

一种新的海水渗流模型及其数值算法

陈秀华

(福建船政交通职业学院公共教学部, 福建 福州 350007)

[摘要] 反常扩散通常用于模拟物理、金融和水文等各种现象, 整数阶扩散方程不能准确地模拟这类反常扩散过程. 本文研究了溶质入侵地下水层的特征, 建立了海水渗入地下水层的反常扩散模型, 将整数阶的导数用分数阶导数来替换, 利用差分离散建立此模型的数值算法, 证明了算法的收敛性, 并给出数值例子, 通过计算机模拟表明算法的有效性.

[关键词] 反常扩散, 数学模型, 数值模拟

[中图分类号] TB115 [文献标志码] A [文章编号] 1672-1292(2013)03-0089-04

A New Mathematical Model and Numerical Simulation for Sea Water Intrusion into Coastal Aquifers

Chen Xiuhua

(Department of Basic Courses, Fujian Chuanzheng Communications College, Fuzhou 350007, China)

Abstract: Anomalous diffusion has been applied to many problems in physics, finance and hydrology. Integer differential equations cannot correctly simulate the anomalous diffusion phenomena. In this paper, the characteristic of solutes transport in groundwater is described. We give a new mathematical model for saltwater intrusion into coastal aquifers replacing the integral derivative by a fractional derivative. We derive the numerical algorithm for the mathematical model by using difference discrete. Convergence of the algorithm is proved. Finally, numerical example is presented to show the effectiveness of this algorithm.

Key words: anomalous diffusion, mathematical model, numerical simulation

在自然界和工程技术领域中出现许多扩散现象, 如不规则固体、溶解微胞中的电子传输、石油渗流、地下水传输或者是多孔玻璃中的扩散等, 这些现象不遵循 Fick 定律, 尤其在海水入侵地下水层的运动中, 溶质在入侵地下水层时具有长尾性态. 这种不规则的扩散被称作反常扩散. 经典的 Fick 定律是用来讨论扩散现象的宏观规律, 如扩散物质的浓度分布与时间的关系. 而反常扩散过程本质上是时间上有记忆性和空间非局域性的过程, 而整数阶导数极限定义具有局域性, 因此整数阶扩散方程不能准确地描述这类反常扩散过程.

分数阶偏微分方程是经典的整数阶偏微分方程的推广, 它是将整数阶的导数用分数阶导数来替换, 这类方程已在物理、工程领域及环境问题的研究方面得到了广泛的运用^[1-4]. 因此, 对它的研究也引起了广泛的关注. 分数阶微分方程与整数阶微分方程相比, 其最重要的优势在于它能更好地拟合自然物理过程和动态系统过程. 比如, 当一种微粒的扩散传播速率与古典的布朗运动模式不一致时, 分数阶导数在模拟这种微粒异常运动时起了非常关键的作用, 在扩散空间模型中, 用分数阶导数代替空间扩散二阶导数, 将导致更强的扩散. 本文就海水入侵地下水层建立一种新的数学模型, 并建立此模型的差分算法, 证明了算法的收敛性, 利用计算机模拟该偏微分系统的形态生成并与整数阶的系统进行比较, 发现此模型能更精确地模拟具有长尾性态的溶质运动过程.

1 海水渗流模型的建立

1.1 问题的描述

研究表明, 海水入侵地下水层用传统的扩散方程难以体现溶质在入侵地下水层的长尾性态. 本文将建

收稿日期: 2013-03-27.
基金项目: 福建省教育厅科技项目(JA10284)、2010 年福建省交通科技发展项目(201011).
通讯联系人: 陈秀华, 副教授, 研究方向: 数学建模及计算机优化算法的研究. E-mail: xhchen_fz@qq.com

立新型反常扩散方程来模拟海水渗流的运动,对此模型提出一种差分算法,将此偏微分方程转化成常微分系统,利用自动变阶(1~5 阶)变步长的向后差分方法求解.

1.2 海水渗流的数学模型

对海水渗流入侵地下水层建立如下反常模型:

$$\begin{cases} {}_0D_t^\alpha u(x,t)+\mu u(x,t)=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+Kf(x,t), & 0<\alpha\leq 1,0\leq x\leq L,0\leq t\leq T, \\ u(x,0)=\phi(x), & 0\leq x\leq L, \\ u(0,t)=u(L,t)=0, & 0\leq t\leq T, \end{cases} \tag{1}$$

其中, $k、\mu>0$ 是常数, $\phi(x)、f(x,t)$ 为充分光滑的已知函数, ${}_0D_t^\alpha u(x,t)$ 为关于 Caputo 导数,定义如下^[1]:

$${}_0D_t^\alpha u(x,t)=\begin{cases} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t\frac{\partial u(x,\eta)}{\partial \eta}\frac{d\eta}{(t-\eta)^\alpha}, & 0<\alpha<1, \\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, & \alpha=1, \end{cases} \tag{2}$$

其中, Γ 为 Gamma 函数.

将区间 $[0,L]$ 均匀分为 M 个等分,空间步长 $h=L/M$,记 $\omega_h\equiv\{x_i|0\leq i\leq M\}$,则 $x_i=ih(0\leq i\leq M)$,再设 $\bar{\omega}_\tau=\{t_n|n\geq 0\},t_n=n\tau,\tau>0,\tau$ 为时间步长.

假定 $u^n=\{u_i^n|0\leq i\leq M,n\geq 0\}$ 是在 $\omega_h\times\omega_\tau$ 上的网格函数,以下引入一些记号:

$$u_i^{n-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(u_i^n+u_i^{n-1}),\quad \delta_t u_i^{n-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\tau}(u_i^n-u_i^{n-1}),\quad \delta_x u_{i-\frac{1}{2}}^n=\frac{1}{h}(u_i^n-u_{i-1}^n),\quad \delta_x^2 u_i^n=\frac{(u_{i+1}^n-2u_i^n+u_{i-1}^n)}{h^2}.$$

2 数值模拟的差分算法

2.1 差分算法的建立

由于很难求得式(1)的精确解,本文将建立式(1)相应的差分算法,利用计算机编程求得近似解.为方便起见,记 $U_i^n=u(x_i,t_n)$ 为方程(1)的精确解,记 $f_i^n=f(x_i,t_n),\phi_i=\phi(x_i)$.

由文献[5]可知:

$${}_0D_t^\alpha u(x,t)|_{x_i}^{t_n}=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{1}{\tau}\big[b_0U_i^n-\sum_{k=1}^{n-1}(b_{n-k-1}-b_{n-k})U_i^k-b_{n-1}U_i^0\big]+O(\tau^{2-\alpha}), \tag{3}$$

其中 $1\leq i\leq M-1,n\geq 1$,

且

$$b_l\equiv\frac{1}{1-\alpha}\big[(t_{l+1})^{1-\alpha}-(t_l)^{1-\alpha}\big]=\frac{\tau^{1-\alpha}}{1-\alpha}\big[(l+1)^{1-\alpha}-l^{1-\alpha}\big],l>0. \tag{4}$$

用中心差商离散 $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$,即

$$\left.\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x_i}^{t_n}=\frac{U_{i+1}^n-2U_i^n+U_{i-1}^n}{h^2}+O(h^2)=\delta_x^2 U_i^n+O(h^2). \tag{5}$$

由式(3)和(5)可得方程(1)等价于另一形式:

$$\begin{cases} -\frac{1}{h^2}U_{i+1}^n+\bigg[\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{1}{\tau}b_0+\mu+\frac{2}{h^2}\bigg]U_i^n-\frac{1}{h^2}U_{i-1}^n= \\ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{1}{\tau}\bigg[\sum_{k=1}^{n-1}(b_{n-k-1}-b_{n-k})U_i^k+b_{n-1}U_i^0\bigg]+Kf_i^n+c_1(h^2+\tau^{2-\alpha}), & 0<\alpha\leq 1, \\ U_i^0=\phi_i, & 0\leq i\leq M, \\ U_0^n=U_M^n=0, & n\geq 1, \end{cases} \tag{6}$$

其中, $\mu>0,k>0,c_1$ 为与 τ 和 h 无关的常数, $b_l(l>0)$ 定义由式(4)给出.

令 $\mu=1,k=1$,从而可对方程(1)建立如下的差分算法:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\Gamma(1-\alpha)\tau}{h^2}u_{i+1}^n + \left[b_0 + \Gamma(1-\alpha)\tau + \frac{2\Gamma(1-\alpha)\tau}{h^2} \right] u_i^n - \frac{\Gamma(1-\alpha)\tau}{h^2}u_{i-1}^n = \\ \quad \left[\sum_{k=1}^{n-1} (b_{n-k-1} - b_{n-k})u_i^k + b_{n-1}u_i^0 \right] + \Gamma(1-\alpha)\tau f_i^n, \\ u_i^0 = \phi_i, \\ u_0^n = u_M^n = 0, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 0 < \alpha \leq 1, \\ 0 \leq i \leq M, \\ n \geq 1, \end{array} \quad (7)$$

其中, $b_i (i > 0)$ 定义由式(4)给出.

2.2 算法的收敛性证明

引理 设 u^n 是如上定义的网格函数, 若 $u_0^n = 0$ 及 $u_M^n = 0$, 则有:

$$\|u^n\|_{\infty} \leq \frac{\sqrt{L}}{2} \|\delta_x u^n\|.$$

证明 见文献[6].

设 $U_i^n = u(x_i, t_n)$ 为方程(1)的精确解, 记 u_i^n 为方程(7)的解.

若设 $e_i^n = U_i^n - u_i^n$, 并假设初始没有误差, 则有:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{1}{\tau} [b_0 e_i^n - \sum_{k=1}^{n-1} (b_{n-k-1} - b_{n-k}) e_i^k] + \mu e_i^n = \delta_x^2 e_i^n + C(h^2 + \tau^{2-\alpha}), \\ e_i^0 = 0, \\ e_0^n = e_M^n = 0, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 1 \leq i \leq M-1, n \geq 1, \\ 0 \leq i \leq M, \\ n \geq 1. \end{array} \quad (8)$$

这里 C 是与 h, τ 无关的常数.

易得:

$$\begin{aligned} \tau \sum_{n=1}^m \|\delta_x e^n\|^2 &\leq \frac{\Gamma(1-\alpha)\tau}{2[\tau_m^{-\alpha} + 2\mu\Gamma(1-\alpha)]} \sum_{i=1}^{M-1} [h \sum_{n=1}^m C^2(h^2 + \tau^{2-\alpha})^2] = \\ &\frac{\Gamma(1-\alpha)\tau m}{2[\tau_m^{-\alpha} + 2\mu\Gamma(1-\alpha)]} h(M-1) C^2(h^2 + \tau^{2-\alpha})^2 \leq \frac{TL C^2}{4\mu} (h^2 + \tau^{2-\alpha})^2. \end{aligned} \quad (9)$$

令 $C_1 = \frac{TL C^2}{4\mu} > 0$ 为与 h, τ 无关的常数, 从而由式(9)得

$$\tau \sum_{n=1}^m \|\delta_x e^n\|^2 \leq C_1 (h^2 + \tau^{2-\alpha})^2.$$

又根据引理可得

$$\|e^n\|_{\infty} \leq \frac{\sqrt{L}}{2} \|\delta_x e^n\|,$$

所以

$$\sqrt{\tau \sum_{n=1}^m \|e^n\|_{\infty}^2} \leq \frac{\sqrt{L}}{2} \sqrt{\tau \sum_{n=1}^m \|\delta_x e^n\|^2} \leq \frac{\sqrt{LC_1}}{2} (h^2 + \tau^{2-\alpha}).$$

令 $C_2 = \frac{\sqrt{LC_1}}{2}$, 就有

$$\sqrt{\tau \sum_{n=1}^m \|e^n\|_{\infty}^2} \leq C_2 (h^2 + \tau^{2-\alpha}),$$

其中, C_2 为与 τ 和 h 无关的常数.

在上式中, 令 $\tau \rightarrow 0, h \rightarrow 0$, 则 $\sqrt{\tau \sum_{n=1}^m \|e^n\|_{\infty}^2} \rightarrow 0$, 说明差分格式(7)是无条件收敛的.

3 计算实例及结果

本文将给出有限区域上的一个数值例子, 计算结果表明, 本文所给出的差分算法(7)是可行的.

$$\begin{cases} {}_0D_t^{0.7}u(x,t)+u(x,t)=\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x^2}+f(x,t), & 0\leq x\leq 2,t\geq 0, \\ u(x,0)=0, & 0\leq x\leq 2, \\ u(0,t)=u(2,t)=0, & t\geq 0, \end{cases}$$

这里,

$$f(x,t)=\frac{2}{\Gamma(2.3)}x(2-x)t^{1.3}+t^2x(2-x)+2t^2.$$

可知,此方程的精确解为 $u(x,t)=t^2x(2-x)$.

表 1 给出了当 $\alpha=0.7,t=1$ 时,取不同的时间步长 τ 和空间步长 h 时,数值解与精确解之间的比较,可以发现这两者相当吻合.

表 1 当 $\alpha=0.7,t=1$ 时数值解与精确解的比较

Table 1 Comparisons of exact solution and numerical solution when $\alpha=0.7,t=1$

$(X,1)$	$M=N=40$	$M=N=80$	$M=N=160$	$M=N=320$	精确解
0.200 0	0.360 443 19	0.360 180 65	0.360 073 53	0.360 029 90	0.360 000 00
0.400 0	0.640 836 14	0.640 340 84	0.640 138 74	0.640 056 42	0.640 000 00
0.600 0	0.841 141 63	0.840 465 38	0.840 189 44	0.840 077 04	0.840 000 00
0.800 0	0.961 334 55	0.960 544 03	0.960 221 46	0.960 090 06	0.960 000 00
1.000 0	1.001 400 43	1.000 570 90	1.000 232 39	1.000 094 51	1.000 000 00
1.200 0	0.961 334 55	0.960 544 03	0.960 221 46	0.960 090 06	0.960 000 00
1.400 0	0.841 141 63	0.840 465 38	0.840 189 44	0.840 077 04	0.840 000 00
1.600 0	0.640 836 14	0.640 340 84	0.640 138 74	0.640 056 42	0.640 000 00
1.800 0	0.360 443 19	0.360 180 65	0.360 073 53	0.360 029 90	0.360 000 00

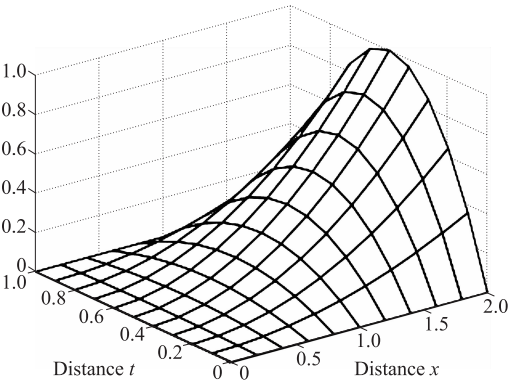


图 1 精确解的图形
Fig.1 Exact solution image

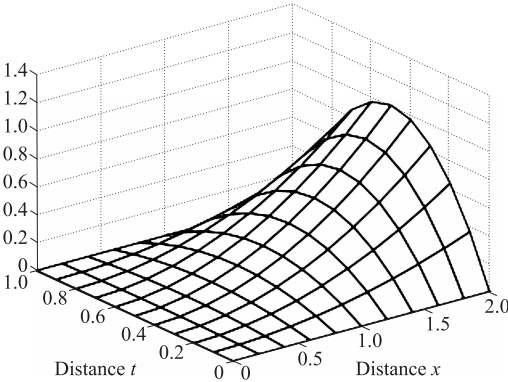


图 2 数值解的图形
Fig.2 Numerical solution image

4 结语

本文给出了海水渗流入侵地下水层的一种新的反常扩散模型,建立此模型的数值模拟差分算法,证明了算法的收敛性,并给出了数值例子验证算法的准确性,将其与整数阶的系统进行比较,发现此模型能更精确地模拟此类溶质运动过程.

[参考文献] (References)

[1] Huang F,Liu F. The time fractional diffusion equation and advection-dispersion equation[J]. ANZIAM J,2005,46:317-330.

[2] Su N,Sander G,Liu F,et al. Similarity solution of Fokker-Planck equation with time- and scale-dependent dispersivity for solute transport in fractal porous media[J]. Applied Mathematical Modelling,2005,29:852-870.

[3] Huang H,Liu F. The space-time fractional diffusion equation with Caputo derivatives[J]. J Appl Math Computing,2005,19: 233-245.

[4] Huang H,Liu F. The fundamental solution of the space-time fractional advection equation[J]. J Appl Math Computing,2005, 18:339-350.

[5] Sun Z Z,Wu X N. A fully discrete difference scheme for a diffusion-wave system[J]. Applied Numerical Mathematic,2006, 9(4):333-349.

[6] 胡健伟,汤怀民. 微分方程数值解法[M]. 北京:科学出版社,1999.

Hu Jianwei,Tang Huaimin. The Numerial Solution of Differential Equation[M]. Beijing:Science Press,1999. (in Chinese)

[责任编辑:严海琳]