

# 亚网格技术在二维 Laguerre-FDTD 方法中的应用

刘莹莹<sup>1</sup>, 聂守平<sup>1</sup>, 刘升<sup>2</sup>, 庄伟<sup>1,3</sup>, 唐万春<sup>1</sup>

(1. 南京师范大学物理科学与技术学院, 江苏 南京 210023)

(2. 南京理工大学电子工程与光电技术学院, 江苏 南京 210094)

(3. 江苏省地理信息资源开发与利用协同创新中心, 江苏 南京 210023)

**[摘要]** 提出了一种基于二维 Laguerre-FDTD 方法的亚网格技术, 该技术是用波动方程来处理粗细网格边界. 运用加权的 Laguerre 多项式作为时域基函数对波动方程中电磁场分量作基函数展开, 使用伽辽金方法处理, 消除方程中的时间项, 经有限差分后得到无条件稳定的亚网格处理方法. 数值计算结果证明, 在求解含有精细结构的电磁计算问题上, 该算法具有准确性和有效性.

**[关键词]** Laguerre-FDTD, 亚网格技术, 电磁计算

**[中图分类号]** TM15 **[文献标志码]** A **[文章编号]** 1672-1292(2016)02-0073-08

## Application of Subgridding Algorithm to Two-Dimensional Laguerre-FDTD Method

Liu Yingying<sup>1</sup>, Nie Shouping<sup>1</sup>, Liu Sheng<sup>2</sup>, Zhuang Wei<sup>1,3</sup>, Tang Wanchun<sup>1</sup>

(1. School of Physical and Technology, Nanjing Normal University, Nanjing 210023, China)

(2. School of Electronic and Optical Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

(3. Jiangsu Center for Collaborative Innovation in Geographic Information Resource Development and Application, Nanjing 210023, China)

**Abstract:** A subgridding algorithm in the two-dimensional Laguerre finite-difference time-domain (2-D Laguerre-FDTD) technique is presented in this paper. The homogeneous travelling wave equation is applied to calculate the tangential electric fields at the interface. The subgridding technique for Laguerre-FDTD method is used to deal with temporal variables analytically by choosing weighted Laguerre polynomials as basis functions and Galerkin's method, which is an unconditional stable method. Numerical results for fine structures are presented to demonstrate the accuracy and efficiency of the proposed method.

**Key words:** Laguerre-FDTD, subgridding technique, electromagnetic calculation

时域有限差分(FDTD)方法因能有效模拟电磁波的传播,在分析目标电磁波特性方面得到广泛应用. 传统的基于显式差分方程的 FDTD 方法为了保证计算数值稳定,其时间步长必须满足柯西稳定性条件(Courant-Friedrich-Levy condition, CFL). 当计算模型中存在精细结构时,时间步长的取值变小,求解时间显著增加. 为了克服 CFL 限制,国内外学者提出了交叉隐式时域有限差分(ADI-FDTD)和半隐式差分(CN-FDTD)等无条件稳定的计算方法<sup>[1-3]</sup>. 上述方法在计算过程中仍然包含时间项,且随着时间步长的增大,数值色散误差明显增加<sup>[4-5]</sup>. 2003 年,Chung Y S 提出了 Laguerre-FDTD 方法,使用加权 Laguerre 多项式作为时域基函数将麦克斯韦方程中的电磁场分量展开,并采用伽辽金方法消除了麦克斯韦方程中的时间项,从而达到无条件稳定,该方法也因此在求解含有精细结构电磁问题方面得到了广泛的应用<sup>[6-7]</sup>. 影响 FDTD 方法计算精确度的一个重要因素是网格尺寸的选取,其大小取决于工作频率或波长,一般情况下需要满足:网格尺寸  $\delta \leq \lambda/10$ . 对于含有精细结构的电磁计算问题,例如孔缝耦合、薄挡板和涂层等精细结

收稿日期:2016-04-22.

基金项目:江苏省高校自然科学研究面上项目(15KJB510017)、国家自然科学基金资助项目(61571232)、江苏高校优势学科建设工程资助项目.

通讯联系人:聂守平,教授,研究方向:数值计算、光信息处理等. E-mail: nieshouping@njnu.edu.cn

构<sup>[8-9]</sup>, 网格尺寸  $\delta$  的确定还需要考虑这类精细结构的几何尺寸或介质特性. 相对于整个计算区域而言, 这些精细结构只是其中的一小部分. 若依然采用传统的均匀网格剖分技术, 势必会消耗大量的计算机资源, 费时费力, 因此, 亚网格技术应运而生, 即精细结构部分采用细网格剖分, 其他计算区域采用粗网格剖分. 粗细网格分界面上电磁场分量的处理就变得至关重要. 文献[10-11]中, Zivanovic 和 Prescott 等人利用波动方程原理来求解粗细网格分界面上的场分量, 并将其应用于传统 FDTD. 文献[9, 12-14]中, 董永绵等人则进一步研究了波动方程原理及惠更斯原理在传统 FDTD 亚网格技术中的应用及特性分析. 文献[15-17]则分别提出了在 ADI-FDTD 方法中采用线性插值和降维 FDTD 方法中应用波动方程来处理粗细网格边界, 有效降低了内存需求, 节省了计算时间. Laguerre-FDTD 方法具有收敛速度快的优点, 然而, 针对 Laguerre-FDTD 亚网格技术的研究未见报道. 本文的主要工作是将亚网格技术应用到无条件稳定的 Laguerre-FDTD 方法中, 推导了粗细网格边界处电磁场分量的 Laguerre-FDTD 迭代式, 并分别对双导体直缝和探地雷达中电磁波的传播进行了仿真计算. 数值结果证明了采用亚网格技术的 Laguerre-FDTD 方法的准确性和有效性.

## 1 二维 TM 波 Laguerre-FDTD 表达式

本文将以二维 TM 波为例, 推导 Laguerre-FDTD 迭代表达式.

在二维均匀无耗媒质中, TM 波的麦克斯韦方程表示如下

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial E_z}{\partial y}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - J_z \right). \quad (3)$$

式(1)-(3)中,  $\varepsilon$  和  $\mu$  分别为媒质的介电常数(F/m)和磁导率(H/m),  $J_z$  为激励源所产生的电流密度. 将 Laguerre 多项式  $L_p(\bar{t})$  乘以加权函数  $e^{-\bar{t}/2}$  构成一组正交时域基函数:

$$\phi_p(\bar{t}) = e^{-\bar{t}/2} L_p(\bar{t}), \quad (p = 1, 2, 3, \dots). \quad (4)$$

其中

$$\int_0^\infty \phi_p(\bar{t}) \phi_q(\bar{t}) d\bar{t} = \begin{cases} 1, & p = q, \\ 0, & p \neq q, \end{cases} \quad (5)$$

$$L_p(\bar{t}) = \frac{e^{\bar{t}}}{p!} \frac{d^p}{d\bar{t}^p} (e^{-\bar{t}}), \quad p \geq 0. \quad (6)$$

$p$  为场分量阶数,  $\bar{t} = s \cdot t$ , 且  $s(s > 0)$  是时间尺度因子. 利用式(4)-(6)将式(1)-(3)中电磁场分量按阶数展开, 可得

$$\{H_x(\mathbf{r}, t), H_y(\mathbf{r}, t), E_z(\mathbf{r}, t)\} = \sum_{p=0}^{\infty} \{H_x^p(\mathbf{r}), H_y^p(\mathbf{r}), E_z^p(\mathbf{r})\} \phi_p(\bar{t}). \quad (7)$$

式(7)中,  $\mathbf{r}$  为待求空间中场点的位置矢量. 使用伽辽金方法, 可将式(1)-(3)中电场和磁场分量关于时间  $t$  的一阶导数展开为:

$$s \sum_{q=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{2} H_x^q(\mathbf{r}) + \sum_{k=0, q>0}^{q-1} H_x^k(\mathbf{r}) \right] \phi_q(\bar{t}) = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial E_z^q(\mathbf{r})}{\partial y}, \quad (8)$$

$$s \sum_{q=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{2} H_y^q(\mathbf{r}) + \sum_{k=0, q>0}^{q-1} H_y^k(\mathbf{r}) \right] \phi_q(\bar{t}) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial E_z^q(\mathbf{r})}{\partial x}, \quad (9)$$

$$s \sum_{q=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{2} E_z^q(\mathbf{r}) + \sum_{k=0, q>0}^{q-1} E_z^k(\mathbf{r}) \right] \phi_q(\bar{t}) = \frac{1}{\varepsilon} \left[ \frac{\partial H_y^q(\mathbf{r})}{\partial x} - \frac{\partial H_x^q(\mathbf{r})}{\partial y} \right] - \frac{J_z^q(\mathbf{r})}{\varepsilon}. \quad (10)$$

其中

$$J_z^q(\mathbf{r}) = \int_0^\infty J_z^q(\mathbf{r}, t) \phi(\bar{t}) d(\bar{t}). \quad (11)$$

对于式(8)-(10)中电场和磁场分量关于空间坐标的一阶导数,使用二阶中心差分作数值离散,可以得到

$$H_x^q|_{i,j+\frac{1}{2}} = -C_y^H|_{i,j+\frac{1}{2}} (E_z^q|_{i,j+1} - E_z^q|_{i,j}) - 2 \sum_{k=0, q>0}^{q-1} H_x^k|_{i,j+\frac{1}{2}}, \quad (12)$$

$$H_y^q|_{i+\frac{1}{2},j} = C_x^H|_{i+\frac{1}{2},j} (E_z^q|_{i+1,j} - E_z^q|_{i,j}) - 2 \sum_{k=0, q>0}^{q-1} H_y^k|_{i+\frac{1}{2},j}, \quad (13)$$

$$E_z^q|_{i,j} = \bar{C}_x^E|_{i,j} \left( H_y^q|_{i+\frac{1}{2},j} - H_y^q|_{i-\frac{1}{2},j} \right) - 2 \sum_{k=0, q>0}^{q-1} E_z^k|_{i,j} - \bar{C}_y^E|_{i,j} \left( H_x^q|_{i,j+\frac{1}{2}} - H_x^q|_{i,j-\frac{1}{2}} \right) - \frac{2}{s\epsilon_{i,j}} J_z^q|_{i,j}. \quad (14)$$

将式(12)-(13)代入式(14)中,经过整理,得到二维 TM 波由电场分量  $E_z$  表征的 Laguerre-FDTD 表达式:

$$\begin{aligned} & -\bar{C}_x^E|_{i,j} \bar{C}_x^H|_{i-\frac{1}{2},j} E_z^q|_{i-1,j} - \bar{C}_y^E|_{i,j} \bar{C}_y^H|_{i,j-\frac{1}{2}} E_z^q|_{i,j-1} - \bar{C}_x^E|_{i,j} \bar{C}_y^H|_{i,j+\frac{1}{2}} E_z^q|_{i,j+1} - \bar{C}_y^E|_{i,j} \bar{C}_x^H|_{i+\frac{1}{2},j} E_z^q|_{i+1,j} + \\ & \left[ 1 + \bar{C}_x^E|_{i,j} (\bar{C}_x^H|_{i+\frac{1}{2},j} + \bar{C}_x^H|_{i-\frac{1}{2},j}) + \bar{C}_y^E|_{i,j} (\bar{C}_y^H|_{i,j+\frac{1}{2}} + \bar{C}_y^H|_{i,j-\frac{1}{2}}) \right] E_z^q|_{i,j} = -\frac{2}{s\epsilon_{i,j}} J_z^q|_{i,j} - \left[ 2 \sum_{k=0, q>0}^{q-1} E_z^k|_{i,j} + \right. \\ & \left. 2\bar{C}_x^E|_{i,j} \sum_{k=0, q>0}^{q-1} (H_y^k|_{i+\frac{1}{2},j} - H_y^k|_{i-\frac{1}{2},j}) - 2\bar{C}_y^E|_{i,j} \sum_{k=0, q>0}^{q-1} (H_x^k|_{i,j+\frac{1}{2}} - H_x^k|_{i,j-\frac{1}{2}}) \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

式中,

$$\bar{C}_x^E|_{i,j} = \frac{2}{s\epsilon_{i,j} \Delta x_i}, \bar{C}_y^E|_{i,j} = \frac{2}{s\epsilon_{i,j} \Delta y_i}, \bar{C}_x^H|_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{2}{s\mu_{i+\frac{1}{2},j} \Delta x_i}, \bar{C}_y^H|_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{2}{s\mu_{i,j+\frac{1}{2}} \Delta y_i}. \quad (16)$$

由于式(15)等号右边均为已知量,因此可将其改写为下面的矩阵形式:

$$[A]\{E^q\} = \{J^q\} + \{\beta^{q-1}\}, \quad (q = 1, 2, 3, \dots). \quad (17)$$

式(17)即为不含时间项、具有隐式差分格式的 Laguerre-FDTD 表达式. 其中, 向量  $\{E^q\}$  由待求电场的  $z$  方向分量组成, 向量  $\{J^q\}$  由式(11)所得到的激励源电流密度  $z$  方向分量组成, 向量  $\{\beta^{q-1}\}$  则是 0 到  $q-1$  阶电 磁场分量的求和项.

## 2 Laguerre-FDTD 亚网格技术

假设待求空间如图 1 所示, 一部分空间用粗网格剖分, 而另一部分则用细网格剖分. 令粗网格大小为  $\Delta x, \Delta y$ , 时间步长设为  $\Delta t_c$ ; 用  $n_f$  表示粗细网格比例系数, 亚网格尺寸是粗网格尺寸的  $1/n_f$ , 即  $\Delta x_f = \Delta x/n_f, \Delta y_f = \Delta y/n_f$ . 采用  $E_x(i_f, j_f), H_x(i_f, j_f+1/2), H_y(i_f+1/2, j_f)$  表示细网格点的场值, 以  $E_z(i, j), H_x(i, j+1/2), H_y(i+1/2, j)$  表示粗网格点的场值.

在粗细网格区域内部, 可利用式(15)对式(17)中的矩阵  $A$  进行填充, 而在粗细网格分界面处, 考虑到  $E_z$  在粗细网格分界面处满足齐次波动方程<sup>[12-14]</sup>,

$$\nabla^2 E_z - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0. \quad (18)$$

其中,  $v$  为电磁波在介质中的传播速度. 根据文献[18], 将式(18)中的电场分量  $E_z$  关于时间  $t$  的二阶导数展开为 Laguerre-FDTD 式:

$$\frac{\partial^2 E_z(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = s^2 \sum_{p=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{4} E_z^p(\mathbf{r}) + \sum_{k=0, p>0}^{p-1} (p-k) E_z^k(\mathbf{r}) \right] \phi_p(\bar{t}), \quad (19)$$

将式(19)代入式(18), 并采用伽辽金方法, 得:

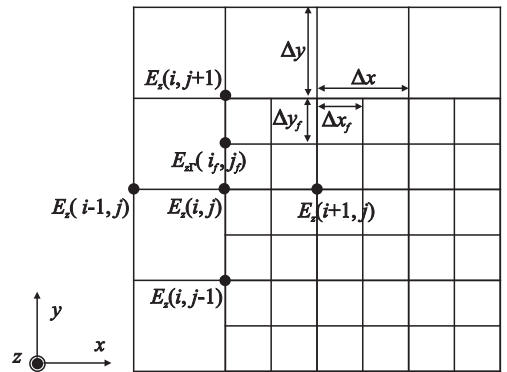


图1 亚网格在x-y平面上电场分布图

Fig.1 Schematic illustration of the electric fields in the x-y plane of the subgridding region

$$\nabla^2 E_z^q - \frac{1}{\nu^2} s^2 \left[ \frac{1}{4} E_z^q(i, j) + \sum_{k=0, q>0}^{q-1} (q-k) E_z^k(i, j) \right] = 0. \quad (20)$$

若将

$$\nabla^2 E_z^q = \left( \frac{\partial^2 E_z^q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z^q}{\partial y^2} \right) \quad (21)$$

记为

$$\left( \frac{\partial^2 E_z^q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z^q}{\partial y^2} \right) = \frac{D^q}{\delta^2}. \quad (22)$$

并令  $\Delta x = \Delta y = \delta$ ,  $D/\delta^2$  表征电场分量  $E_z$  的拉普拉斯运算. 特别地, 式(22)中的  $D$  是关于  $(x, y, q)$  的函数, 而在传统 FDTD 方法中  $D$  是关于  $(x, y, t)$  的函数. 将式(22)在当前  $q$  阶进行空间坐标的差分离散, 则有

$$\frac{D^q(i, j)}{\delta^2} = \frac{E_z^q(i+1, j) + E_z^q(i-1, j) - 2E_z^q(i, j)}{\delta^2} + \frac{E_z^q(i, j+1) + E_z^q(i, j-1) - 2E_z^q(i, j)}{\delta^2}. \quad (23)$$

即

$$D^q(i, j) = E_z^q(i+1, j) + E_z^q(i-1, j) + E_z^q(i, j+1) + E_z^q(i, j-1) - 4E_z^q(i, j). \quad (24)$$

由式(24)可见, 粗网格节点分量  $D(i, j)$  的计算只需用到相邻粗网格节点的电场分量  $E_z$  当前  $q$  阶的值. 对于图1中粗细网格边界上的场点, 与式(20)类似, 有

$$\frac{D_{zI}^q(i_f, j_f)}{\delta^2} - \frac{1}{\nu^2} s^2 \left[ \frac{1}{4} E_{zI}^q(i_f, j_f) + \sum_{k=0, q>0}^{q-1} (q-k) E_{zI}^k(i_f, j_f) \right] = 0. \quad (25)$$

其中, 细网格节点分量  $D_{zI}(i_f, j_f)$  可由相邻粗网格节点分量  $D(i, j)$  通过一个二阶 Taylor 级数展开得到, 于是

$$D_{zI}^q(i_f, j_f) = D^q(i, j) + \frac{D^q(i, j+1) - D^q(i, j-1)}{2n_f} + \frac{D^q(i, j+1) - 2D^q(i, j) + D^q(i, j-1)}{2n_f^2}. \quad (26)$$

将式(26)代入式(25), 得

$$\frac{1}{\delta^2} \left[ D^q(i, j) + \frac{D^q(i, j+1) - D^q(i, j-1)}{2n_f} + \frac{D^q(i, j+1) - 2D^q(i, j) + D^q(i, j-1)}{2n_f^2} \right] - \frac{s^2}{\nu^2} \frac{1}{4} E_{zI}^q(i_f, j_f) = \frac{s^2}{\nu^2} \sum_{k=0, q>0}^{q-1} (q-k) E_{zI}^k(i_f, j_f). \quad (27)$$

构建出一个线性方程组

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_c & 0 & \mathbf{A}_{cI} \\ 0 & \mathbf{A}_f & \mathbf{A}_{fI} \\ \mathbf{A}_{Ic} & \mathbf{A}_{If} & \mathbf{A}_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{zc}^q \\ \mathbf{E}_{zf}^q \\ \mathbf{E}_{zI}^q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_c^{q-1} \\ \mathbf{B}_f^{q-1} \\ \mathbf{B}_I^{q-1} \end{bmatrix}. \quad (28)$$

其中, 子矩阵  $\mathbf{A}_c$ 、 $\mathbf{A}_f$  分别对应粗网格内部电场分量之间和细网格内部电场分量之间的耦合. 子矩阵  $\mathbf{A}_I$  对应粗细网格边界上电场分量之间的耦合. 子矩阵  $\mathbf{A}_{cI}$ 、 $\mathbf{A}_{If}$ 、 $\mathbf{A}_{Ic}$ 、 $\mathbf{A}_{If}$  分别对应粗网格内部、细网格内部与粗细网格边界上的电场分量之间的耦合. 其中  $\mathbf{A}_c$ 、 $\mathbf{A}_{cI}$  和  $\mathbf{A}_f$ 、 $\mathbf{A}_{fI}$  中的元素由式(15)确定.  $\mathbf{A}_{Ic}$ 、 $\mathbf{A}_{If}$  和  $\mathbf{A}_I$  中的元素由式(27)确定. 向量  $\mathbf{E}_{zc}^q$ 、 $\mathbf{E}_{zf}^q$ 、 $\mathbf{E}_{zI}^q$  分别存储对应粗网格内部、细网格内部以及粗细网格边界上的待求电场分量, 右边向量  $\mathbf{B}_c^{q-1}$ 、 $\mathbf{B}_f^{q-1}$ 、 $\mathbf{B}_I^{q-1}$  分别表示粗网格内部、细网格内部及粗细网格边界上 0 阶到  $q-1$  阶已知场分量的求和项. 通过求解式(28)可得整个计算区域内各网格点处的每一阶的电场分量, 实现了粗细网格的迭代, 进而求出每一阶粗细网格上的磁场分量.

### 3 数值结果

为了验证本文提出的基于二维 Laguerre-FDTD 亚网格技术应用于电磁场数值计算的正确性和有效性, 下面给出了两个数值算例.

### 3.1 电磁脉冲信号在双导体直缝中的传播

该结构由两个薄导体板组成,两个薄导体板之间有一细小的直缝.导体板的长度和厚度分别为  $a=10\text{ mm}$  和  $w=0.4\text{ mm}$ ,直缝的宽度为  $d=0.4\text{ mm}$ .仿真区域划分为两种尺寸的矩形网格,在直缝附近使用亚网格划分,粗细网格比例  $n_f=2$ ,粗网格尺寸  $\Delta x=\Delta y=0.4\text{ mm}$ ,细网格尺寸  $\Delta x_f=\Delta y_f=0.2\text{ mm}$ .观察点  $P_1$  和  $P_2$  分别位于亚网格内部和粗网格区域.使用 Mur's 一阶吸收边界对计算区域作数值截断.如图 2 所示,方形计算区域的边长为  $L_1=L_2=60\text{ mm}$ .

选用正弦调制的高斯脉冲信号作为平面波激励,平面波入射角  $\varphi_i=0^\circ$ ,激励波形表示如下

$$I(t) = \exp[-(t-t_0)^2/\tau^2] \cdot \sin[2\pi f_c(t-t_0)], \quad (29)$$

式中,脉宽  $\tau=1/(2f_c)$ ,工作频率  $f_c=15\text{ GHz}$ ,  $t_0=3\tau$ .

Laguerre-FDTD 均匀细网格计算和 Laguerre-FDTD 亚网格计算所需的步进阶数设为 150,时间尺度因子  $s=6.07\times 10^{10}$ ,时间步长设为  $\Delta t=1\times 10^{-12}\text{ s}$ ;传统 FDTD 方法中,为满足 CFL 条件,时间步长设为  $\Delta t=2\times 10^{-13}\text{ s}$ ,所需的时间步进阶数设为 4 000 步. Laguerre-FDTD 均匀细网格尺寸和传统 FDTD 均匀细网格尺寸均为  $\Delta x=\Delta y=0.2\text{ mm}$ .三种计算方法的时域仿真时间均为  $T_f=8\times 10^{-10}\text{ s}$ .

图 3 给出了观察点  $P_1$  和  $P_2$  的电场  $z$  方向分量随时间的变化曲线.由图 3 可以看出,该算例中 Laguerre-FDTD 亚网格计算与 Laguerre-FDTD 均匀细网格计算、传统 FDTD 均匀细网格计算的仿真结果吻合,表明本文提出的方法是正确的.

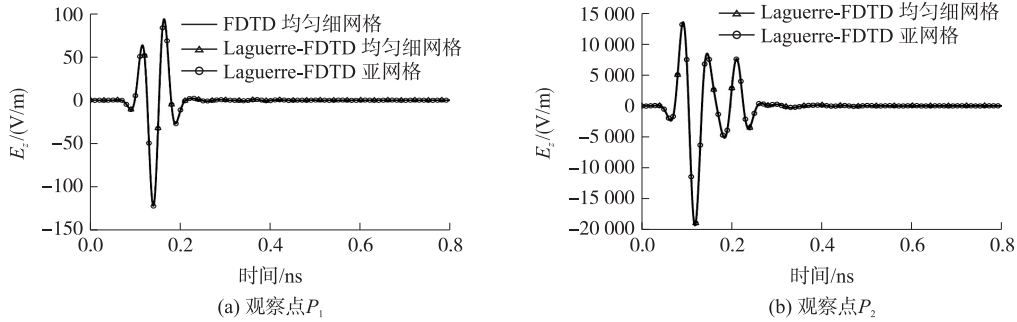


图 3 观察点电场  $z$  方向分量时域信号

Fig.3 Transient electric fields of the  $z$  component

从表 1 可以看出,和传统 FDTD 均匀细网格仿真相比, Laguerre-FDTD 亚网格方法仿真所需时间大大减少;对比于 Laguerre-FDTD 均匀细网格, Laguerre-FDTD 亚网格方法仿真的内存占用明显降低.从而验证了 Laguerre-FDTD 亚网格方法较传统方法仿真含有精细结构电磁问题的高效性.

本文是在 Laguerre-FDTD 方法基础上,以波动方程原理处理粗细网格边界.由不连续性带来非物理性反射,该种反射是影响亚网格技术稳定性和精度的重要因素.图 4 给出的是观察点  $P_1$  的相对反射误差,其计算表达式<sup>[19]</sup>如下

$$R_{dB} = 20 \lg \frac{|E_z^F - E_z^{SUB}|}{\max |E_z^F|}. \quad (30)$$

其中  $E_z^F$  表示 Laguerre-FDTD 均匀细网格计算得到的  $P_1$  点电场分量,  $E_z^{SUB}$  表示 Laguerre-FDTD 亚网格计算得到同一点的电场分量.

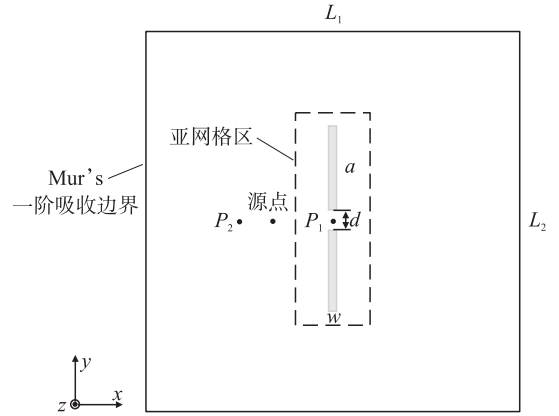


图 2 双导体直缝仿真计算区域图

Fig.2 Computational domain of double conductors with a straight slot

表 1 图 3 中三种方法的计算机花费比较

Table 1 Comparison of three methods' computational efforts of Fig.3

计算方法	剖分方式	运行时间/s	占用内存/kB
FDTD	均匀细网格	80.9	9 412
Laguerre-FDTD	均匀细网格	13.2	80 416
Laguerre-FDTD	亚网格	4.3	37 548



图4给出了三种粗细网格比例系数,分别选取2、5、10作为参考.在本算例中, $P_1$ 点的相对反射误差随着 $n_f$ 取值的增加而呈现上升趋势,但从整体来看,即便 $n_f$ 取10,相对反射误差值仍然较小.为保证精度和稳定性,和传统FDTD方法中 $n_f$ 取值一样<sup>[20-21]</sup>,一般不超过5.

### 3.2 探地雷达电磁波在介质中的传播

本算例为使用二维Laguerre-FDTD亚网格算法模拟探地雷达电磁波在介质中的传播,仿真环境为:整个计算区域由空气和土壤组成,如图5所示,参考文献[15]和[22]中的算例,整个计算区域边长为 $L_1=L_2=630$  mm,上半空间为空气,下半空间是土壤,目标物体为一个矩形空气细缝,并且设土壤的相对介电常数 $\epsilon_r=6$ ,电导率 $\sigma=0$  S/m.发射源( $T_s$ )与观察点( $R_s$ )之间的距离设为 $L_4=72$  mm,两点到地面的高度均为 $h_2=15$  mm,土壤中的矩形空气细缝距离观察点的高度 $h_1=198$  mm,厚度 $w=3$  mm,并且在空气细缝附近采用亚网格划分.选取Mur's一阶吸收边界作为截断边界处的边界吸收条件.根据Laguerre-FDTD亚网格技术所搭建的数值仿真模型,粗细网格比例设为 $n_f=3$ ,粗网格尺寸 $\Delta x=\Delta y=3$  mm,亚网格区域的网格尺寸 $\Delta x_f=\Delta y_f=1$  mm;Laguerre-FDTD均匀细网格和传统FDTD均匀细网格尺寸均为 $\Delta x=\Delta y=1$  mm.

选取的激励源为微分高斯脉冲波,其表达式为:

$$I(t)=[-2(t-t_0)/\tau^2]\exp[-(t-t_0)^2/\tau^2]. \quad (31)$$

其中工作频率 $f_c=1.5$  GHz,脉宽 $\tau=1/(2f_c)$ , $t_0=3\tau$ .对式(31)归一化后再带入计算.Laguerre-FDTD亚网格计算和Laguerre-FDTD均匀细网格计算所需的步进阶数设为120,时间尺度因子 $s=3\times 10^{10}$ ,时间步长设为 $\Delta t=1\times 10^{-11}$  s;传统FDTD方法中,为满足CFL条件,时间步长设为 $\Delta t=2\times 10^{-12}$  s,时间步为6 000.三种计算方法的时域仿真时间均为 $T_f=1.2\times 10^{-8}$  s.

如图6所示,采用亚网格技术得到观察点的电场 $z$ 方向分量随时间的变化曲线同样与采用均匀细网格计算得到的变化曲线吻合,再次验证了该方法的准确性.发射波一方面直接传到观察点,一方面经过地下介质的多重反射后再传到观察点处,从幅值上看,反射回来的波形有所衰减,并慢慢衰减趋于零,在时间上,反射波较之入射波直接传到观察点处有一定时间的延迟.三种计算方法都反映出了土壤中空气缝的存在.

表2给出了3种方法的计算机资源占用情况,由于亚网格技术只对感兴趣的部分区域进行细分,而其他区域仍然采用空间步长较大的粗网格划分,Laguerre-FDTD亚网格计算时间降低到传统FDTD均匀

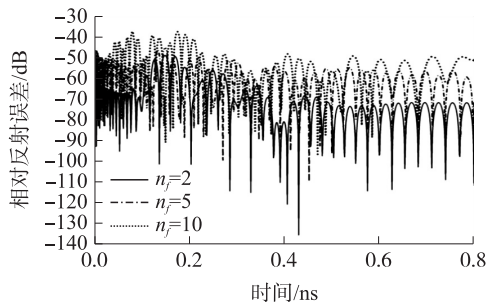


图4  $P_1$ 点的相对反射误差图

Fig.4 Relative reflection error of the point  $P_1$

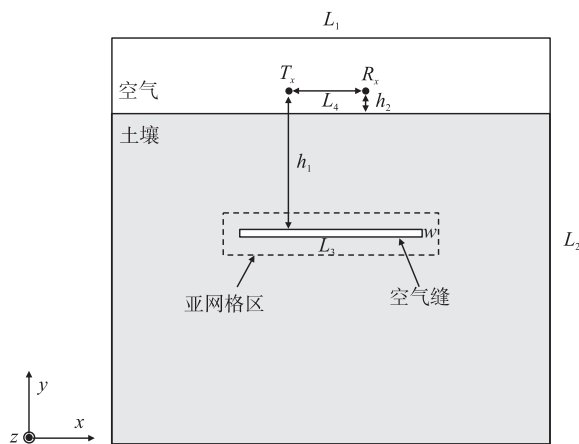


图5 仿真模型计算区域示意图

Fig.5 Schematic of the computational domain

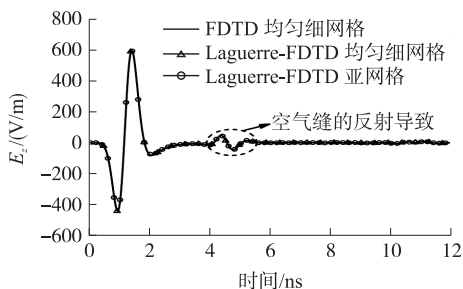


图6 观察点 $R_s$ 处电场 $z$ 向分量时域信号

Fig.6 Transient electric fields of the  $z$  component at  $R_s$

表2 图6中三种方法的对比

Table 2 The comparison of the three methods of Fig.6

计算方法	剖分方式	运行时间/s	占用内存/kB
FDTD	均匀细网格	609.7	26,340
Laguerre-FDTD	均匀细网格	62.2	337,920
Laguerre-FDTD	亚网格	6.7	59,408

细网格计算时间的 1%,降低到 Laguerre-FDTD 均匀细网格计算时间的 10%. 相比于 Laguerre-FDTD 均匀细网格的内存占用,Laguerre-FDTD 亚网格的内存占用也显著减少,进一步说明了 Laguerre-FDTD 亚网格技术的正确性和有效性.

上述两个算例的计算环境均为 Intel(R)core CPU@3.60 GHz,8.00 GB 内存.

## 4 结语

本文提出了基于二维 Laguerre-FDTD 方法的亚网格技术,考虑含有精细结构的电磁计算问题时,精细结构附近采用推导出的 Laguerre-FDTD 粗细网格边界处理的迭代式计算,其他区域内则继续采用适合均匀网格的 Laguerre-FDTD 方法的迭代式计算. Laguerre-FDTD 亚网格技术不受 CFL 条件限制,迭代过程不考虑时间项,从而达到无条件稳定,并且编程计算也比传统 FDTD 亚网格中的双步长算法简便,有效地提高了计算效率. 在保证计算正确性的前提下,Laguerre-FDTD 亚网格技术明显减少了计算时间,降低了内存需求,在正确性和有效性方面达到较好的平衡.

## [参考文献](References)

- [1] NAMIKI T. A new FDTD algorithm based on alternating-direction implicit method[J]. IEEE transaction on microwave theory and techniques, 1999, 47(10): 2 003–2 007.
- [2] ZHEN F, CHEN Z, ZHANG J. Toward the development of a three-dimensional unconditionally stable finite-difference time domain method[J]. IEEE transaction on microwave theory and techniques, 2000, 48(9): 1 550–1 558.
- [3] SUN G, TRUEMAN C W. Unconditionally stable Crank-Nicolson scheme for solving two-dimensional Maxwell's equations [J]. Electronics letters, 2003, 39(7): 595–597.
- [4] ZHENG F, CHEN Z. Numerical dispersion analysis of the unconditionally stable 3-D ADI-FDTD method[J]. IEEE transaction on microwave theory and techniques, 2001, 49(5): 1 006–1 009.
- [5] PEREDA J, GARCIA O, VEGAS A, et al. Numerical dispersion and stability analysis of the FDTD technique in lossy dielectrics[J]. IEEE microwave and guided wave letters, 1998, 8(7): 245–247.
- [6] CHUNG Y S, SARKAR T K, JUNG B H, et al. An unconditionally stable scheme for the finite-difference time-domain method [J]. IEEE transactions on microwave theory & techniques, 2003, 51(3): 697–704.
- [7] HE G Q, SHAO W, WANG X H, et al. An efficient domain decomposition laguerre-FDTD method for two-dimensional scattering problems[J]. IEEE transactions on antennas & propagation, 2013, 61(5): 2 639–2 645.
- [8] 葛德彪, 阎玉波. 电磁波时域有限差分方法[M]. 3 版. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2011: 29–32.  
GE D B, YAN Y B. The electromagnetic time domain finite difference method [M]. 3rd. Xi'an: Xi'an Electronic and Science University of Publishing House, 2005. (in Chinese)
- [9] 董永绵, 柴玫, 葛德彪, 等. 二维 FDTD 亚网格技术[J]. 运城高专学报, 2000, 18(6): 7–9.  
DONG Y M, CAI M, GE D B. Two-dimensional subgridding algorithm in FDTD method[J]. Journal of Yuncheng advanced training college, 2000, 18(6): 7–9. (in Chinese)
- [10] ZIVANOVIC S S, YEE K S, MEI K K. A subgridding method for the time-domain finite-difference method to solve Maxwell's equations[J]. IEEE transactions on microwave theory & techniques, 1991, 39(3): 471–479.
- [11] PRESCOTT D T, SHULEY N V. A method for incorporating different sized cells into the finite-difference time-domain analysis technique[J]. Microwave & guided wave letters IEEE, 1992, 2(11): 434–436.
- [12] 祝懿. 孔缝耦合与三维亚网格技术研究[D]. 成都: 西南交通大学, 2005.  
ZHU Y. The study on slot coupling and three-dimensional subgridding method[D]. Chengdu: Southwest Jiaotong University, 2005. (in Chinese)
- [13] 谢姣. 时域有限差分方法亚网格技术的研究[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2010.  
XIE J. Research on subgrid technology for FDTD [D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2010. (in Chinese)
- [14] 李政. 基于时域有限差分方法的亚网格技术研究与应[D]. 南京: 南京邮电大学, 2014.  
ZHENG L. Research and application of the subgrid technology based on FDTD method [D]. Nanjing: Nanjing University of

- Posts and Telecommunications, 2014. (in Chinese)
- [15] DIAMANTI N, GIANNOPOULOS A. Implementation of ADI-FDTD subgrids in ground penetrating radar FDTD models[J]. Journal of applied geophysics, 2009, 67(4): 309–317.
- [16] YANG S, YU Y, CHEN Z, et al. A subgridding scheme using hybrid one-step leapfrog ADI-FDTD and FDTD methods[C]. Montreal: IEEE, 2012.
- [17] 耿瑄, 徐金平. R-FDTD 与亚网格相结合技术及其应用[J]. 东南大学学报(自然科学版), 2004, 34(2): 161–165.  
GENG X, XU J P. Reduced finite-difference time-domain method with subgridding and its application[J]. Journal of southeast university(natural science edition), 2004, 34(2): 161–165. (in Chinese)
- [18] SHAO W, WANG B Z, LIU X F. Second-order absorbing boundary conditions for marching-on-in-order scheme[J]. IEEE microwave & wireless components letters, 2006, 16(5): 308–310.
- [19] CAI Z, CHEN B, LIU Y, et al. Complex frequency shifted(CFS)PML for the WLP-FDTD method[J]. Digital printing, 2011: 787–790.
- [20] CHEVALIER M W, LUEBBERS R J. FDTD local grid with material traverse[J]. IEEE transactions on antennas & propagation, 1997, 45(3): 411–421.
- [21] YU W, MITTRA R. A new subgridding method for the finite-difference time-domain(FDTD)algorithm[J]. Microwave & optical technology letters, 1999, 21(5): 330–333.
- [22] DIAMANTI N, GIANNOPOULOS A. Employing ADI-FDTD subgrids for GPR numerical modelling and their application to study ring separation in brick masonry arch bridges[J]. Near surface geophysics, 2011, 9(3): 245–256.

[责任编辑:陈 庆]