

# 基于非线性自适应度函数的遗传算法 求取自由曲面最大主曲率研究

赵世田,付莹莹,曾 勇,郑 雷,周 博

(盐城工学院机械工程学院,优集学院,江苏 盐城 224051)

[摘要] 针对自由曲面最大主曲率求取问题及其主曲率的特点,设计了一种改进的遗传算法非线性自适应度函数,并给出了种群个体的选择及复制新规则.通过 Schaffer 函数进行测试,并用于自由曲面最大主曲率求取,实例验证表明算法可以稳定、准确地求取到自由曲面上的全局最大主曲率,比较曲面离散法的计算量不足 1/3,极大地提高了计算效率.

[关键词] 非线性自适应度函数,遗传算法,最大主曲率

[中图分类号] TP391 [文献标志码] A [文章编号] 1672-1292(2018)03-0019-06

## Research in Calculation of Principal Curvature of Free-form Surface Based on Non-linear Automatic Fitness Function of Genetic Algorithm

Zhao Shitian, Fu Yingying, Zeng Yong, Zheng Lei, Zhou Bo

(School of Mechanical Engineering, UGS College, Yancheng Institute of Technology, Yancheng 224051, China)

**Abstract:** Improved genetic algorithm(IGA) is proposed aiming at the calculation of maximum principal curvature of free-form surface. A novel non-linear automatic fitness function is designed according to the features of the principal curvature, and new selection rules of the units to be selected are presented. The IGA is tested through the Schaffer function and applied to the maximum principal curvature calculation of free-form surface. Verification example shows that the maximum principal curvature of the freeform surface can be calculated accurately and stably by the IGA. The number of calculation of the points is less than one third of that of the free-form surface discrete method. The efficiency of computation is improved greatly.

**Key words:** non-linear automatic fitness function, genetic algorithm, maximum principal curvature

基于自由曲面的主曲率最大值确定的刀具尺寸,在加工自由曲面时不会发生曲率干涉等现象.因此,自由曲面上的主曲率分析对于其加工非常重要.但自由曲面方程大多数是基于递推形式进行定义<sup>[1]</sup>,很难根据方程显式计算得到最大主曲率,目前国内外学者多数是先根据精度要求离散自由曲面,再求取最大主曲率<sup>[2-3]</sup>,得到大量的网格节点和法曲率值所构成的数字化曲率曲面模型,最大主曲率值求取的计算精度和计算效率取决于曲面离散精度.因此,快速准确地找到自由曲面上的最大主曲率就显得非常重要.

自由曲面最大主曲率求取属于参数域范围内的全局优化问题,而遗传算法模拟了自然界生物“适者生存,优胜劣汰”的进化过程<sup>[4]</sup>,在全局寻优方面有很大优势,本文提出了改进的遗传算法,根据自由曲面主曲率的特点设计了一种新的遗传算法适应度函数,并给出了新的复制规则,通过 Schaffer 函数进行了测试,将该遗传算法应用于求取自由曲面最大主曲率.

收稿日期:2018-04-18.

基金项目:国家自然科学基金(51305379)、江苏省“青蓝工程”项目.

通讯联系人:赵世田,博士,讲师,研究方向:数控技术、CAD/CAM 技术. E-mail: zhao\_sq2005@126.com

# 1 遗传算法及优化目标函数

## 1.1 遗传算法及其适应度函数

遗传算法是一种基于遗传学和计算机科学的新优化方法,算法引入了复制、杂交、变异等概念,在构造了初始种群后,根据目标函数和适应度并进行循环复制、杂交和变异操作,求取全局最优解<sup>[5]</sup>. 其中,算法中进行优胜劣汰时的复制、杂交和变异的依据就是各个体的适应度,适应度是描述个体性能的主要指标,它反映了个体或解的优劣性<sup>[6-8]</sup>. 因此,适应度函数设计不佳会导致算法退化或早熟.

适应度函数  $F(x)$  一般对应了目标函数  $f(x)$ , 其设计应该满足 3 个条件: (1) 非负值, (2) 单值连续, (3) 规范性,  $[\min(f(x)), \max(f(x))] \rightarrow [0, 1]$ . 其中非负值极为重要.

遗传算法比较常见的适应度函数主要有最小系数法、最大系数法和相对系数法等<sup>[9]</sup>.

如果目标函数对应为效能函数  $u(x)$  最大值问题, 则:

$$F(x) = \begin{cases} u(x) + C_{\min}, & u(x) + C_{\min} > 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1)$$

式中,  $C_{\min}$  是最小系数.

如果目标函数对应为代价函数  $g(x)$  最小值问题, 则:

$$F(x) = \begin{cases} C_{\max} - g(x), & g(x) < C_{\max}, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (2)$$

式中,  $C_{\max}$  是最大系数<sup>[10]</sup>.

上述最大、最小系数均需要预估函数  $f(x)$  的最大值和最小值, 不可能十分精确, 其后果就是导致适应度函数不灵敏, 算法可能提前收敛于某个局部最优解, 或退化为随机选择过程, 影响了算法的应用效果.

## 1.2 自由曲面的主曲率

任意自由曲面  $S(u, v)$  对参数  $u$  和  $v$  可求一阶和二阶偏导数,

$$S_u = \frac{\partial S}{\partial u}, S_v = \frac{\partial S}{\partial v}, S_{uu} = \frac{\partial^2 S}{\partial u^2}, S_{uv} = \frac{\partial^2 S}{\partial u \partial v}, S_{vv} = \frac{\partial^2 S}{\partial v^2}. \quad (3)$$

曲面上任意点的单位法矢量  $n$  为

$$n = \frac{S_u \times S_v}{|S_u \times S_v|}. \quad (4)$$

自由曲面上任意方向上的法曲率为

$$k_n = \frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{Ldu^2 + 2Mdu dv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2}. \quad (5)$$

式中,  $\varphi_1$ 、 $\varphi_2$  分别是曲面的第一、第二基本形式,  $E = S_u \cdot S_u$ 、 $F = S_u \cdot S_v$ 、 $G = S_v \cdot S_v$  是曲面的第一类基本量,  $L = n \cdot S_{uu}$ 、 $M = n \cdot S_{uv}$ 、 $N = n \cdot S_{vv}$  是曲面的第二类基本量.

曲面上任意一点的主曲率是曲面上该点法曲率的最大值和最小值:

$$k_{1,2} = H \pm \sqrt{H^2 - K}. \quad (6)$$

式中,  $H$  是平均曲率,  $K$  是高斯曲率.

$$\begin{cases} H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \frac{LG - 2MF + NE}{2(EG - F^2)}, \\ K = k_1 k_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}. \end{cases} \quad (7)$$

## 1.3 自由曲面主曲率的优化目标

自由曲面的最大主曲率优化模型:

$$\begin{cases} \max k(u, v), \\ \text{s.t. } u, v \in [0, 1]. \end{cases} \quad (8)$$

式中,  $u$  和  $v$  是自由曲面参数.

对于自由曲面上的任意一点,该点的主曲率可能为正,也可能为负,例如抛物点、凸椭圆点等,其主曲率最大值和最小值均事先未知,无法确定上述适应度函数的最大或最小系数.因此,以上适应度函数不适用于求取自由曲面最大主曲率问题.本文构造了一种非线性自适应度函数,以解决上述问题.

## 2 非线性自适应度函数

### 2.1 非线性自适应度函数设计

新构造的非线性自适应度函数  $F(u, v)$ :

$$F(u, v) = \begin{cases} \frac{1}{1 + \left(\frac{k_{\max} - k}{k_{\max} - k_{\varepsilon}}\right)^{\beta}}, & k < k_{\varepsilon}, \\ \frac{\left(\frac{k_{\max} - k}{k_{\max} - k_{\varepsilon}}\right)^{\alpha}}{1 - \frac{\left(\frac{k_{\max} - k}{k_{\max} - k_{\varepsilon}}\right)^{\alpha}}{2}}, & k \geq k_{\varepsilon}. \end{cases} \quad (9)$$

式中,  $k_{\varepsilon} = (1 - \varepsilon)k_{\min} + \varepsilon k_{\max}$ .  $k$ 、 $k_{\max}$  和  $k_{\min}$  分别表示根据当前种群的参数计算得到的主曲率及其最大值、最小值,  $\alpha$ 、 $\beta$  和  $\varepsilon$  是调节系数. 当系数  $\alpha = 0.5$ 、 $\beta = 2$  时,非线性自适应度函数曲线形状如图 1 所示.

当系数  $\alpha$  取 0.5、1、1.5 不同数值时会有不同的效果.  $\alpha = 1.5$  时具有  $\alpha = 0.5$  相反的效果,即在全局最优值附近变化较为缓慢的函数,可以适当拉近最优解附近点的适应度值,防止收敛于局部最优解. 当  $\alpha = 1$  时,适应度函数值在  $[0.5, 1]$  之间是线性变化的.

设计的非线性自适应度函数在进化过程中能够进行动态调整以满足非负值以及单值连续性的要求. 当  $f(u, v) = k_{\max}$  时,  $F(u, v) = 1$ , 进化起始阶段,能降低优异个体适应度以保证种群多样化. 进化过程中,随着最大主曲率  $k_{\max}$  和最小主曲率  $k_{\min}$  的不断改变,适应度小的个体将被淘汰. 适应度函数动态调整并扩大差异化个体间适应度函数值,尤其是在进化后期能提高优势个体的竞争性并胜出.

### 2.2 非线性自适应度函数分析

对于两个不同的种群 1 和 2 (如图 2 所示), 分析上述非线性自适应度函数. 当主曲率的最小值  $k_{\min}$  相同而最大值不同时 ( $k_{\max}^2 > k_{\max}^1$ ), 对于具有相同主曲率值  $k_1(u, v) = k_2(u, v)$  的个体来说,  $F_1(k_1(u, v)) > F_2(k_2(u, v))$ , 因此,该个体在种群 2 中将会被淘汰,而在种群 1 中将会被保留. 同样的效果会出现在当主曲率最小值不同 ( $k_{\min}^1 < k_{\min}^2$ ) 而主曲率最大值  $k_{\max}$  相同时 (如图 3 所示), 对于具有相同主曲率值  $k_1(u, v) = k_2(u, v)$  的个体来说,  $F_1(k_1(u, v)) > F_2(k_2(u, v))$ , 因此该个体在种群 2 中将被淘汰,而在种群 1 中将被保留.

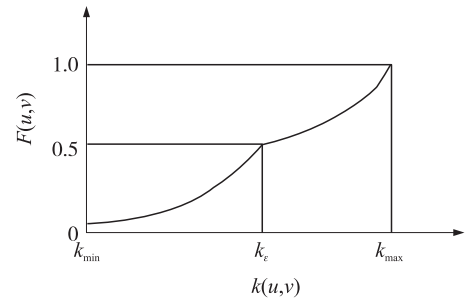


图 1 非线性自适应度函数曲线

Fig. 1 Curve of non-linear automatic fitness function

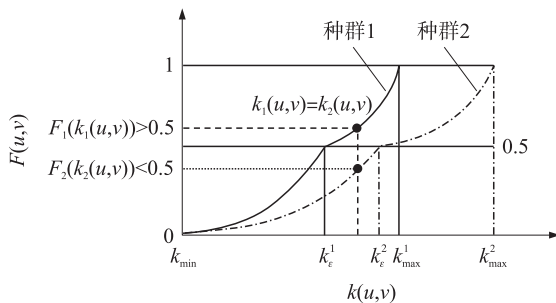


图 2 同一个  $k_{\min}$  值对应不同的适应度函数曲线

Fig. 2 Different fitness function curve corresponding to the same  $k_{\min}$

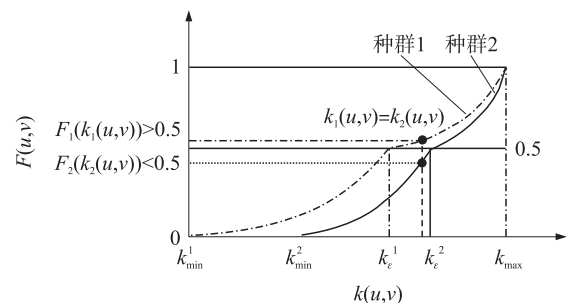


图 3 同一个  $k_{\max}$  值对应不同的适应度函数曲线

Fig. 3 Different fitness function curve corresponding to the same  $k_{\max}$

3 新的选择复制法

根据上述非线性自适应度函数计算每个个体的适应度值,需要按照一定规则从当前代种群选择一定数量的个体,复制后得到下一代种群. 传统的选择复制方法主要有期望值法、随机遍历法、轮盘法和种群交流法等<sup>[7]</sup>,它们各有优劣,本文拟定 6 条新的选择和复制规则:

- (1) 引入黄金分割比系数 0.618,根据种群数目计算要复制到下一代种群的个体数,
- (2) 当前代种群最佳个体直接晋级下一代种群,
- (3) 为了保证进化种群的多样性,防止结果收敛于次优解,保留种群中的两个特殊个体: $\{0000000000000000\}$ 、 $\{1111111111111111\}$ <sup>[11]</sup>,
- (4) 排序个体的非线性自适应度函数值,用期望值法进行复制,
- (5) 将复制后的个体编码的最后 3 位进行随机变异,
- (6) 种群数目不足部分可用随机生成进行补足.

4 验证实例

4.1 Schaffer 函数最大值求取验证实例

Schaffer 函数是函数优化中的一个典型测试函数,用其最大值求取来测试提出的改进遗传算法及非线性自适应度函数.

Schaffer 函数:

$$f(x_1,x_2)=0.5-\frac{\sin^2\sqrt{x_1^2+x_2^2}-0.5}{(1+0.001(x_1^2+x_2^2))^2}$$

(10)

式中, $x_i \in [-100,100] (i=1,2)$ . 该函数的特点是定义域内有无数个局部极大值点,围成一圈,它们的平均值为 0.990 28,环形包围着一个全局最大点  $f(0,0)=1$ ,如图 4 所示. 采用传统的优化算法易于陷入局部最优值,难以搜索到全局最大点.

采用本文改进的遗传算法,经实践验证种群数量选择 40 较合适,个体长度为 16 位,高 8 位表示  $x_1$ ,低 8 位表示  $x_2$ ,交叉概率  $P_c=0.35$ ,变异概率  $P_m=0.01$ ,进化代数分别为 100、200 和 500 代,运算次数分别为 50、100、200 和 500 次. 应用本文的非线性自适应度函数,分别采用本文的选择复制法和轮盘法进行个体选择,表 1 和表 2 分别为本文提出的新选择方法和轮盘法求取到全局最大点的统计次数. 测试结果显示:函数最大值一般出现在 100~400 代之间,采用新的选择复制方法在 500 代以内能 100%求取到全局最大值,而轮盘法等其它方法不能保证.

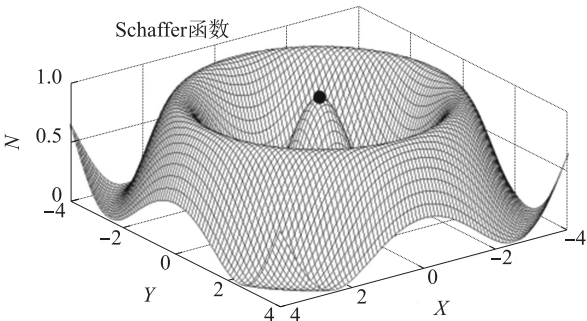


图 4 Schaffer 函数  
Fig. 4 Schaffer function

表 1 Schaffer 函数测试统计结果(新选择方法)  
Table 1 Statistics of the Schaffer function test  
(by new selection method)

运算次数	运算代数		
	100	200	500
50	42(84%)	47(94%)	50(100%)
100	82(82%)	93(93%)	100(100%)
200	166(83%)	185(92.5%)	200(100%)
300	251(83.7%)	284(94.7%)	300(100%)

表 2 Schaffer 函数测试统计结果(轮盘法)  
Table 2 Statistics of the Schaffer function test  
(by roulette wheel method)

运算次数	运算代数		
	100	200	500
50	37(74%)	45(90%)	49(98%)
100	76(76%)	88(88%)	98(98%)
200	145(72.5%)	178(89%)	194(97%)
300	241(80.3%)	268(89.3%)	297(99%)

4.2 自由曲面最大主曲率求取验证实例

实验选取图 5 所示自由曲面,应用本文改进遗传算法求取其最大主曲率. 设置遗传算法的非线性自

适应度函数中的系数  $\alpha=0.5$ 、 $\beta=2$  和  $\varepsilon=0.618$ ,最大迭代运算代数 500 代.

经改进遗传算法运算得到自由曲面上的最大主曲率  $k_{m1}=0.200\ 6$ ,对应的曲面定义域参数为  $(u_{m1}, v_{m1})=(0.757,0.79)$ ,在进化到第 353 代时收敛到了主曲率最大值,自由曲面上对应最大主曲率的点  $(26.53,24.05,-9.73)$ (图 5 所示小球位置).采用文献[2-3]的曲面离散法,离散步长  $\Delta=0.004$ ,得到最大主曲率  $k_{m2}=0.200\ 8$ ,对应  $(u_{m2}, v_{m2})=(0.76, 0.792)$ .

先求取了自由曲面对参数  $u$  和  $v$  的一阶和二阶偏导数,才能计算主曲率  $k(u,v)$ ,采用本文改进遗传算法,当种群规模为  $m=40$ ,运算 500 代,只需计算 20 000 个自由曲面上点的主曲率.用曲面离散法<sup>[2-3]</sup>,同样采样精度,需要计算 63 001 个点的主曲率,进一步求取精确的最大主曲率,则在局部最大值对应曲面点附近小区域内进一步离散细化曲面,计算量更高.对比曲面离散法可见,采用本文遗传算法的总计算量不足曲面离散法的 1/3.

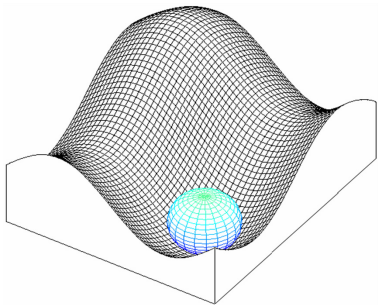


图 5 最大主曲率求取

Fig. 5 Calculation of the maximum principal curvature

表 3 最大主曲率求取对比

Table 3 Comparasion of the calculation of the maximum principal curvature

	最大主曲率	参数位置	计算点个数	最小曲率半径
本文算法	0.200 6	$u_{m1}=0.757$ $v_{m1}=0.79$	20 000	4.985 mm
离散法	0.200 8	$u_{m2}=0.76$ $v_{m2}=0.792$	63 001	4.980 mm

5 结语

上述非线性自适应度函数及改进遗传算法经过了函数优化中的典型测试函数 Schaffer 函数最大值求取测试,并应用于求取自由曲面上的最大主曲率.分析结果显示:

- (1)函数最大值一般出现在 100~400 代之间.
- (2)采用轮盘法在 500 代内不能完全保证 100%的求取到全局最大点,而本文给出的新的选择复制法能 100%求取到全局最大值.
- (3)同等精度前提下,本文算法最大主曲率求取计算量不足曲面离散法计算量的 1/3,求取精度及效率更高.

[参考文献](References)

[1] CAMPBELL R J,FLYNN P J. A survey of free-form object representation and recognition techniques[J]. Computer vision and image understanding,2001,81(2):166-210.

[2] LI L L,ZHANG Y F. Cutter selection for 5-axis milling of sculptured surfaces based on accessibility analysis[J]. International journal of production research,2006,44(16):3303-3323.

[3] LI H Y,ZHANG Y F. Automatic tool-path generation in 5-axis finish cut with multiple cutters[C]//Human-Computer Interfaces and Measurement Systems. Hong Kong,2009:210-213.

[4] 于金,高彦梁. 遗传算法优化刀具角度对加工变形控制的研究[J]. 组合机床与自动化加工技术,2016,53(3):141-143. YU J,GAO Y L. Study on GA optimize tool angels to control milling deformation[J]. Modular machine tool and automatic manufacturing technique,2016,53(3):141-143.(in Chinese)

[5] 赵世田,赵东标,付莹莹,等. 基于改进遗传算法求取加工自由曲面的最大刀具尺寸[J]. 计算机集成制造系统,2011,17(2):289-293. ZHAO S T,ZHAO D B,FU Y Y,et al. Maximum cutter size calculating for free-form surface machining based on improved genetic algorithm[J]. Computer integrated manufacturing systems,2011,17(2):289-293.(in Chinese)

[6] 王晶,张庆,梁霖,等. 采用遗传算法的自适应随机共振系统弱信号检测方法研究[J]. 西安交通大学学报,2010,44(3):32-36. WANG J,ZHANG Q,LIANG L,et al. Adaptive stochastic resonance based on genetic algorithm with applications in weak signal detection[J]. Journal of Xi'an jiaotong university,2010,44(3):32-36.(in Chinese)



- [7] 王允臣,毕方明. 采用遗传算法优化点点连格棋评估函数参数[J]. 计算机工程与应用,2018,54(3):120-124.  
WANG Y C, BI F M. Using genetic algorithm to optimize parameters of evaluation function of Dots-and-Boxes[J]. Computer engineering and applications,2018,54(3):120-124.(in Chinese)
- [8] 林阳,赵欢,丁汉. 基于多种群遗传算法的一般机器人逆运动学求解[J]. 机械工程学报,2017,53(3):1-8.  
LIN Y,ZHAO H,DING H. Solution of inverse kinematics for general robot manipulators based on multiple population genetic algorithm[J]. Journal of mechanical engineering,2017,53(3):1-8. (in Chinese)
- [9] 朱剑英. 智能系统非经典数学方法[M]. 武汉:华中科技大学出版社,2001.  
ZHU J Y. Non-classical mathematics for intelligent system[M]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press,2001.(in Chinese)
- [10] 李楠,刘朋,邓人博,等. 基于改进遗传算法的无人机三维航路规划[J]. 计算机仿真,2017,34(12):22-25.  
LI N,LIU P,DENG R B,et al. Three dimensional path planning for unmanned aerial vehicles based on improved genetic algorithm[J]. Computer simulation,2017,34(12):22-25.(in Chinese)
- [11] 席光,蔡永林. 用改进遗传算法求取曲面间最小距离[J]. 计算机辅助设计与图形学学报,2002,14(3):209-213.  
XI G,CAI Y L. Calculation of minimum distance between free-form surfaces by improved genetic algorithm[J]. Journal of computer-aided design and computer graphics,2002,14(3):209-213.(in Chinese)

[责任编辑:陈 庆]

(上接第18页)

- [13] CONTI M,CRANE S,FRASSETTO T,et al. Selfrando: securing the Tor browser against de-anonymization exploits[J]. Proceedings on privacy enhancing technologies,2016(4):454-459.
- [14] 廖小平. 对前向安全代理盲签名方案的分析与改进[J]. 计算机系统应用,2018,27(3):217-220.  
LIAO X P. Analysis and improvement of forward secure proxy blind signature scheme[J]. Computer systems and applications,2018,27(3):217-220.(in Chinese)
- [15] ANON. Forward security[EB/OL]. (2018-05-25). [https://zh.wikipedia.org/wiki/Forward\\_security](https://zh.wikipedia.org/wiki/Forward_security).
- [16] JUAN P T,THIBAUT C,ISABELLE C,et al. Evaluation of the anonymous I2P network's design choices against performance and security[C]//ICISSP 2015—Proceedings of the 1st International Conference on Information Systems Security and Privacy. Angers,France,2015.

[责任编辑:严海琳]