

一个新三维混沌系统及其电路实现

王珠林, 闵富红, 彭光娅, 王耀达

(南京师范大学电气与自动化学院, 江苏 南京 210042)

[摘要] 提出一种新型的三维混沌系统,对系统的动力学特性进行了深入分析.通过数值仿真,绘出了新系统的相轨迹图、功率谱图、分岔图、Lyapunov 指数谱等,并发现新系统存在共存现象.改变系统初始值大小,系统表现出的多种不同稳态的现象,证明了新系统存在丰富的共存现象,但是不会一直存在,它将随着参数的变化而消失.最后,利用电路仿真软件 Multisim 对新系统进行仿真实验,仿真实验与理论分析结论十分吻合,证实了本文提出的新混沌系统电路在物理上是可以实现的.

[关键词] 电路仿真,混沌系统,动力学行为,混沌电路

[中图分类号]TP391.9 **[文献标志码]**A **[文章编号]**1672-1292(2016)01-0001-08

A Three Dimension Chaotic System and Its Circuit Realization

Wang Zhulin, Min Fuhong, Peng Guangya, Wang Yaoda

(School of Electrical and Automation Engineering, Nanjing Normal University, Nanjing 210042, China)

Abstract: In this paper, a new chaotic system is proposed and the dynamic characteristics of the system are analyzed through the phase trajectories of the new system, the power spectrum, bifurcation diagram, and Lyapunov exponent spectra, and the existence of the new system coexistence is discovered. With the different initial values, the system has shown that the coexistence of different motions disappears with the change of parameters. Finally, the circuit simulation results are in agreement with the numerical simulation which proves that the new chaotic system circuit is physically achievable.

Key words: circuit simulation, chaotic system, dynamical behavior, chaotic circuit

混沌作为非线性动力学系统中特有的一种运动形式,由于其具有对初始条件极端敏感性和内在随机性等特征,使其在通信、电子、信息处理等科学领域引起了人们广泛的关注^[1].早在1963年,Lorenz意外地发现了第一个混沌吸引子^[2].此后,随着混沌研究的发展,新型的混沌系统开始不断地被发现.1976年,Rössler O E 教授提出了 Rössler 混沌系统^[3],新系统比 Lorenz 系统简单、且拥有不同于 Lorenz 系统的拓扑结构.1986年,Chua L O 教授提出了 Chua's 电路^[4],它是迄今为止最为简单并且有效的混沌振荡电路之一.1999年,陈关荣提出了 Chen 系统^[5-6],随后吕金虎、陈关荣接着又提出了 Lü 混沌系统^[7].此后,不断产生新型的混沌系统,有 Liu 混沌系统^[8-9]、Qi 混沌系统^[10]、超混沌 Lü 系统^[11]、具有反正切函数的三维连续混沌系统^[12]、含有一个非线性乘积项的四维超混沌系统^[13]、拥有恒定 Lyapunov 指数谱的新混沌系统^[14]、产生多翼的四维混沌系统^[15]以及新的五维变形 Chua's 混沌系统^[16].随着人们对混沌系统的不断探索,对其基本特性和动力学行为的逐渐了解,混沌在工程领域的应用已取得了一定进展.在保密通信^[17]、电网动态分析和保护^[18]、电子振荡发生器设计、发电机的故障诊断^[19]等方面得到了有效的应用.在这些应用中,我们需要将混沌理论不断发展和完善,混沌也必将会在更多领域里得到广泛的应用.

本文提出一个含有4个非线性项的新型三维自治混沌系统,通过分析系统的相轨迹图、功率谱图、分岔图、Lyapunov 指数谱等验证了系统的混沌特性.分析了不同初始值下系统的稳态的现象,发现新系统存在一定参数范围内存在周期与周期、周期与混沌的共存运动.最后,设计合适的电路图,并利用电路软件 Multisim 模拟仿真,证明了本文提出的新系统电路在物理上是可以实现的,为将来在实现多功能混沌

收稿日期:2015-12-08.

基金项目:江苏省自然科学基金(BK20131402).

通讯联系人:闵富红,博士,副教授,研究方向:非线性电路与系统. E-mail: minfuhong@njnu.edu.cn

信号发生器、大容量动态信息存储器以及信息识别与记忆等应用奠定了基础。

1 新型混沌系统的基本分析

1.1 新混沌系统模型

本文提出的新三维自治混沌系统在对经典洛伦兹混沌系统进行深入研究的基础上提出的,是对大气对流问题模型的简化,其数学模型描述为:

$$\begin{cases} dx/dt = -ax + 6.7y + yz, \\ dy/dt = -0.5xz + rx - by, \\ dz/dt = 0.8xy - cz + 0.5yz. \end{cases} \quad (1)$$

式中, a, b 和 c 为实常数. 通过反复的数值仿真发现,当选取参数 $a=12.5, b=0.125, c=1.72$ 和 $r=45$ 时,系统存在一个典型的混沌吸引子,如图1所示.

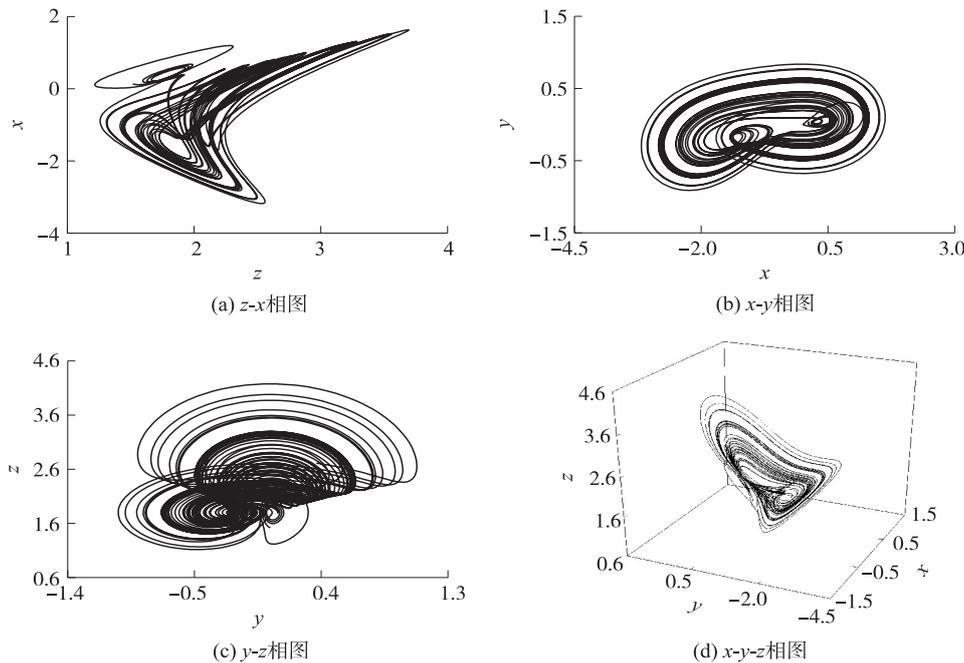


图1 新系统的混沌吸引子

Fig.1 The chaotic attractors of the new system

1.2 动力学特性分析

1) 耗散性和吸引子的存在性

由于

$$\Delta V = \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} = -a - b - c, \quad (2)$$

当 $a=12.5, b=0.125, c=1.72$ 时, $\Delta V = -(a+b+c) < 0$, 所以系统(1)是耗散的, 且以如下指数形式收敛:

$$dV/dt = e^{-(a+b+c)}, \quad (3)$$

可见, 体积元 V_0 在时刻 t 时收缩为体积元 $V_0 e^{-(a+b+c)t}$. 当时间 $t \rightarrow \infty$ 时, 包含系统轨道的每个体积元都会以指数率 $-(a+b+c)$ 收缩到零. 因此, 系统所有的轨迹运动都在一个体积为零的集合上面, 并且渐近运动固定到一个吸引子上.

2) 平衡点及稳定性

令非线性系统方程(1)的右边等于零, 得到:

$$\begin{cases} -ax + 6.7y + yz = 0, \\ -0.5xz + rx - by = 0, \\ 0.8xy - cz + 0.5yz = 0. \end{cases} \quad (4)$$

求解方程(4)可得系统的五个实平衡点, 分别为 $P_0(0, 0, 0), P_1(-75.930, -9.818, 89.967), P_2(0.009,$

3.447, -6.667), $P_3(4.158, 1607.923, -6.667)$, $P_4(19.700, 2.547, 89.967)$. 在平衡点 $P_0(0, 0, 0)$ 处, 将系统(1)进行线性化后, 可得到其雅可比矩阵 J_0 为:

$$J_0 = \begin{bmatrix} -a & 6.7+z & y \\ 45-0.5z & -b & -0.5x \\ 0.8y & 0.8x+0.5z & -c+0.5y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12.5 & 6.7 & 0 \\ 45 & -0.125 & 0 \\ 0 & 0 & -1.72 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

则特征方程为

$$|\lambda I - J_0| = 0. \quad (6)$$

解得其特征值为 $\lambda_1 = -1.7200, \lambda_2 = -24.7458, \lambda_3 = 12.1208$. 由于特征值 λ_1, λ_2 为负实数, λ_3 为正实数, 因此平衡点 $P_0(0, 0, 0)$ 是一个不稳定的鞍点; 同理, 在平衡点 P_1 处, 可求得其特征值为 $\lambda_1' = 11.358 + 3.050i, \lambda_2' = 11.358 - 3.050i, \lambda_3' = -41.867$; 在平衡点 P_2 处可求得特征值为 $\lambda_1'' = 1.473 + 5.765i, \lambda_2'' = 1.473 - 5.765i, \lambda_3'' = -15.566$, 其中 λ_1', λ_2' 与 λ_1'', λ_2'' 是实部为正的共轭复根, λ_3', λ_3'' 为负实根. 因此, 平衡点 P_1 和 P_2 是两个不稳定的鞍焦点; 在平衡点 P_3 处, 采用同样方法可得 $P_3(4.158, 1607.923, -6.667)$ 处的特征值为 $\lambda_1''' = 1218.003, \lambda_2''' = -0.122, \lambda_3''' = -713.162$, 因此平衡点 P_3 是一个不稳定的鞍点; 同样可得 P_4 处的特征值为 $\lambda_1^{(4)} = 21.52, \lambda_2^{(4)} = 2.14, \lambda_3^{(4)} = -36.74$, 因此平衡点 P_4 也是一个不稳定的鞍点. 根据上述分析的平衡点稳定性可知, 系统(1)的五个平衡点都是不稳定的, 满足该系统存在混沌特性的条件.

1.3 时域波形图、功率谱图

混沌系统的时域波形具有非周期性, 并且对初始值具有很强的敏感性. 当系统(1)处于混沌时, 令系统(1)的初始值 $x_0=0.66, y_0=-0.32, z_0=3.01$, 当改变初始值 $x_0=0.66+0.0001$ 时, 其余初始值保持不变, 得到的初始值敏感特性如图 2 所示. 从图 2 中可以看出, 时序波形大约在 $t=2.7$ s 后完全不同. 功率谱如图 3 所示, 可见包含有很多峰值谱线, 说明了系统(1)具有很好的随机特性.

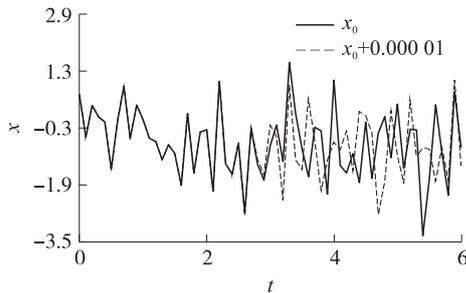


图2 对初值的敏感性

Fig.2 The initial value of the sensitivity of the system

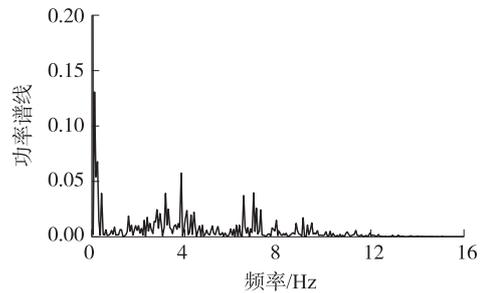


图3 功率谱

Fig.3 The power spectrum of the system

2 系统参数的影响

当系统参数发生改变时, 系统平衡点的稳定性也将发生相应的变化, 系统的运动状态也会随之改变. 下面通过对系统分岔图和 Lyapunov 指数谱(LE 谱)的分析, 直观地研究系统在参数改变时, 其运动状态的变化情况.

固定系统参数 $a=12.5, b=0.125, c=1.72$ 改变参数 r . 初始值 $[0.1, -0.1, 0.1]$, 当参数 $r \in (10, 110)$ 变化时, 系统关于 x 的分岔以及 LE 谱如图 4 所示, 其中数值仿真步长取为 0.005, 图 4(a) 是状态变量 x 随参数 r 变化的分岔图, 图 4(b) 是系统随参数 r 变化的 LE 谱. 如果系统(1)的最大 LE 小于零, 那么此时系统处于周期运动状态; 如果系统(1)的最大 LE 大于零, 则此时系统处于混沌运动状态. 从图 4(a) 中可以看出, 当 $r \in (0, 23.25)$ 和 $r \in (104.86, 110)$ 时, 系统处于周期 1 运动; 当 $r \in (89.02, 103.45)$ 和 $r \in (102.80, 104.04)$ 时, 系统处于周期 2 运动; 当 $r \in (104.04, 104.86)$ 时, 系统处于周期 3 运动; 当 $r \in (85.65, 89.02)$ 时, 系统处于周期 4 运动; 当 $r \in (84.63, 85.65)$ 时, 系统处于周期 8 运动; 当 $r \in (27.37, 60.17), r \in (60.93, 78.60)$ 和 $r \in (79.12, 84.48)$ 时系统处于混沌运动, 此时系统的最大 LE 大于零. 当 $r > 110$ 时, 系统将趋于稳定不动点, 此时系统的最大 LE 小于零.

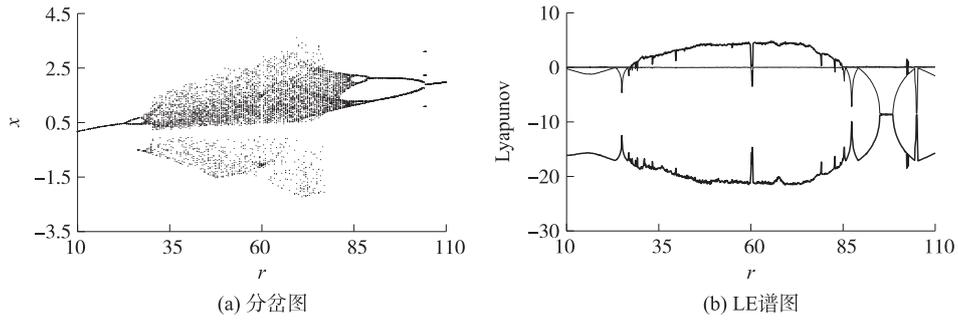


图4 系统的分岔图与LE谱图

Fig.4 The bifurcation diagram and Lyapunov exponent spectrum of the new system

为了清晰地观察系统(1)随参数变化的动力学行为,给出如图5所示的局部放大分岔图,其中数值仿真步长为0.005,初始值为[2.29, -0.01, -19.39]可以清晰看出当系统参数在 $r=26.69, r=85.65, r=89.07$ 和 $r=104.69$ 附近出现了倍周期分岔(PDB);在 $r=82.78$ 附近出现了鞍结分岔(SNB).

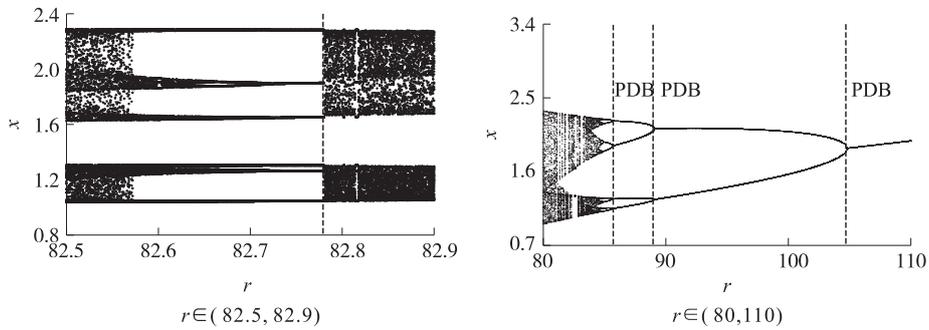


图5 系统的局部分岔图

Fig.5 The bifurcation diagram for $r \in (82.5, 82.9)$ and $r \in (80, 110)$

图6给出了系统的部分周期相平面图,在 $r=15$ 和 $r=110$ 时,系统处于周期1运动;当 $r=25$ 和 $r=100$ 时,系统处于周期2运动;当 $r=27$ 和 $r=87$ 时,系统处于周期4运动;当 $r=85.2$ 时,系统处于周期8运动;由此可见系统的分岔图、LE谱图均正确.

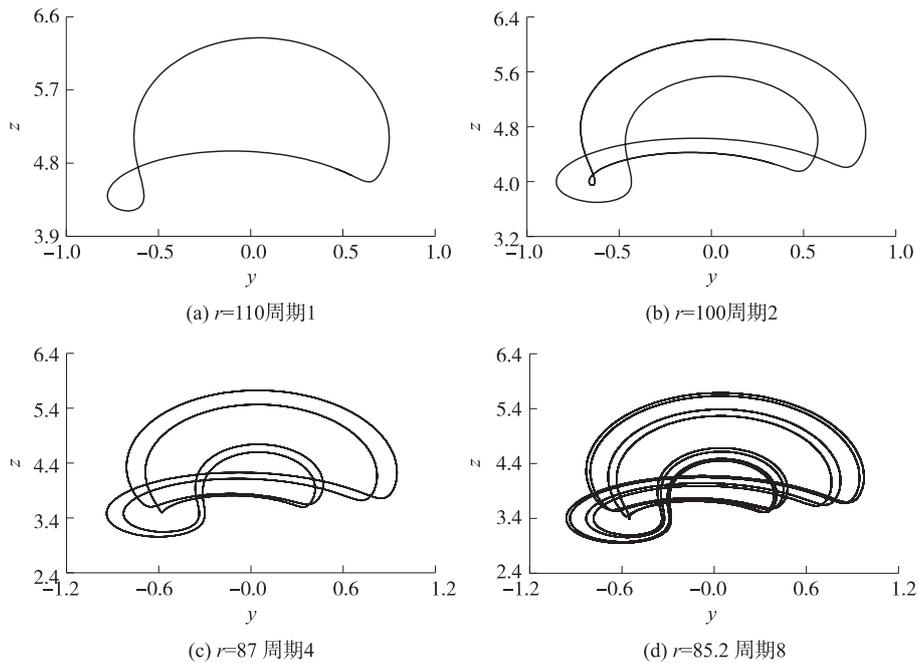


图6 参数r取不同值时系统的相轨迹

Fig.6 Phase diagram of the system for r with different values

共存吸引子产生于同一组系统参数,却因为初始值的不同而具有不同的运动形态,多种形态同时存在,便形成了吸引子共存现象,这是多稳态系统的主要动力学特征.为了更好地观察系统的多稳态特性,下面将分别以初始值 I [2.10, -0.21, 6.50]和初始值 II [-2.30, -0.56, 3.99]为进行仿真,利用分岔图、相平面图对新系统双稳态进行分析.图 7(a)分别给出了系统在初始值 1(部分共存分岔)和初始值 2(全局分岔)随 r 逐渐增大的部分分岔图,由于其余部分在两个初始值下分叉图完全一致,本文不再分析.在 $r \in (101.92, 104.8)$ 范围内,不同初始值下的分岔图差异很大,图 7(a)中阴影部分标志着系统中出现了共存现象.观察初始值 I 时的分岔图,随着参数从 $r=104.81$ 逐渐减小,系统在参数 $r=103.71$ 处经历了倍周期分叉,周期 3 运动变为周期 6 运动,直到 r 减小到 102.88,系统开始出现混沌运动,减小到 102.86 时混沌消失,局部分叉的运动消失.对于初始值 II 时的分岔图系统的全球分叉,系统的运动变化情况相对比较简单,如图 7(a)中红色线条所示在 $r < 104.82$ 的时候,系统只有周期 1 运动;当 $r \in (101.92, 104.86)$ 时,系统只有周期 2 运动.当 $r < 102.2$ 时系统在初始值 1 和 2 下分岔图的共存现象消失了.综上所述,在参数 $r \in (103.71, 104.8)$ 时,呈现周期三与周期二的共存,如图 7(b)所示 $r=103.95$ 时表现为周期 3-周期 2 运动共存.在参数 $r \in (103.1, 103.71)$ 时,出现周期六与周期二的共存,如图 7(c)所示 $r=103.21$ 表现为周期 6-周期 2 运动共存.在参数 $r \in (102.88, 103.1)$ 时,系统呈现多周期与周期二的共存运动;在参数 $r \in (102.05, 102.88)$ 时,系统出现混沌与周期二的共存运动,如图 7(d)在 $r=102.24$ 时表现为混沌与周期 2 运动共存.

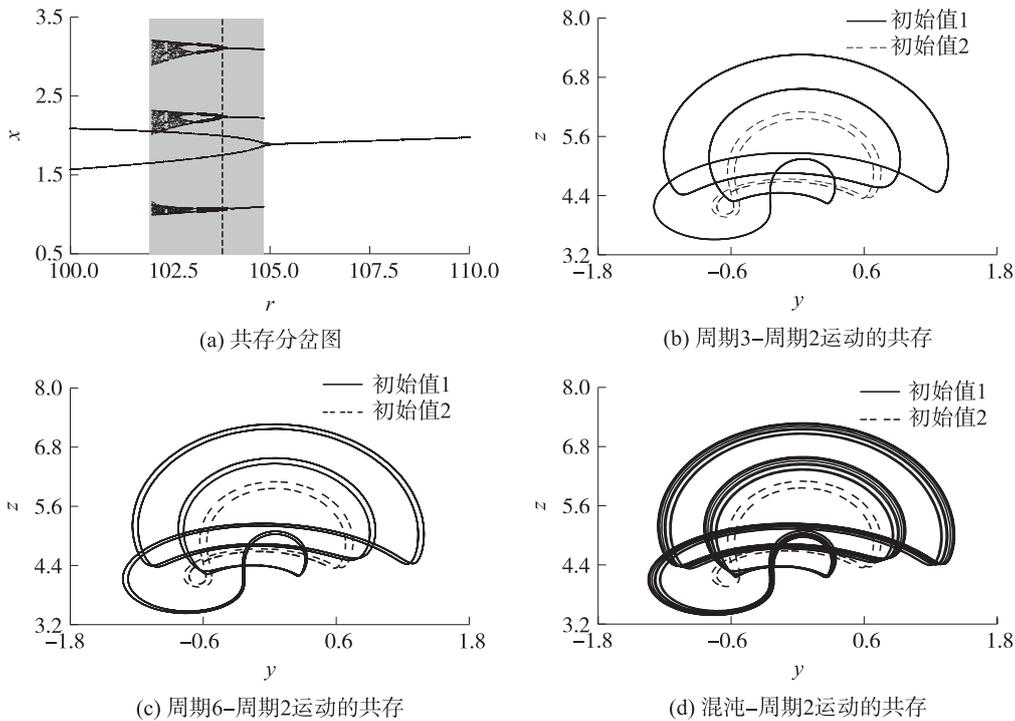


图 7 系统的局部共存运动

Fig.7 The local coexist motion state of the system

3 系统电路设计与仿真实现

混沌电路的模块化设计主要根据系统无量纲状态方程,用模块化理念进行混沌电路的设计.通常取电源电压为 ± 15 V,得运算放大器的线性动态范围为 ± 13.5 V,由于新系统变量的动态范围超出了 ± 13.5 V,所以首先要做变量比例压缩变换,对其均匀压缩 50 倍后,将参数代入方程(1),得

$$\begin{cases} dx/dt = -12.5x + 6.7y + 50yz, \\ dy/dt = -25xz + 45x - 0.125y, \\ dz/dt = 0.8xy - 1.72z + 0.5yz. \end{cases} \quad (7)$$

作时间尺度变换,令 $\tau = \tau_0 t$, $\tau = 100$, 得

$$\begin{cases} dx/dt = -1\,250x + 670y + 10\,000yz, \\ dy/dt = -5\,000xz + 4\,500x - 12.5y, \\ dz/dt = 8\,000xy - 172z + 5\,000yz. \end{cases} \quad (8)$$

根据系统电路原理图及电路理论,可得系统电路实现方程为

$$\begin{cases} dx/dt = -\frac{1}{R_2 C_1} x + \frac{1}{R_1 C_1} y + \frac{1}{R_{14} C_1} yz, \\ dy/dt = -\frac{1}{R_{10} C_2} xz + \frac{1}{R_8 C_2} x - \frac{1}{R_7 C_2} y, \\ dz/dt = \frac{1}{R_{11} C_3} xy - \frac{1}{R_9 C_3} z + \frac{1}{R_{15} C_3} yz. \end{cases} \quad (9)$$

将方程(8)和(9)相比较,可得 $1\,250 = 1/R_1 C_1$, $670 = 1/R_2 C_1$, $10\,000 = 1/R_{14} C_1$, $4\,500 = 1/R_8 C_2$, $12.5 = 1/R_7 C_2$, $5\,000 = 1/R_{12} C_2$, $172 = 1/R_9 C_3$, $8\,000 = 1/R_{11} C_3$, $5\,000 = 1/R_{15} C_3$, 当取 $C_1=C_2=C_3=1\ \mu\text{F}$, $R_1=150\ \text{k}\Omega$, $R_2=80\ \text{k}\Omega$, $R_7=8\,000\ \text{k}\Omega$, $R_8=35.7\ \text{k}\Omega$, $R_9=580\ \text{k}\Omega$, $R_{10}=20\ \text{k}\Omega$, $R_{11}=12\ \text{k}\Omega$, $R_{14}=10\ \text{k}\Omega$, $R_{15}=20\ \text{k}\Omega$, $R_3, R_4, R_5, R_6, R_{12}, R_{13}$ 分别取为 $10\ \text{k}\Omega$.

本文采用 Multisim 仿真软件进行设计新三维自治混沌系统的电路,电路如图 8 所示. 电路中的元器件采用线性电阻、电容、模拟乘法器 AD633、运算放大器(TL082CP),其中 AD633 是用来实现系统中的非线性乘积项,TL082CP 是用来加减运算的. 仿真结果如图 9 所示,观察实验结果可发现电路仿真与数值仿真结果是一致的,从而进一步验证了新混沌系统的动力学行为,同时也证明了新系统的物理可实现性,为将来用于实现多功能混沌信号发生器、信息识别与记忆、大容量动态信息存储器的设计奠定了基础.

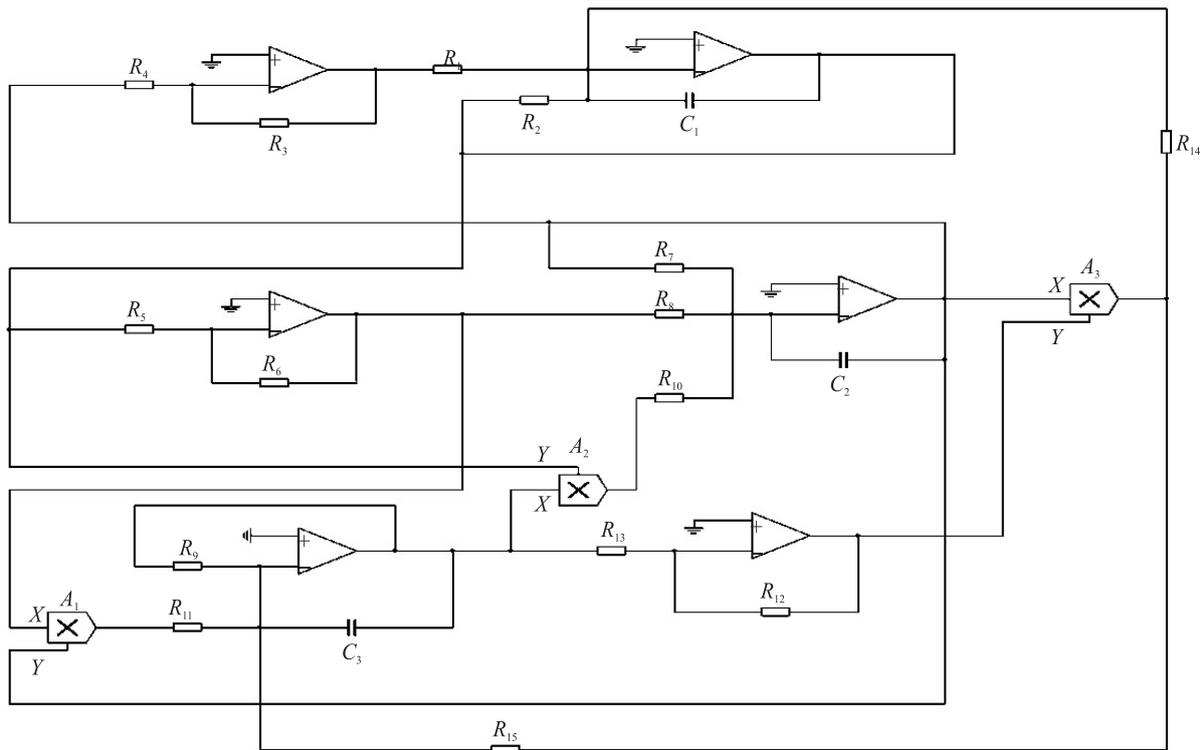


图8 系统(1)的电路实现

Fig.8 Circuit implementation of system (1)

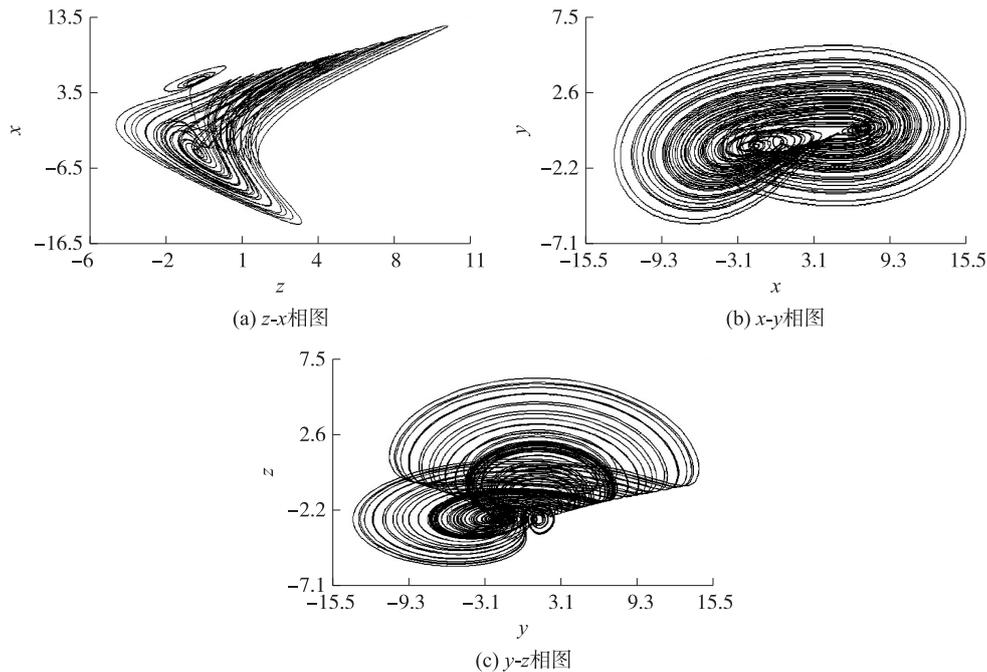


图9 系统(1)的电路仿真结果

Fig.9 Circuit simulation of system(1)

4 结论

本文提出了一个新的三维自治混沌系统,新系统拥有丰富的动力学行为.通过理论分析、数值仿真、功率谱图、分岔图和 Lyapunov 指数谱等证实了新系统的动力学特性.最后根据系统方程设计了电路仿真实验,证实该系统的物理可实现性.新系统具有一切混沌系统的共有特性,如对初值条件的极端敏感性、在一定的频率范围内具有连续的功率谱以及具有正的最大 Lyapunov 指数.通过参数 r 变化对新系统中共存现象进行了分析,发现系统中不仅含有周期运动和周期运动的共存,也有周期运动与混沌运动共存的现象.通过新系统的复杂混沌特性分析及物理电路的实现分析,可以发现新系统可在语音混沌保密通信、混沌图像加密等领域存在很好的应用价值.

[参考文献](References)

- [1] 陈关荣,吕金虎. Lorenz 系统族的动力学分析、控制与同步[M]. 北京:科学出版社,2003.
CHEN G R, LU J H. Family Lorenz system dynamics analysis, control and synchronization[M]. Beijing: Science Press, 2003. (in Chinese)
- [2] LORENZ E N. Deterministic nonperiodic flow[J]. Journal of the atmospheric sciences, 1963, 20(5): 130-141.
- [3] ROSSLER O E. An equation for continuous chaos[J]. Physical letters A, 1976, 57(5): 397-398.
- [4] CHUA L O, KOMURO M, MATSUMOTO T. The double scroll family[J]. IEEE transactions on circuits and systems, 1986, 33(11): 1 072-1 096.
- [5] CHEN G R, UETA T. Yet another chaotic attractor[J]. International journal of bifurcation & chaos, 1999, 9(7): 1 465-1 466.
- [6] CHEN G R, DONG X. From chaos to order: methodologies, perspectives and applications[M]. Singapore: World Scientific, 1998.
- [7] LÜ J H, CHEN G R, CHENG D Z, et al. Bridge the gap between the Lorenz system and the Chen system[J]. International journal of bifurcation & chaos, 2002, 12(12): 2 917-2 926.
- [8] LIU C X, LIU T, LIU L, et al. A new chaotic attractor[J]. Chaos, solitons & fractals, 2004, 22(5): 1 031-1 038.
- [9] LIU C X, LIU L, LIU T, et al. A new butterfly-shaped attractor of Lorenz-like system[J]. Chaos, solitons & fractals, 2006, 28(5): 1 196-1 203.

- [10] QI G Y, DU S Z, CHEN G R, et al. On a four-dimensional chaotic system[J]. *Chaos, solitons & fractals*, 2005, 23(5): 1 671–1 682.
- [11] CHEN A M, LU J A, LU J H, et al. Generating hyperchaotic Lü attractor via state feedback control[J]. *International journal of bifurcation & chaos*, 2005, 364: 103–110.
- [12] 张建雄, 唐万生, 徐勇. 一个新的三维混沌系统[J]. *物理学报*, 2008, 57(11): 6 799–6 807.
ZHANG J X, TANG W S, XU Y. A new three-dimensional chaotic system[J]. *Acta physica sinica*, 2008, 57(11): 6 799–6 807.(in Chinese)
- [13] 唐亮瑞, 李静, 樊冰. 一个新四维自治超混沌系统及其电路实现[J]. *物理学报*, 2009, 58(3): 1 446–1 455.
TANG L R, LI J, FAN B. A new four-dimensional hyperchaotic system and its circuit simulation[J]. *Acta physica sinica*, 2009, 58(3): 1 446–1 455.
- [14] 周小勇. 一种具有恒 Lyapunov 指数谱的混沌系统及其电路仿真[J]. *物理学报*, 2011, 60(10): 54–65.
ZHOU X Y. A chaotic system with invariable Lyapunov exponent and its circuit simulation[J]. *Acta physica sinica*, 2011, 60(10): 54–65.(in Chinese)
- [15] 罗明伟, 罗小华, 李华青. 一类四维多翼混沌系统及其电路实现[J]. *物理学报*, 2013, 62(2): 153–158.
LUO M W, LUO X H, LI HUA Q. A family of four-dimensional multi-wing chaotic system and its circuit implementation[J]. *Acta physica sinica*, 2013, 62(2): 153–158.(in Chinese)
- [16] 邵书义, 闵富红, 吴薛红, 等. 基于现场可编程逻辑门阵列的新型混沌系统实现[J]. *物理学报*, 2014, 63(6): 73–81.
SHAO S Y, MIN F H, WU X H, et al. Implementation of a new chaotic system based on field programmable gate array[J]. *Acta physica sinica*, 2014, 63(6): 73–81.(in Chinese)
- [17] 李雄杰, 周东华. 一种基于强跟踪滤波的混沌保密通信方法[J]. *物理学报*, 2015, 64(14): 140 501.
LI X J, ZHOU D H. A method of chaotic secure communication based on strong tracking filter[J]. *Acta physica sinica*, 2015, 64(14): 140 501.(in Chinese)
- [18] 闵富红, 马美玲, 翟炜, 等. 基于继电特性函数的互联电力系统混沌控制[J]. *物理学报*, 2014, 63(5): 70–77.
MIN F H, MA M L, ZHAI W, et al. Chaotic control of the interconnected power system based on the relay characteristic function[J]. *Acta physica sinica*, 2014, 63(5): 70–77.(in Chinese)
- [19] 吴忠强, 杨阳, 徐纯华. 混沌状态下永磁同步发电机的故障诊断——LMI 法研究[J]. *物理学报*, 2013, 62(15): 82–88.
WU Z Q, YANG Y, XU C H. Fault diagnosis for permanent magnet synchronous generator under chaos conditions: LMI approach[J]. *Acta physica sinica*, 2013, 62(15): 82–88.(in Chinese)

[责任编辑:陈 庆]