

# 基于符号判别法的逐点比较法圆弧插补算法的研究

孔逸敏 凌秀泽 徐寅林

(南京师范大学 物理科学与技术学院 江苏 南京 210046)

**[摘要]** 插补算法是数控技术的核心,最常见的算法是逐点比较法,主要是针对直线插补和圆弧插补。直线插补较为直观简单,而圆弧插补由于决定当前应该进给方向的因素很多,因而在程序编写时,需要用许多条件判断语句才能实现,程序编写可读性差、效率低。本文推导了基于符号判别法的逐点比较圆弧插补的算法公式,进一步对逐点比较法圆弧插补进行了改进,提出了改进后的符号判别法算法公式和流程图。改进后的符号判别法由于引入了标志变量,使整个插补过程更加流畅,具有程序设计简单、程序运行时间短的特点,提高了插补的效率和精度。

**[关键词]** 数控 圆弧插补 符号判别法

**[中图分类号]** TP301 **[文献标志码]** A **[文章编号]** 1672-4292(2012)02-0064-05

## Study on the Method of Comparing Circular Interpolation Spot by Spot Based on the Method of Symbol Distinguish

Kong Yimin ,Ling Xiuze ,Xu Yinlin

(School of Physics and Technology ,Nanjing Normal University ,Nanjing 210046 ,China)

**Abstract:** Interpolation technology is the core technology of machine tool's CNC system. The most common algorithm is the method of comparing spot by spot. The inadequacies of the current method is that ,the feed direction is determined by many factors in the process of writing ,many conditional statements are needed to achieve that. It is hard to program by this way and the readability of the program is poor. The paper derives the formula of the method of comparing circular interpolation spot by spot based on the method of symbol distinguish. On this basis ,the paper attempts to improve the method of comparing spot by spot ,and derives the formula of the improved method of symbol distinguish. The whole interpolation process becomes smoother by the method of adding a flag variable. The algorithm program is designed to be simple and short program run-time features and effectively improve the computation precision and efficiency.

**Key words:** CNC ,Circular interpolation ,method of symbol distinguish

机床数控系统(CNC)的核心技术是插补运算。插补是机床数控系统依据一定的控制算法控制执行部件运动,进而产生零件轮廓的过程<sup>[1-3]</sup>。插补的实质是在所需路径或轮廓上的两个已知点之间,根据某一数学函数确定其中多个中间点的位置坐标值。插补算法的优劣,直接影响 CNC 系统的性能指标<sup>[3]</sup>。

一般数控系统都具有直线和圆弧轨迹的插补功能。逐点比较法就是最常用的一种插补算法。该算法先通过逐点计算,判别出动点轨迹与给定轨迹的偏差,再根据偏差控制坐标向给定轨迹进给、逼近<sup>[3,4]</sup>。该算法每进给一步分 4 个工作节拍来逼近理论曲线,分别是偏差判别、进给控制、偏差计算和终点判别<sup>[5,6]</sup>。利用逐点比较法实现圆弧插补时,需要综合考虑是顺圆还是逆圆、动点所处象限、动点在外侧还是在内侧偏离圆弧等诸多因素后,才能决定当前步应该进给哪个坐标,新的偏差如何计算等,算法的程序设计十分繁琐,且可读性差、速度慢、效率低下。本文通过对传统逐点比较法圆弧插补算法的分析,提出了一种符号算法的判别法则,利用几个符号的逻辑算法,指导逐点比较圆弧插补中的坐标进给控制<sup>[7,8]</sup>。改进后的符号判别法插补算法具有程序设计简单、程序运行时间短的特点,提高了插补的效率和精度。

收稿日期: 2012-03-11.

基金项目: 南京师范大学 2010 年校级教改项目、南京师范大学 2011 年研究性示范课程(1812200001B84)。

通讯联系人: 徐寅林,博士,教授,研究方向: 生物医学电子学。E-mail: xuyinlin@njnu.edu.cn

## 1 传统逐点比较法圆弧插补的进给控制和偏差函数计算

为了说明传统逐点比较法圆弧插补的过程,如图1所示,以第一象限的一段逆圆弧为例,设定圆弧圆心为原点,起点为 $A(X_0, Y_0)$ ,终点为 $B(X_e, Y_e)$ ,动点为 $I(X_i, Y_i)$ ,圆弧的半径为 $R$ .

圆的方程为 $X^2 + Y^2 = R^2$ .为了表达动点 $I$ 的位置与理想圆弧之间的偏差,引入函数 $F_i = X_i^2 + Y_i^2 - R^2$ ,根据 $F_i$ 的正负号来判断动点是在圆内还是圆外<sup>[8]</sup>.

由图1可见:

$$\begin{cases} F_i > 0, & \text{动点在圆外;} \\ F_i = 0, & \text{动点在圆上;} \\ F_i < 0, & \text{动点在圆内.} \end{cases} \quad (1)$$

显然,当 $F_i \geq 0$ 时,应给进给 $-\Delta X$ ;当 $F_i < 0$ 时,应该进给 $\Delta Y$ .另外,在进给一步之后会形成新动点位置,其偏差函数 $F_{i+1}$ 的计算也分两种情况:

$$\begin{cases} F_{i+1} = (X_i - 1)^2 + Y_i^2 - R^2 = F_i - 2X_i + 1, & \text{当进给 } -\Delta X \text{ 后;} \\ F_{i+1} = X_i^2 + (Y_i + 1)^2 - R^2 = F_i + 2Y_i + 1, & \text{当进给 } \Delta Y \text{ 后.} \end{cases} \quad (2)$$

上述插补过程仅局限在第一象限的逆圆.实际的插补过程不仅有顺圆(SR)和逆圆(NR)、圆内( $F_i < 0$ )、圆外( $F_i > 0$ )之分,还有4个象限的区分(下标1-4),共计有16种情况<sup>[9]</sup>,如表1所示.任何一个条件的变化都会引起进给方向和偏差函数的相应变化.如何更有效地把这种变化归结为统一的插补过程,是提高插补效率的关键所在,由此引出一种跨象限的圆弧插补处理方法——符号判别法.

## 2 符号判别法的插补算法

在实际的插补程序设计过程中,为了决定某状态下应该进给 $\Delta X$ 还是 $\Delta Y$ ,需要对表1中的每种情况予以考虑,因而需要大量的条件判别语句.尤其是每当动点跨过象限后,它的进给方向和判别函数计算式都会发生改变,所以每进给一步就必须检查是否跨越象限,这种处理非常繁琐和麻烦.

分析表1可以发现,表格内的大部分情况实际上只有两种取值,可以用逻辑量来表示.例如偏差函数 $F$ 大于0还是小于0,可以用一个逻辑量 $F_f$ 表示,而4个象限可以用两个动点坐标 $X_i, Y_i$ 的符号位 $X_f, Y_f$ 来表示,这样表格内的任一种情况都可以归为以下各逻辑量的组合及它们的取值:

$$\begin{cases} F_f = 0, \text{当 } F_i \geq 0; & F_f = 1, \text{当 } F_i < 0; \\ N = 0, \text{逆圆}; & N = 1, \text{顺圆}; \\ X_f = 0, \text{当 } X_i \geq 0; & X_f = 1, \text{当 } X_i < 0; \\ Y_f = 0, \text{当 } Y_i \geq 0; & Y_f = 1, \text{当 } Y_i < 0. \end{cases} \quad (3)$$

为了进一步简化插补程序的设计,引入了一个新的符号变量 $P_i$ ,希望利用 $P_i$ 来指导下一步应该进给 $\Delta X$ 还是 $\Delta Y$ ,例如,若 $P_i = 0$ ,进给 $\Delta X$ ;当 $P_i = 1$ ,进给 $\Delta Y$ .而 $P_i$ 的值可以通过式(3)各逻辑量的计算来表达.

为了实现这个目的,根据表1、式(3),归纳出如表2所示的真值表.

由真值表可以得到 $P_i$ 的逻辑表达式,经化简后可得:

$$P_i = \overline{F_f} \cdot N \cdot X_f \cdot Y_f + F_f \cdot \overline{N} \cdot X_f \cdot Y_f + F_f \cdot N \cdot \overline{X_f} \cdot Y_f + \overline{F_f} \cdot \overline{N} \cdot \overline{X_f} \cdot Y_f + F_f \cdot N \cdot X_f \cdot \overline{Y_f} +$$

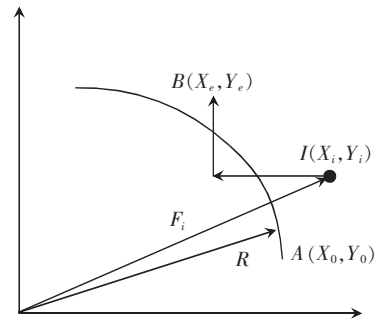


图1 第一象限圆弧逐点比较法插补示意图

Fig.1 Interpolation schematic diagram of the first quadrant arc point by point comparison

表1 逐点比较法圆弧插补算法表

Table 1 The algorithm table of point by point comparison circular interpolation

走向 及象限	进给坐标及方向		偏差计算
	$F \geq 0$	$F < 0$	
SR <sub>1</sub>	$-\Delta Y$	$+\Delta X$	$F \geq 0: F_{i+1} = F_i - 2 Y_i  + 1$
SR <sub>3</sub>	$+\Delta Y$	$-\Delta X$	
NR <sub>2</sub>	$-\Delta Y$	$-\Delta X$	
NR <sub>4</sub>	$+\Delta Y$	$+\Delta X$	$F < 0: F_{i+1} = F_i + 2 X_i  + 1$
SR <sub>2</sub>	$+\Delta X$	$+\Delta Y$	
SR <sub>4</sub>	$-\Delta X$	$-\Delta Y$	
NR <sub>1</sub>	$-\Delta X$	$+\Delta Y$	$F < 0: F_{i+1} = F_i + 2 Y_i  + 1$
NR <sub>3</sub>	$+\Delta X$	$-\Delta Y$	

$$\overline{F_f} \cdot \overline{N} \cdot X_f \cdot \overline{Y_f} + \overline{F_f} \cdot N \cdot \overline{X_f} \cdot \overline{Y_f} + F_f \cdot \overline{N} \cdot \overline{X_f} \cdot Y_f = F_f \oplus N \oplus X_f \oplus Y_f, \quad (4)$$

表 2 进给判别位  $P_i$  的真值表

Table 2 The truth table of  $P_i$

输入变量					输出	输入变量					输出	输入变量					输出
$F_f$	$N$	$X_f$	$Y_f$	$P_i$		$F_f$	$N$	$X_f$	$Y_f$	$P_i$		$F_f$	$N$	$X_f$	$Y_f$	$P_i$	
0	0	0	0	0		0	1	1	0	0		1	1	0	0	0	
0	0	0	1	1		0	1	1	1	1		1	1	0	1	1	
0	0	1	0	1		1	0	0	0	1		1	1	1	0	1	
0	0	1	1	0		1	0	0	1	0		1	1	1	1	0	
0	1	0	0	1		1	0	1	0	0							
0	1	0	1	0		1	0	1	1	1							

由此把表 1 所示的 16 种情况统一成了一个符号判别式. 例如, 表 1 内  $SR_1$  行  $F \geq 0$  情况. 根据式(3)可知  $F_f = 0, N = 1, X_f = 0, Y_f = 0$ . 通过式(4) 计算可得  $P_i = 1$ , 也即应进给  $\Delta Y = 1$  这一步. 这完全符合表 1 所述结果.

至于已经决定了进给  $\Delta X$  还是进给  $\Delta Y$ , 但应该进给正方向还是负方向, 还可引入另外两个符号量  $\Delta X_f, \Delta Y_f$ . 当需要进给  $+\Delta X$  时, 期望计算得到  $\Delta X_f = 0$ ; 相反的进给  $-\Delta X$  时, 期望计算得到  $\Delta X_f = 1, \Delta Y_f$  的情况与  $\Delta X_f$  相同. 用类似方法可求出:

$$\begin{cases} \Delta X_f = \overline{N \oplus Y_f}, \\ \Delta Y_f = N \oplus X_f. \end{cases} \quad (5)$$

计算机具有很强的逻辑位算法能力. 因此通过式(4)、(5) 计算符号  $P_i, \Delta X_f, \Delta Y_f$  的值来判断需要进给的坐标轴及方向, 不仅省去大量的条件语句的判断, 使程序风格简洁、可读性强, 也大大提高了算法速度, 提高了效率.

### 3 基于符号判别法的逐点比较圆弧插补算法的改进

由图 1 可见, 传统的逐点比较法圆弧插补是采取进给单步的方式, 即要么进给  $\Delta X$ , 要么进给  $\Delta Y$ . 这种单步进给的速度和精度都不高. 考虑到与  $X$  轴夹角小于  $45^\circ$  的动点  $Y$  方向变化较快, 因此每次进给时,  $Y$  方向一定要进给一步  $\Delta Y$ , 而是否进给  $\Delta X$  则要根据  $P_i$  的计算值来决定. 对于大于  $45^\circ$  的动点  $X$  方向变化比较快, 每次进给时,  $X$  方向一定要进给一步  $\Delta X$ , 而是否进给  $\Delta Y$  则要根据  $P_i$  的计算值来决定<sup>[1]</sup>. 也即解决这一问题的方法就是采用  $\Delta X, \Delta Y$  方向同时进给代替  $\Delta X$  或  $\Delta Y$  的单向进给.

如图 2 所示, 动点在  $45^\circ$  以上还是以下可根据该点坐标值的绝对值大小判定. 在传统圆弧插补计算判断应该进给  $\Delta X$  时, 可改为:

$$\begin{cases} \Delta X, & \text{若 } |X_i| < |Y_i|, \\ \Delta X + \Delta Y, & \text{若 } |X_i| \geq |Y_i|. \end{cases} \quad (6)$$

在传统圆弧插补计算判断应该进给  $\Delta Y$  时, 可改为:

$$\begin{cases} \Delta Y, & \text{若 } |X_i| \geq |Y_i|, \\ \Delta X + \Delta Y, & \text{若 } |X_i| < |Y_i|. \end{cases} \quad (7)$$

这样改进后, 不仅加快了插补算法的速度, 由图 2 可见也减少了插补的误差.

为了利用符号的逻辑计算来决定到底是单向进给还是双向进给, 再引入一个判断变量  $K$ . 若  $K = 0$ , 则单向进给, 反之则双向进给. 显然  $K$  的取值是由  $P_i$  和  $|X_i|$  与  $|Y_i|$  的大小情况共同决定的. 为了区分  $|X_i|$  与  $|Y_i|$  的大小, 引入变量  $J$ , 并设:

$$\begin{cases} J = 0, & |X_i| \geq |Y_i|, \\ J = 1, & |X_i| < |Y_i|. \end{cases} \quad (8)$$

根据式(6)、(7) 中  $P_i$  和  $J$  决定  $K$  取值的情况, 归纳出一张卡诺图, 如图 3 所示. 根据卡诺图得出关系式:

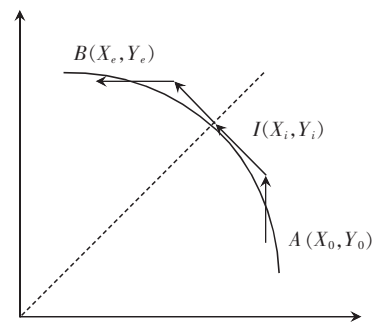


图 2 改进型逐点比较圆弧插补算法

Fig.2 The algorithm of improved point by point comparison circular interpolation

$$K = \overline{J} \overline{P_i} + J P_i = J \oplus P_i. \quad (9)$$

根据以上所引入的变量, 可以把改进后的圆弧插补流程图归纳为图 4.

为了进一步观察改进后的圆弧插补法的优点, 以第一象限的一段逆圆弧  $AB$  为例, 起始坐标  $A(6, 0)$ , 终点坐标  $B(0, 6)$ , 对逐点比较法的圆弧插补轨迹和改进后的圆弧插补轨迹进行比较, 如图 5、图 6 所示.

通过观察图 5 和图 6, 可以发现, 改进后的圆弧插补在某一方向的速度进给比较均匀, 改善了系统的动态性能, 提高了插补精度, 可使理论误差小于一个脉冲当量.

$J \backslash P_i$	0	1
0	1	0
1	0	1

图 3  $K$  与  $P_i, J$  逻辑关系卡诺图

Fig.3 The logical relationship Karnaugh map of  $K, P_i$  and  $J$

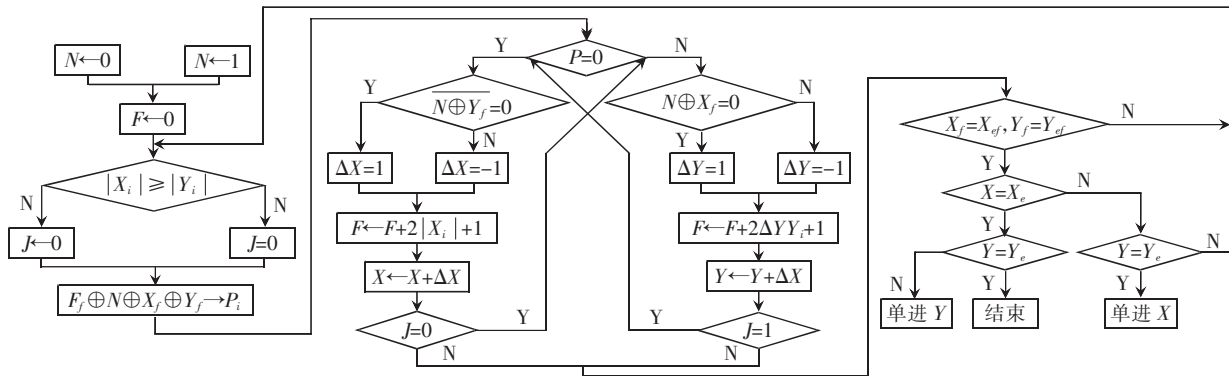


图 4 改进后的圆弧插补流程图

Fig.4 The improved circular interpolation flowchart

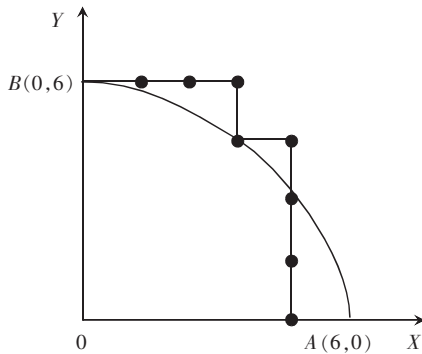


图 5 逐点比较法圆弧插补轨迹

Fig.5 Circular interpolation trajectory of point by point comparison

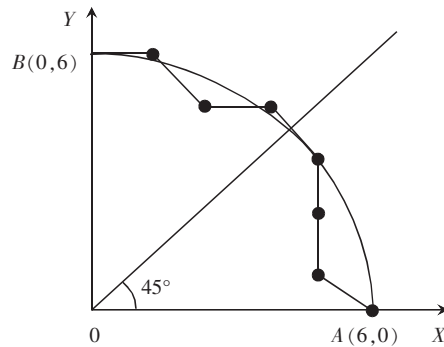


图 6 改进后的圆弧插补轨迹

Fig.6 The improved circular interpolation trajectory

## 4 结论

针对传统的逐点比较法, 圆弧插补算法需要大量的条件判断, 不利于插补程序的设计和插补速度的提高. 本文提出并推导了借助符号判定进给坐标的逻辑表达式. 在此基础上, 对逐点比较法圆弧插补进行了改进, 并给出了改进后的符号判别法算法公式. 本文提出的符号判别法插补算法大大方便了插补程序的设计, 也提高了插补的效率和精度.

### [参考文献] (References)

- [1] 杨帆, 廖知, 肖贝, 等. 改进插补算法在数控雕刻系统中的应用[J]. 华中科技大学学报: 自然科学版, 2011, 39(2): 27-31.  
Yang Fan, Liao Zhi, Xiao Bei, et al. Application of improved interpolation algorithm in numerical control engraving systems[J].

- Journal of Huazhong University of Science and Technology: Natural Science Edition 2011, 39(2): 27-31. (in Chinese)
- [2] 范希营, 郭永环. 数控系统差值比较法圆弧插补算法的研究[J]. 机械科学与技术 2011, 30(5): 789-792.  
Fan Xiyang, Guo Yonghuan. A difference comparison method for circular interpolation in computer numerical control(CNC) systems[J]. Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering, 2011, 30(5): 789-792. (in Chinese)
- [3] 唐慧锋. 改进逐点比较法圆弧插补的研究与仿真[J]. 微机计算机信息 2006, 22(15): 240-241.  
Tang Hui Feng. Research and simulation of improving point by point comparison method circular arcs interpolation[J]. Micro-computer Information 2006, 22(15): 240-241. (in Chinese)
- [4] 郭方圣, 魏修亭. 基于逐点比较法的渐开线插补方法[J]. 组合机床与自动化加工技术 2011(8): 30-34, 38.  
Guo Fangsheng, Wei Xiuting. Involute interpolation algorithm based on point-to-point comparison method[J]. Modular Machine Tool and Automatic Manufacturing Technique, 2011(8): 30-34, 38. (in Chinese)
- [5] 陈东海, 牛景丽, 刘进钱. CNC系统数据采样插补的新算法[J]. 制造业自动化 2009, 31(9): 195-198.  
Chen Donghai, Niu Jingli, Liu Jinqian. New algorithm methods of data sampling interpolation for CNC system[J]. Manufacturing Automation, 2009, 31(9): 195-198. (in Chinese)
- [6] 吴晓舒. 逐点比较圆弧轨迹插补在过象限时用符号判别法的分析[J]. 机电工程 2002, 19(5): 6-8.  
Wu Xiaoshu. To analyse the method of symbol distinguish when the arc trackinsert pass through quadrant with the method of comparing spot by spot[J]. Mechanical and Electrical Engineering Magazine, 2002, 19(5): 6-8. (in Chinese)
- [7] 王兰香. 基于可编程定时器/计数器的数控精插补点路[J]. 机电产品开发与创新 2007, 20(1): 203-204.  
Wang Lanxiang. The fine interpolation circuit based on the counter/timer[J]. Development and Innovation of Machinery and Electrical Products, 2007, 20(1): 203-204. (in Chinese)
- [8] 吴黎明. 数字控制技术[M]. 北京: 科学出版社 2009.  
Wu Liming. Numerical Control Technology[M]. Beijing: Science Press, 2009. (in Chinese)
- [9] 权秀敏, 尹显明. 一种简捷的快速圆弧插补新算法的设计与计算[J]. 机械研究与应用 2008, 21(1): 81-83.  
Quan Xiumin, Yin Xianming. A new simple rapid algorithm of circular interpolation[J]. Mechanical Research and Application, 2008, 21(1): 81-83. (in Chinese)

[责任编辑: 严海琳]