

# 三维打印中的底层多边形优化

李 蒙, 宋春雨, 谷静平, 王 琼, 刘 清

(南京师范大学计算机科学与技术学院, 江苏 南京 210023)

**[摘要]** 三维打印过程中, 底层多边形模型存在着数据点冗余、形状粗糙等问题, 造成模型成型效率低, 表面模型不光滑, 急需对底层多边形进行优化。现有的多边形优化算法没有考虑到在三维打印过程从多边形转换为相应的加工指令及加工机构的平滑运行等问题。为此, 本文提出一种新的底层多边形优化算法, 该算法利用基于面积最小原则的多边形简化算法来减少多边形顶点数, 再通过 Hermite 曲线和 B 样条对多边形进行样条化处理, 使多边形边界变得光滑, 并对样条化后的多边形顶点进行均匀离散化, 使优化后的底层多边形更便于机械指令集的操作。实验结果证明该算法可以提高底层多边形的质量并满足三维打印的工程要求。

**[关键词]** 三维打印, 平滑, 多边形简化, 样条化, 离散化

**[中图分类号]** TP274 **[文献标志码]** A **[文章编号]** 1672-1292(2016)03-0029-07

## Underlying Polygon Optimization in Three Dimensional Printing

Li Meng, Song Chunyu, Gu Jingping, Wang Qiong, Liu Qing

(School of Computer Science and Technology, Nanjing Normal University, Nanjing 210023, China)

**Abstract:** The polygon which is used in the underlying digital model in the field of Three Dimension Printing has many problems, such as data redundancy and rough shape. These problems lead to the inefficiency of the product, and the surface model is not smooth. The existing optimization algorithm does not consider the problem of processing instructions and smooth operation. To solve these problems, this paper presents a new polygon optimization algorithm, by using polygon simplification algorithm based on the rule of minimum area to reduce the number of vertices of polygons, and spline polygon based on Hermite curve and B-spline to make polygon boundary becomes smooth. Then this algorithm can also discrete polygon vertices, make it easier to process. Experimental results show that this algorithm can improve the quality of underlying polygons and satisfy engineering requirements.

**Key words:** three dimension printing, smooth operation, polygon simplification, hermite curve and B-spline, discrete

快速成型技术(RPM)作为集成计算机、机械、电子等方面的先进制造技术,是通过逐层增加材料来制造零件的<sup>[1]</sup>,而三维打印技术作为快速成型技术的一种,凭借其快速、高效、节约成本等优点<sup>[2-3]</sup>,伴随着近几年来软硬件技术的不断成熟,得以高速发展,尤其是在生物模型打印领域有了巨大进步,已逐渐应用于临床医学治疗等领域中<sup>[4]</sup>。在三维模型的加工过程中,一切加工轨迹都可以视作是对多边形轮廓的操作,根据不同的硬件设备,将多边形的每一条边转换为相应的加工指令,因此,作为底层模型的切片多边形质量极大地影响了三维模型的成型质量。理想切片多边形应具有顶点少、边线平滑等特点,以满足快速加工的需求。而实际的三维打印中底层多边形模型存在诸多问题,如在切片多边形中存在数据点冗余问题,可能导致产品模型成型速率降低、模型成型质量差;多边形轮廓的不平滑会导致机械加工困难且成型的实体模型表面粗糙,因此需要对底层多边形模型进行一系列的优化。在目前的三维打印技术中考虑的主要是切片算法的优化<sup>[5]</sup>,极少涉及轮廓多边形的优化问题,而现有的多边形优化算法没有考虑到三维打印中对多边形的要求,无法直接应用于三维打印中。为此,本文针对上述问题提出一种集多边形简化、样条化及均匀离散化于一体的多边形优化算法。

## 1 多边形的处理

典型的多边形模型处理有多种方法,包括多边形的简化、变形等,其中简化可分类为顶点聚类、增量式简化、采样和自适应细分<sup>[6-9]</sup>. 在三维打印中需要将凹凸多边形转换为相应的三角形网格进行处理,增量式算法是通过对局部区域的三角形网格进行简化<sup>[10]</sup>,不会改变整体结构,算法原理上可用于三维打印,但在实际应用中存在着诸多问题,下面就几种典型的简化算法进行分析.

### 1.1 顶点删除算法

顶点删除算法是一种多边形边界点删除算法,用于删除多边形中许多表示多边形形状特征的“非必要”的边界点,以此简化多边形. 顶点删除算法主要有两种,一种是夹角最大顶点删除算法,另一种是顶点三角形最小面积算法. 将多边形上某顶点与其相邻的两个顶点组成的三角形称为顶点三角形,构成的角称之为顶点夹角<sup>[11]</sup>,如图1所示.

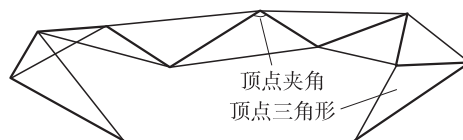


Fig.1 Vertex angle & triangle composed of vertices

顶点三角形最小面积算法的思想是计算每个顶点三角形的面积,若三角形面积小于给定阈值 $\alpha$ ,则使该三角形面积加上较大罚值 $\delta$ 并进行排序,接着删除其中顶点三角形面积最小且顶点夹角大于 $\alpha$ 的顶点,更新面积序列直到多边形顶点数满足要求<sup>[11]</sup>. 相比夹角最大顶点删除算法,该算法的优点是在快速删除顶点时既考虑到面积因素又同时兼顾顶点夹角,更好地保留了多边形原本的轮廓特征,缺点是在模型处理中对给定面积的阈值 $\alpha$ 及罚值 $\delta$ 的设定精度要求较高,易造成漏删和错删.

### 1.2 边折叠(Edge Collapse)算法

边折叠法又称为边塌陷或边收缩算法,是 Hoppe<sup>[12]</sup>等人提出的一种基于三角网格的优化算法,可用于删除多边形内部点、修补多边形内部空洞等问题. 算法选择符合条件的两个相邻的顶点,删除它们之间的边以及这条边上的两个三角形,并将这两个顶点合并到一个新位置<sup>[13]</sup>. 通过边收缩误差来确定新顶点的位置(边收缩误差是指边上某点到该边邻边的距离的平方和),收缩误差最小的顶点作为该边收缩的目标顶点,算法效果如图2所示.

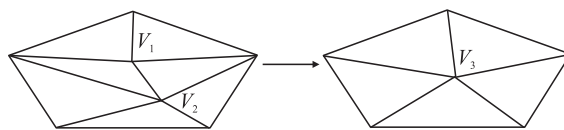


Fig.2 Edge Collapse

一种典型的基于边折叠的算法为 QEM<sup>[14-15]</sup>算法:算法为每个顶点建立一个 $4 \times 4$ 的对称矩阵 $Q$ 来作为误差矩阵,顶点 $V$ 移动到新顶点的误差为 $\Delta V = V^T Q V$ ,即边 $(V_1, V_2)$ 收缩成 $V_3$ ,移动后 $V_3$ 的收缩误差为 $Q_3 = Q_1 + Q_2$ .

边折叠算法的优点是在任何拓扑结构上都能够很好地简化多边形,同时也可改变原拓扑结构,如修正错误的多边形轮廓使不封闭截面轮廓变得封闭等,缺点是时间复杂度较高,当应用于涉及大量多边形的三维打印中时会在一定程度上增加模型成型时间.

## 2 改进多边形优化

### 2.1 多边形的简化

在逆向工程中,三维数字模型的成型精度与其生成模型的三角形数量相关,三角形数量越多精度越高,而三角形数量的增多将导致模型切片轮廓的多边形边界点增多,冗余数据量增加<sup>[16]</sup>,成型难度增大,因此首先要对多边形进行简化处理. 本文中对数字模型底层多边形优化的第一步为多边形边界点的简化处理,其基本思想是在一定顶点夹角阈值下,通过删除顶点三角形中面积最小的顶点,达到简化三角形的目的,可称之为夹角优化的最小顶点面积删除算法.

算法描述如下:

**Step 1** 构建多边形顶点集合 $P(i)$ 以及对应的三角形面积集合 $M$ ,计算每个顶点对应的转角度数 $\alpha$ .

**Step 2** 设定转角阈值 $K$ (弧度值).

**Step 3** 初始化每个顶点三角形的面积,找到当前面积最小的顶点三角形.

**Step 4** 判断是否满足转角的约束条件,当  $a < K$  时,删除顶点三角形对应顶点,当  $a \geq K$  时则保留,从当前面积集合中删除。

**Step 5**  $N$  次简化多边形,每次最多简化一个点( $N$  为允许删除的最多顶点数)。

相比于文献[10]中的顶点三角形面积最小算法,本算法在阈值设置及面积判断上有所不同。选择顶点夹角作为阈值的设置是考虑到多边形细节特征的保留,而面积最小原则能够兼顾顶点边长与夹角的因素,尤其是在三维生物模型及应用当中,原始模型表面大都光滑平整,删除面积最小且夹角低于阈值的顶点三角形对原本多边形特征的改变相对较小,而顶点夹角高于阈值的顶点三角形可以通过后续的样条化和均匀离散化来进行优化处理。

## 2.2 多边形的样条化与均匀离散化

虽然简化后的多边形模型点数量大大减少,但由于三维模型加工打印过程中尤其是生物模型打印中,存在着边界粗糙的问题,导致电机运转缓慢、机械加工效率很低以及成型的产品表面有许多尖锐凸起,因此本文针对简化后的多边形模型进行样条化及均匀离散化处理。

本文采用的是哈密特(Hermite)样条化<sup>[16]</sup>及 B 样条化<sup>[17]</sup>两种方法,都是局部控制的样条化方法,在保证算法简单高速的同时更容易保持多边形的原有特征,使得多边形轮廓变得平滑,应用于机械加工中能够保证机械性能的充分发挥,达到最优的工作效率。

## 2.3 Hermite 样条化

Hermite 样条化的基础为 Hermite 插值,优点是能够保证顶点的一阶参数连续,同时控制点或改变控制点的斜率仅影响与该控制点相接的一段或两段曲线,用户得以实现局部控制,且所需时间复杂度较低。

要构建 Hermite 插值曲线需选择两个型值点(通过测量或计算得到的曲线或曲面上少量描述曲线或曲面几何形状的数据点)  $V_k, V_{k+1}$ 。在四边形中可选择两个连续顶点作为型值点的计算依据,提供包括曲线的起点、起点切向量、终点、终点切向量共 4 个量控制曲线的走势。

$$M_h = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

式(1)中,  $M_h$  为 Hermite 系数矩阵,用于计算样条参数  $P(t)$ 。

Hermite 插值样条参数方程为:

$$P(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} * M_h * \begin{bmatrix} P_k \\ P_{k+1} \\ D_k \\ D_{k+1} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

代数形式为:

$$P(t) = P_k(2t^3 - 3t^2 + 1) + (t^3 - 2t^2 + t)D_k + (t^3 - t^2)D_{k+1} + (-2t^3 + 3t^2)P_{k+1}, \quad (3)$$

$$x(t) = (2x_k - 2x_{k+1} + x'_k + x'_{k+1})t^3 + (-3x_k + 3x_{k+1} - 2x'_k - x'_{k+1})t^2 + x'_k t + x_k, \quad (4)$$

$$y(t) = (2y_k - 2y_{k+1} + y'_k + y'_{k+1})t^3 + (-3y_k + 3y_{k+1} - 2y'_k - y'_{k+1})t^2 + y'_k t + y_k, \quad (5)$$

式中,  $0 < t < 1$ ,  $t$  为参数,  $P_k$  为控制点,  $k$  为原始点坐标编号,  $D_k$  和  $D_{k+1}$  分别为  $P_k$  和  $P_{k+1}$  处的一阶导数,  $x(t)$ 、 $y(t)$  为坐标分量。图 3 所示为一条 Hermite 样条曲线。

## 2.4 B 样条化与均匀离散化

B 样条化可采用二次或三次 B 样条曲线。B 样条曲线的优点在于其局部调整性,即在调整控制点时只引起与该控制点相邻的曲线变化,同时具有仿射不变性,且时间复杂度较低,如图 4 所示。

要构建封闭的 B 曲线,需给定  $n+1$  个控制点,坐标点  $P(i)$  ( $i=0, 1, 2, \dots$ ),  $n$  次 B 样条曲线段的参数表达式为:

$$P(t) = \sum_{i=0}^n P_i F_{i,n}(t), \quad t \in [0, 1], \quad (6)$$

其中,  $t$  为参数,  $F_{i,n}(t)$  为  $n$  次 B 样条曲线的基函数:

$$F_{i,n}(t) = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n-i} (-1)^j C_{n+1}^j (t+n-i-j)^n. \quad (7)$$

多边形经过相应的简化和样条化之后,为进一步提升加工效率,可将多边形边界点进行均匀离散化操作.多边形均匀离散化的思想是将样条化后得到的数个连续曲线进行均匀分段,将分段后的端点坐标存入顶点序列作为新的模型,实现对前文中样条化后多边形的优化.此方法可自主设置分段数目来进行均匀离散化程度的调整,适应于 Hermite 样条化和 B 样条化后的多边形.均匀离散化后的多边形顶点在机械加工过程有着重要意义,可使得每一条指令的路径长度基本一致,便于改善加工效率.

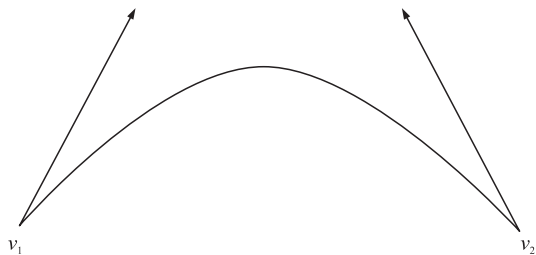


图3 Hermite样条曲线

Fig.3 Hermite parametric curve

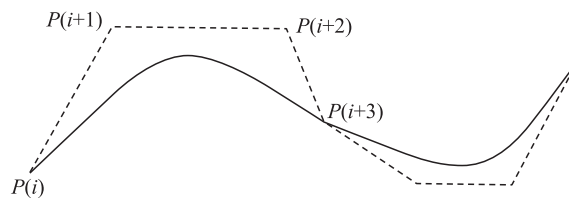


图4 B样条化

Fig.4 B-spline

### 3 实验分析

设定实验环境为 Intel Core i5-4460 3.20 GHz,平台为 Visual Studio 2010,设定实验对象为一个带有明显凹点的不规则多边形(161个顶点,如图5所示),针对该多边形依次进行了顶点的简化、样条化及均匀离散化操作,以验证算法的有效性.

#### 3.1 简化多边形

- (1)导入原始多边形(图5);
- (2)分别给定阈值 2.1、6.1、10.1,允许最大删除点数 50、150;
- (3)使用夹角优化的最小顶点面积删除算法删除顶点.

实验结果如图6~图10所示.

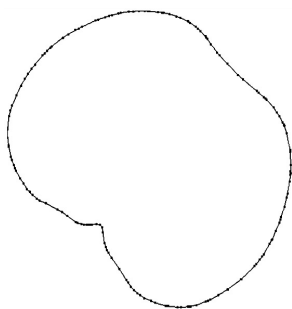


图5 原始多边形

Fig.5 Original polygon

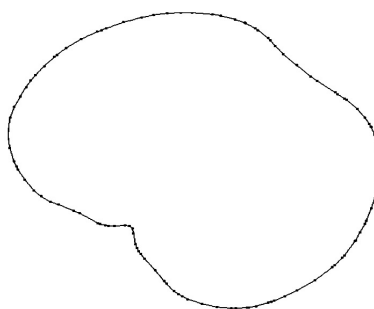


图6 阈值2.1,可删除最多顶点数50

Fig.6 Threshold=2.1,maxnum vertices=50

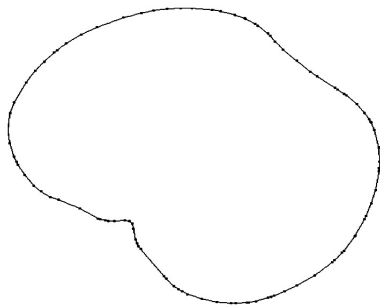


图7 阈值2.1,可删除最多顶点数150

Fig.7 Threshold=2.1,maxnum vertices=150

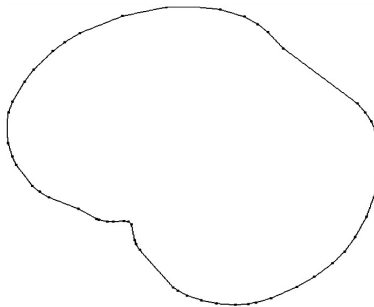


图8 阈值6.1,可删除最多顶点数150

Fig.8 Threshold=6.1,maxnum vertices=150



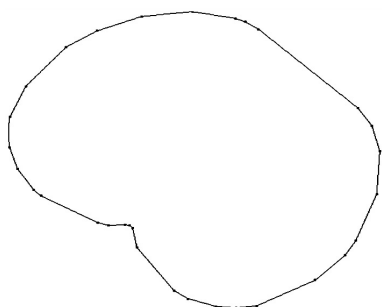


图9 阈值 10.1,可删除最多顶点数 150

Fig.9 Threshold=10.1,maxnum vertices=150

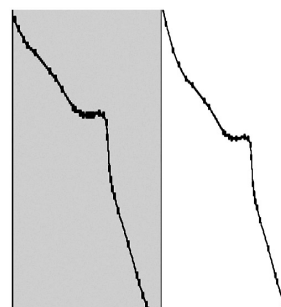


图10 5与图6局部对比图

Fig.10 Local contrast of Fig.5 and Fig.6

删除顶点后的结果分析如表 1 所示.

由图 6~图 11 及表 1 可以看出,本文所用的简化算法能够有效地减少多边形顶点的数目,同时能够保持原有的凹点特征,能够删除的顶点数目随着阈值的变大而变多.图 10 为原图与阈值  $K=2.1$  简化后的局部对比图,可以看出较低阈值时边界点的减少对原有的轮廓产生的影响非常小.从图 11 可以看出,随着阈值变大,删除的总点数增加,删除速率下降.

表 1 删除顶点后的结果分析表

Table 1 Results after deleting vertices

结果	阈值 $K$	允许删除最大顶点数	删除点数
图 6	2.1	50	32
图 7	2.1	150	58
图 8	6.1	150	106
图 9	10.1	150	129

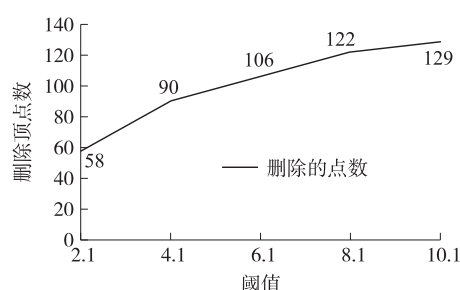


图 11 阈值与删除最大顶点数的关系图

Fig.11 Figure of the relationship between the threshold and the maximum number of vertices deleted

文献[14]中夹角最大顶点删除法、最小面积法和边折叠算法在保持原有多边形特征的前提下简化率最高达到 71.1%,而本文算法在阈值设置为 6.1 时多边形简化率为 71%,当设置阈值为 10.1 时简化率达到 80%,可见本文所使用的算法是可行且高效的.

### 3.2 Hermite 样条化及均匀离散化

Hermite 样条化具体实现过程为:

- (1)构建新的顶点序列  $sVertexes$ ;
- (2)选择顶点序列,根据  $P_1, P_2, P_3$  3 个原顶点得到  $P_1 \rightarrow P_2$  边的中点  $V_1, P_2 \rightarrow P_3$  边的中点  $V_2$ ;
- (3)将  $V_1, V_2$  作为起止的型值点,计算切向量;
- (4)根据式(4)、(5)计算新点的  $x, y$  坐标分量,返回新的坐标;
- (5)建立  $(sVertexes \text{ 个数} - 3)$  次 Hermite 曲线;
- (6)计算保留每个样条的顶点夹角参数  $\delta Angles$ .

均匀离散化过程为:

- (1)将  $\delta Angles$  中的最小值作为从曲线段中取点的指标;
- (2)根据上文样条化过程中存储的  $\delta Angles$  计算当前 Hermite 曲线的分段数  $k_i$ :

$$k_i = \delta Angles(i) / \delta;$$

- (3)将均匀离散化后的顶点序列存入新序列  $tVertexes$ .

实验结果如图 12~图 15 所示.

当设置式(2)中的  $t=0.5$  时,图 12~图 14 分别为图 7~图 9 的样条化加均匀离散化后的结果,图 14 为局部对比图,可以看出多边形边界轮廓更加光滑、均匀,用这种图形进行加工,更利于三维模型的成型和输出.

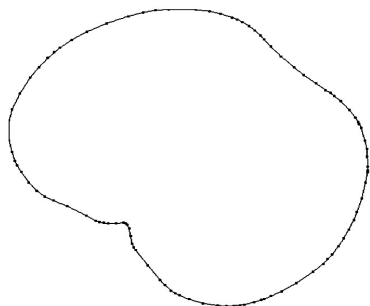


图12 图7经过样条化及均匀离散化后的结果  
Fig.12 Results of Fig.7 spline and discrete

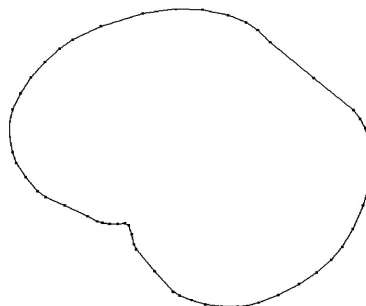


图13 图8经过样条化及离散化后效果  
Fig.13 Results of Fig.8 spline and discrete

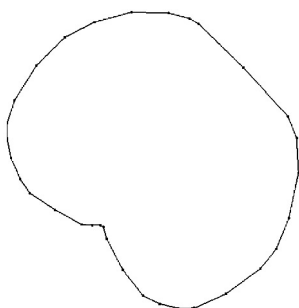


图14 图9经过样条化及离散化后的结果  
Fig.14 Results of Fig.9 spline and discrete

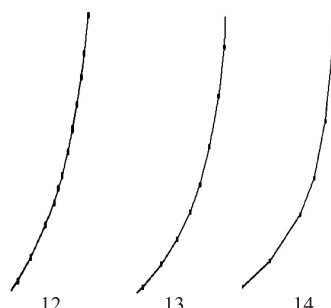


图15 图12,13,14局部对比图  
Fig.15 Local contrast of Fig.12, Fig.13 and Fig.14

## 4 结语

本文选择在三维打印及机械制造环境下,针对底层多边形存在的数据点冗余、形状粗糙等问题,结合传统多边形处理方法,在保持底层多边形原有特征的同时,通过多边形简化来减少需要处理的多边形顶点,样条化多边形以及对顶点进行均匀离散化,使得多边形表面变得更加平滑.通过对底层多边形的一系列优化来提高三维打印中模型成型的质量和效率,同时也能够适用于机械加工业中模型的切割加工等工作,对于实际生产加工有着重要意义.接下来将尝试多边形内部点的简化,同时对三维模型切片过程中产生的多边形轮廓错误问题进行修复,实现多边形的全面优化.

## [参考文献](References)

- [1] JACOBS P F. Rapid prototyping& manufacturing: fundamentals of stereolithography[M]. Dearborn, Nichigan: Society of manufacturing engineers SME-CASA, 1992: 1-23.
- [2] 韩霞, 杨恩源. 快速成型技术与应用[M]. 北京: 机械工业出版社, 2012.  
HAN X, YANG E Y. The technology and application of rapid prototyping[M]. Beijing: China Machine Press, 2012. (in Chinese)
- [3] WOHLERS T T, CAFFREY T, WOHLERS I. Wohlers report 2013: additive manufacturing and 3D printing state of the industry: annual worldwide progress report[M]. Fort Collins, Colorado: Wohlers Associates, 2013.
- [4] 周伟民, 闵国全, 李小丽. 3D 打印医学[J]. 组织工程与重建外科杂志, 2014(1): 1-3.  
ZHOU W M, MIN G Q, LI X L. 3D printing in medicine[J]. Journal of tissue engineering and reconstructive surgery, 2014(1): 1-3. (in Chinese)
- [5] 李娜, 程继红, 杨继全. 3DP 分层切片中基于点云射线投影的 NURBS 曲面切片算法[J]. 机械科学与技术, 2015(2): 242-246.  
LI N, CHENG J H, YANG J Q. Research on ray-NURBS slicing method directly from point cloud for 3DP[J]. Mechanical science and technology for aerospace engineering, 2015(2): 242-246. (in Chinese)
- [6] CIGNONI P, MONTANI C, SCOPIGNO R. A comparison of mesh simplification algorithms[J]. Computers and graphics, 1998, 22(1): 37-54.

- [7] GOTSMAN C, GUMHOLD S, Kobbelt L. Simplification and compression of 3D meshes[M]//ISKE A, QUAK E, FLOATER M. Tutorials on multiresolution in geometric modelling. Berlin Heidelberg:Springer, 2002:319-361.
- [8] ERIKSON C. Polygonal simplification: an overview, TR96-016[R]. Chapel Hill: University of North Carolina, 1996.
- [9] LUEBKE D. A developer's survey of polygonal simplification algorithms[J]. IEEE computer graphics and applications, 2001, 21(3):24-35.
- [10] 郭力真, 吴恩华. 多边形模型简化算法综述[J]. 计算机应用研究, 2005(8):20-23, 42.  
GUO L Z, WU E H. Survey of polygonal model simplification algorithms[J]. Application research of computers, 2005(8):20-23, 42. (in Chinese)
- [11] 刘亚姝, 严寒冰, 范友贵. 多边形简化算法及比较[J]. 计算机工程, 2009, 23:227-228.  
LIU Y S, YAN H B, FAN Y G. Polygon simplification algorithms and comparison[J]. Computer engineering, 2009, 23:227-228. (in Chinese)
- [12] HOPPE H, DEROSSET, DUCHAMPT, et al. Mesh optimization[J]. Computer graphics, 1993, 27(1):19-26.
- [13] 张弘, 兰孝奇. 一种基于边折叠的改进三角网格简化方法[J]. 工程勘察, 2014(10):48-51.  
ZHANG H, LAN X Q. An improved triangle mesh simplification based on edge collapse[J]. Geotechnical investigation & surveying, 2014(10):48-51. (in Chinese)
- [14] GARLAND M, HECKBERT P S. Surface simplification using quadric error metrics[C]//Proceedings of SIGGRAPH 97, International Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques 1997. New York, USA:ACM Press, 1997:209-216.
- [15] GARLAND M, ZHOU Y. Quadric-based simplification in any dimension[J]. ACM transaction on graphics, 2005, 24(2):209-239.
- [16] 李军成, 谢淳, 杨炼. 三次 Hermite 参数曲线与曲面的扩展[J]. 计算机工程与科学, 2013(1):113-118.  
LI J C, XIE C, YANG L. Extensions of cubic hermite parametric curve and surface[J]. Computer engineering & science, 2013(1):113-118. (in Chinese)
- [17] 车丹. B 样条曲线在汽车 CAD 软件中的应用[J]. 汽车零部件, 2013(1):60-64.  
CHE D. Application of B-spline curve in the automobile CAD software[J]. Automobile parts, 2013(1):60-64. (in Chinese)

[责任编辑:严海琳]