  $\Omega$  为系统的过程噪声方差.

采用 Kalman 滤波时, 要求已知测量系统的精确数学模型, 而在传感器动态补偿中, 测量系统的数学模型是未知的. 为了解决这个问题, 在此采用参考模型建立 Kalman 滤波器的状态方程参数  $[A \ B \ C]$ . 另外, Kalman 滤波器在观测噪声方差不准确等情况下, 性能将会严重恶化, 甚至出现滤波发散<sup>[6]</sup>. 而在实际应用中, 测量系统随时可能受到各种外界干扰, 因此观测噪声的方差随时会发生变化, 仅仅依靠有限的先验信息对观测噪声的方差进行描述是不可靠的, 需要一种能够自适应的跟踪观测噪声变化, 并对噪声的方差进行实时估计的算法来解决这一问题.

在传感器的动态补偿器建模中, 通常采用单位阶跃或脉冲信号作为传感器的输入信号, 由于测量系统的低通特性, 使得补偿器的输出信号可以用一个分段平滑的多项式表示. 一个具有  $M$  阶消失矩的小波函数, 在对多项式信号进行小波变换时, 可以消除信号所对应多项式的前  $M - 1$  项. 所以, 利用小波消失矩原理, 可以对补偿器输出信号的噪声方差进行实时估计, 以保证 Kalman 滤波器的性能.

### 3 估计观测噪声方差的卡尔曼滤波

#### 3.1 小波变换的噪声方差估计

设系统的观察信号在一个长度为  $K$  的观察区内是能够分段平滑的信号, 且在该观察区内的信号序列为  $\{y(k) \mid k = t, t+1, \dots, t+K-1\}$ , 由 Stone—Weierstrass<sup>[7]</sup> 理论可知  $y(k)$  可以用一个  $L$  阶多项式表示:

$$y(k) = \beta_0 + \beta_1 k + \dots + \beta_L k^L + \eta(k) = y_d(k) + \eta(k), \quad (10)$$

式中  $y_d(k)$  是一个多项式函数,  $\beta_i$  为多项式的系数 ( $i = 1, 2, \dots, L$ ), 它是无噪声的观察信号;  $\eta(k)$  是系统的观测噪声, 且假设该噪声为白噪声.

设  $\varphi(k)$  是一个小波函数, 并且其尺度变换和时间平移为:

$$\varphi_{\alpha\pi}(k) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \varphi\left(\frac{k-\pi}{\alpha}\right), \quad (11)$$

式中  $\alpha$  是尺度因子. 对  $y(k)$  的小波变换能够被表示为:

$$W_y(\alpha, \pi) = y(k) * \varphi_{\alpha\pi}(k) = y_d(k) * \varphi_{\alpha\pi}(k) + \eta(k) * \varphi_{\alpha\pi}(k), \quad (12)$$

式中  $*$  为卷积运算. 如果  $\varphi(k)$  有  $m$  个消失矩, 且  $m > L$ , 则对于一切正整数  $m > L$ , 有:

$$\int_{-\infty}^{\infty} k^m \varphi(k) dk = 0. \quad (13)$$

由 (12) 和 (13) 式的条件可知, 在该观察区内的信号  $\{y(k) \mid k = t, t+1, \dots, t+K-1\}$  在小波变换只保留噪声  $\eta(k)$  成分<sup>[8]</sup>, (12) 式可表示为:

$$W_y(\alpha, \pi) = \eta(t) * \varphi_{\alpha\pi}(t). \quad (14)$$

噪声的标准差可以通过小波系数最细部分绝对值的中值估计出来<sup>[7]</sup>, 即:

$$\hat{\sigma} \approx \frac{1}{0.6745} \text{Med}[|W_y(\alpha, K/2)|], \quad (15)$$

式中: 尺度  $\alpha$  为  $1/2$ ,  $K$  为观察区间的离散序列长度,  $W_y(\alpha, K/2)$  为  $\{y(k) \mid k = t, t+1, \dots, t+K-1\}$  的  $K/2$  小波系数,  $\text{Med}(\cdot)$  为中值函数.

#### 3.2 算法实现

通过上面的分析可知, 基于观察噪声方差估计的 Kalman 滤波算法如下:

**Step 1** 通过参考模型建立系统状态方程参数  $[A \ B \ C]$ .

**Step 2** 设  $t = 0$ , 选取长度为  $N_0$  的补偿器传感器输出信号序列  $\{y(k) \mid k = t, t+1, \dots, t+N_0-1\}$  作为初始值; 设状态  $\hat{X}(t) = 0$  和协方差阵  $P(t) = 0$ , 过程噪声方差  $\Omega = I$ ; 选取一个消失矩  $k > L$  的小波函数  $\varphi(t)$ ;

**Step 3** 由式 (15) 估计出噪声的标准差  $\sigma(t)$ , 并根据  $\sigma(t)$  计算观测噪声方差阵  $\Psi(t)$ .

**Step 4** 由式 (4) 和式 (5) 预测  $t+1$  时刻的协方差阵  $P_{t+1|t}$  和状态阵  $\hat{X}_{t+1|t}$ .

**Step 5** 将  $\Psi(t)$  作为式 (6) 中的  $\Psi$ , 由式 (6)、(7) 和 (8) 计算出  $t+1$  时刻的滤波器输出.

**Step 6** 由式 (9) 估计出  $t+1$  时刻协方差阵  $P(t+1)$ .

**Step 7**  $t = t+1$ , 重复 3、4、5 和 6 步, 直到  $t = N$ .

这里  $N$  为补偿器输出信号序列的长度.

本文的算法与常用的卡尔曼滤波算法的主要区别就在于观测噪声方差  $\Psi$  不是预先根据经验值确定的,而是根据实时观测信号值估计出来的.这就保证了计算用观测噪声方差和实际系统观测噪声方差基本一致,即便实际系统由于受到某种干扰,噪声方差发生了变化,该算法也能准确地跟随观测信号的变化.

## 4 仿真实验

为了验证上述的传感器动态测量误差补偿方法的有效性,作者以热敏电阻传感器为对象,进行了动态误差补偿的仿真实验.热敏电阻传感器的输出值为电阻,当被测量的温度变化率较低时,用传感器输出的阻值  $R$  表示测量的温度  $T$ ,滞后和衰减相对很小.而当被测量的温度变化率高于传感器响应速度时,输出的阻值  $R$  存在滞后和衰减.如在利用热敏电阻测量材料的热特性时,因为热敏电阻的响应滞后,使得材料热特性测量曲线与实际曲线之间存在较大的误差<sup>[9,10]</sup>,为此,必须对热敏电阻的动态响应滞后误差进行补偿.动态补偿环节的设计过程如下:

① 热敏电阻传感器的动态特性能够用一个低通滤波器  $G(s)$  表示:

$$G(s) = \frac{U(s)}{T(s)} = \frac{\omega_c}{s + \omega_c}, \quad (16)$$

其中  $\omega_c = 0.06\pi \text{ rad/sec}$  是截止频率,  $U(s)$  为传感器输出阻值经过电路转换后的电压信号.

② 增加一个动态补偿环节,补偿环节通过系统辨识的方法得到.为使补偿器的输出快速达到传感器稳态值,参考模型选用较大固有频率的二阶低通滤波器:

$$H(s) = \frac{U_c}{U} = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\xi_0\omega_0s + \omega_0^2}, \quad (17)$$

式中,阻尼比  $\xi_0 = 0.8$ ,  $\omega_0 = 1.5\pi \text{ rad/sec}$ .  $\omega_c$  是截止频率,远大于  $\omega_c$ ,但也不能够选取得太大,盲目地拓宽传感器的通频带,会使测量中存在高频噪声信号得到放大,使补偿失去意义.设补偿器为一个带通滤波器,

$$\bar{G}(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}.$$

采用如图 1 所示的方法,得到补偿器的参数:  $\theta = (a_1, a_2, b_0, b_1, b_2)$ .

③ 在仿真实验中给输出端传感器叠加了白噪声.考虑到在实际工程中,噪声一般是非平稳随机噪声,其方差是变化的.则叠加在  $y(k)$  上的噪声为:  $\delta(t) = [\sigma_{\min} + \eta(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) \text{randn}(0,1)]$ ,

式中  $\eta$  为  $[0,1]$  之间分布的随机数;  $\text{randn}$  为均值为 0、方差为 1 的白噪声;  $\sigma_{\min} = 0.01$  和  $\sigma_{\max} = 0.05$  分别为  $\delta(t)$  标准差的下限和上限.采用误差白化的最小二乘法对补偿环节  $\bar{G}(z)$  进行辨识,使得式(2)成立.补偿器的参数为 50 次实验的平均值,通过辨识过程得到补偿环节的脉冲响应  $\bar{G}(z)$ ,

$$\bar{G}(z) = \frac{4.503 - 0.917z^{-1} - 3.432z^{-2}}{1 - 1.317z^{-1} + 0.471z^{-2}}. \quad (18)$$

④ 通过参考模型公式(17)建立起系统的状态空间模型,采用 Kalman 滤波消除高频噪声对补偿后测量值的影响.

对热敏电阻动态测量误差补偿的仿真实验结果如图 2、3 和 4 所示.其中,图 2 是没有经过 Kalman 滤波的补偿器的输出信号,虽然信号的滞后和衰减被减小,但是噪声被严重放大,影响测量系统精度.图 3 是经过普通 Kalman 滤波的补偿器的输出信号,由于传感器输出信号中的白噪声,在经过补偿器后噪声方差发生了变化,影响到 Kalman 滤波器的效果.图 4 是采用方差估计的 Kalman 滤波,由于准确估计出观测噪声标准差,从而避免了因观测噪声不准确而引起的卡尔曼滤波失效问题.对 Kalman 滤波的效果进行分析:受到噪声干扰的输出信号  $y(k)$  的序列长度为  $N = 4096$ ,  $y(k)$  经过 Kalman 滤波的输出数据为  $\bar{y}(k)$ ,而没有受到噪声干扰的补偿环节的真实输出信号为  $y_f(k)$ ,定义信号的标准差:

$$S = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\bar{y}(k) - y_f(k))^2}. \quad (19)$$

通过分析可得,没有经过 Kalman 滤波消除噪声的输出信号的标准差  $S_1 = 0.3269$ ,经过普通 Kalman 滤波的噪声标准差  $S_2 = 0.0752$ ,经过方差估计 Kalman 滤波的噪声标准差  $S_3 = 0.0412$ .因此,经过方差估

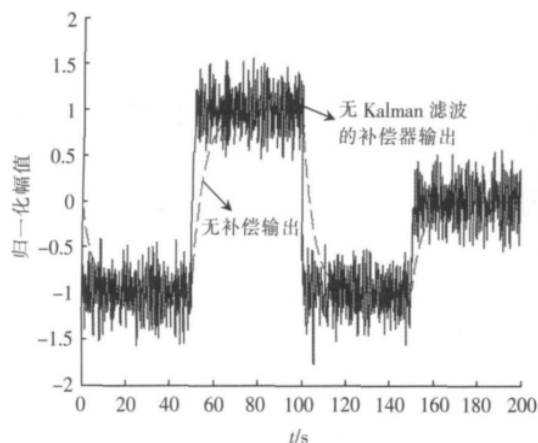


图2 无 Kalman 滤波的补偿器输出信号

Fig.2 The compensator output of non-Kalman filtering

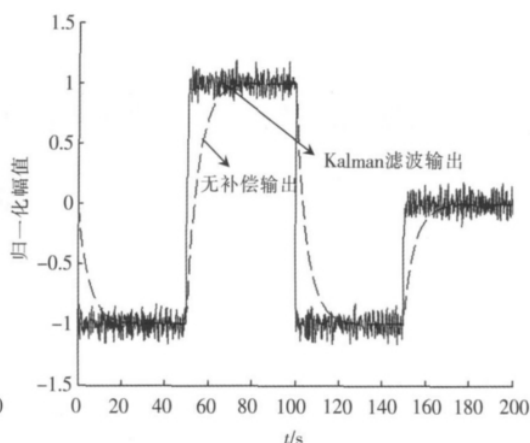


图3 Kalman 滤波的补偿器输出信号

Fig.3 The compensator output of Kalman filtering

计 Kalman 滤波后,信号的噪声水平减小得更多。

## 5 结语

采用动态补偿技术拓宽传感器或测试系统的频带,以减小动态测量误差,是动态测试的一个重要研究内容。随着传感器或测试系统频带扩大,使得测量系统的高频噪声也被严重放大,影响测量系统精度,而 Kalman 滤波是一种最优滤波技术,能够有效地消除噪声对补偿后的测量系统影响。但是,不准确的观测噪声统计特性描述往往会导致 Kalman 滤波性能恶化。本文针对这一问题,采用小波分析的方法,实时估计补偿器输出信号的噪声标准差,并利用估计的标准差进行卡尔曼滤波。仿真结果表明本文方法可以有效地消除噪声对补偿后测量系统精度的影响。

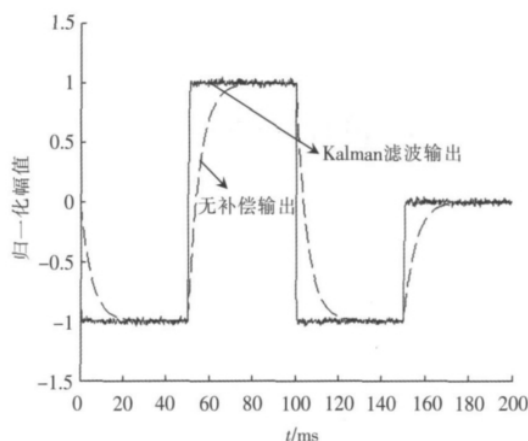


图4 方差估计的 Kalman 滤波补偿器输出信号

Fig.4 The compensator output of Kalman filtering with variance estimation

## [参考文献](References)

- [1] Wu Dehui, Huang Songling, Zhao Wei, et al. Infrared thermometer sensor dynamic error compensation using hammerstein neural network[J]. Sensors and Actuators A, 2009, 149(3): 152-158.
- [2] Yu D H, Liu F, Lai P Y. Nonlinear dynamic compensation of sensors using inverse-model-based neural network[J]. IEEE Trans Instrum Meas, 2008, 57(10): 2364-2376.
- [3] Schoen M P. Dynamic compensation of intelligent sensors[J]. IEEE Trans Instrum Meas, 2007, 56(5): 1992-2001.
- [4] Marconato A, Hu M Q, Boni A. Dynamic compensation of nonlinear sensors by a learning-from-examples approach[J]. IEEE Trans Instrum Meas, 2008, 57(8): 1689-1694.
- [5] Mehdi Jafaripana, Bashir M Al-Hashimi, Neil M White. Application of analog adaptive filters for dynamic sensor compensation[J]. IEEE Trans Instrum Meas, 2005, 54(1): 245-251.
- [6] Fitzgerald R J. Divergence of the kalman filter [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1971, 16(6): 736-747.
- [7] Xu Lijun, Zhang Jianqiu, Yan Yong. A wavelet-based multisensor data fusion algorithm [J]. IEEE Trans Instrum Meas, 2004, 53(6): 1539-1545.
- [8] 刘清, 曹国华. 模型参考和误差白化的传感器动态补偿算法[J]. 控制理论与应用, 2009, 26(3): 256-260.  
Liu Qing, Cao Guohua. Reference-model and error-whitening in dynamic compensation for sensor[J]. Control Theory and Application, 2009, 26(3): 256-260.
- [9] L A L d Almeida, Deep G S, Lima A M N, et al. A hysteretic model for a vanadium dioxide transition-edge microbolometer [J]. IEEE Trans Instrum Meas, 2001, 50(4): 1030-1035.

[责任编辑: 刘 健]