

# 基于格子 Boltzmann 方法的倾斜方腔自然对流模拟

朱建奇<sup>1</sup>, 侯佳煜<sup>1</sup>, 杲东彦<sup>2</sup>, 林福建<sup>1</sup>, 陈玮玮<sup>1</sup>, 鹿世化<sup>1</sup>

(1.南京师范大学能源与机械工程学院,江苏 南京 210042)

(2.南京工程学院能源与动力工程学院,江苏 南京 211167)

[摘要] 采用格子 Boltzmann 方法对二维封闭方腔自然对流换热进行研究. 通过数值模拟得到在不同  $Ra$  数和倾斜角  $\theta$  下,封闭方腔内的流场、温度场的变化情况. 再根据流场、温度场分析  $Ra$  数、倾斜角  $\theta$  对封闭方腔自然对流换热的影响. 结果表明, $Ra$  数的增大会增强自然对流换热,而倾斜角的增加使得自然对流换热增减交替,当倾斜角为  $90^\circ$  时,自然对流换热最弱.

[关键词] 自然对流,格子 Boltzmann 方法,数值模拟,倾斜角

[中图分类号] TK124 [文献标志码] A [文章编号] 1672-1292(2018)04-0019-08

## Simulation of Natural Convection in an Inclined Square Cavity Based on Lattice Boltzmann Method

Zhu Jianqi<sup>1</sup>, Hou Jiayu<sup>1</sup>, Gao Dongyan<sup>2</sup>, Lin Fujian<sup>1</sup>, Chen Weiwei<sup>1</sup>, Lu Shihua<sup>1</sup>

(1.School of Energy and Mechanical Engineering, Nanjing Normal University, Nanjing 210042, China)

(2.School of Energy and Power Engineering, Nanjing Institute of Technology, Nanjing 211167, China)

**Abstract:** Using the Lattice Boltzmann method, we study the natural convection heat transfer in a two-dimensional closed square cavity. Numerical simulation is carried out to obtain the situation of the flow field and temperature field in the closed square cavity under different Rayleigh numbers and inclined angles. According to the flow field and temperature field, the influences of Rayleigh numbers and inclined angles on the natural convection heat transfer in the closed square cavity are analyzed. The results show that the increase of Rayleigh numbers enhanced the natural convection heat transfer, while the increase of the inclined angles leads the natural convection heat transfer to increase or decrease. At the same time, when the inclined angle is  $90^\circ$ , the natural convection heat transfer is the weakest.

**Key words:** natural convection, Lattice Boltzmann method, numerical simulation, inclined angle

封闭腔体在工程领域中一直有广泛的应用,例如太阳能集热器、建筑物的绝热、中空玻璃窗、电子元件的散热、核反应堆的散热等. 但封闭腔体的传热又有其复杂性,考虑因素众多,机理复杂,封闭腔体的流动及换热问题一直是研究的重点.

国内外很多学者对封闭方腔自然对流传热问题进行了丰富的实验和深入的理论研究. Arnold J N<sup>[1]</sup>通过实验研究了不同纵横比的倾斜方腔自然对流换热,得到了不同纵横比下倾斜方腔换热的结果. 由于实验研究周期长、流动传热受环境影响较大,随着计算机技术的不断发展,数值研究逐渐成为主要的研究手段. Vahl Davis D G<sup>[2]</sup>通过数值方法获得了方腔自然对流方程的精确解,成为后续研究者研究自然对流换热问题做对比的基准解. Grgis I G<sup>[3]</sup>通过数值模拟研究了格拉晓夫准数  $Gr$ 、腔体的倾斜角  $\theta$  及腔体的纵横比  $Ar$  对封闭腔体的自然对流换热的影响. 秦国良<sup>[4]</sup>采用谱元法,求解了封闭方腔自然对流问题中的不可压缩 Naive-Stokes 方程和温度方程. 孟凡康<sup>[5]</sup>利用有限容积法对流动方程进行求解,分析了封闭方腔自然对流的熵产及其分布,结果表明不同的  $Ra$  数对熵产有很大的影响. 但以上研究均基于传统的数值方法,过程复杂、计算效率低,而格子 Boltzmann 方法结构简单、易于计算,因此逐渐受到研究者的关注. Shan X W<sup>[6]</sup>采用格子 Boltzmann 方法研究了 Rayleigh-benard 流动,结果表明格子 Boltzmann 方法可以准确有效

收稿日期:2018-06-01.

通讯联系人:鹿世化,博士,副教授,研究方向:数值模拟. E-mail:lushihua@njnu.edu.cn

地模拟流体流动过程中的热质传递. Onishi J<sup>[7]</sup>研究了 D2Q5 格子 Boltzmann 模型的自然对流传热问题,研究表明该模型也可以在忽略可压缩性及粘性的条件下,获得自然对流传热的特性. Jami M<sup>[8]</sup>采用格子 Boltzmann 方法研究了圆柱面在方腔不同位置的自然对流换热特性,研究表明流场、温度场会随着圆柱面位置的变化而变化. Huelsz G<sup>[9]</sup>采用格子 Boltzmann 方法分析了倾斜方腔自然对流换热,结果表明对称倾斜角下温度场、流线图也成对称分布,且流线方向可能顺时针也可能逆时针. 李培生<sup>[10]</sup>采用格子 Boltzmann 方法研究了内置高温体倾斜多孔方腔的自然对流,结果表明倾斜角增大会抑制方腔对流换热强度. 上述研究大多基于水平方腔,而倾斜方腔对流换热的研究相对较少,且倾斜方腔的范围也相对较窄. 本文以二维封闭方腔为研究对象,利用格子 Boltzmann 方法对倾斜封闭方腔自然对流进行数值模拟,获得不同  $Ra$  数( $10^4$ 、 $10^5$ 、 $10^6$ )和倾斜角  $\theta$ ( $0^\circ$ 、 $30^\circ$ 、 $60^\circ$ 、 $90^\circ$ 、 $120^\circ$ 、 $150^\circ$ 、 $180^\circ$ )下的封闭方腔流场和温度场,分析这些影响因素对自然对流换热的影响.

## 1 物理模型

图 1 为二维封闭方腔自然对流的物理模型,方腔宽、高均为  $L$ ,上下均为绝热壁面,左右壁面温度为  $T_h$ 、 $T_c$  ( $T_h > T_c$ ),方腔内为纯空气流体,且受重力影响.

## 2 数学模型

进行封闭方腔自然对流换热的数值计算时,为便于处理因温差引起的浮升力项,应当遵循 Boussinesq 近似<sup>[11-12]</sup>,其由 3 部分组成:(1)流体中的粘性耗散忽略不计.(2)除密度外其他物性参数均为常数.(3)密度仅考虑动量方程中与质量力有关的项,其余各项中的密度均看为常数.

### 2.1 控制方程

根据 Boussinesq 近似,描述该物理模型的控制方程有以下几类:

(1)连续性方程

$$\nabla \cdot u = 0. \quad (1)$$

式中, $u$  为流体速度.

(2)动量方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u = -\frac{1}{\rho} \nabla(p) + \nu \nabla^2 u + F. \quad (2)$$

式中, $p$  为压力(Pa); $F$  为外力项,包括  $F_x$  和  $F_y$ ;  $\nu$  为运动黏度( $m^2/s$ ).

$$F_x = g\beta(T - T_{ref}) \sin \theta, F_y = g\beta(T - T_{ref}) \cos \theta. \quad (3)$$

式中, $\beta$  为空气热膨胀系数; $T$  为空气温度( $^\circ C$ ); $T_{ref}$  为初始空气温度( $^\circ C$ ),  $T_{ref} = \frac{T_h + T_c}{2}$ .

(3)能量方程

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot [uT] = \frac{\lambda}{\rho c_p} \nabla^2 T. \quad (4)$$

式中, $\rho$  为密度, $c_p$  为定压比热容.

### 2.2 边界条件

封闭方腔几何尺寸为  $L \times L$ ,方腔内为纯空气.  $u=v=0$ ,左右壁面分别为高、低温壁面,上、下壁面绝热且不可渗透,壁面无滑移. 数学表达式如下:

$$\begin{cases} T = T_h, & x = 0, \\ T = T_c, & x = L, \\ \partial T / \partial y = 0, & y = 0, \\ \partial T / \partial y = 0, & y = L. \end{cases}$$

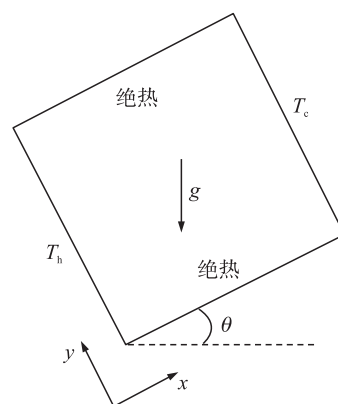


图 1 封闭方腔物理模型

Fig. 1 Closed square cavity physical model

### 2.3 无量纲准数

$$Pr = \frac{\nu}{a}, \quad (5)$$

$$Ra = \frac{g\beta\Delta TL^3}{\nu a}. \quad (6)$$

式(5)和式(6)中, $Pr$ 为普朗特数; $\nu$ 为运动黏度( $\text{m}^2/\text{s}$ ); $a$ 为热扩散系数( $\text{m}^2/\text{s}$ ); $Ra$ 为瑞利数; $\Delta T$ 为高、低温壁面温差( $^\circ\text{C}$ ).

## 3 格子 Boltzmann 方法

格子 Boltzmann 方法(Lattice Boltzmann method, LBM)是基于格子气自动机的主要原理在介观层次上,根据分子运动建立起来的简化了的动力学模型,对其在离散的格子上进行计算,然后通过对大量格子的平均获得的宏观结果. LBM 方法相比较传统数值计算方法而言,有算法简单、复杂边界易于设置、便于并行计算、程序便于实施的优势,因而 LBM 方法已被广泛地认为是描述流体流动和处理工程问题的有效手段. 为了提高数值计算的精度,本文使用以压力分布函数和内能分布函数为基本演化变量的 LBM 模型,压力分布函数模拟速度场,内能分布函数模拟温度场,二者通过外力项进行耦合.

### 3.1 宏观统计量

为了获得密度、速度和温度,应用微观分布函数的宏观求和统计计算,公式如下,即

$$\rho = \sum_a f_a, \quad (7)$$

$$u = \sum_a e_a f_a / \rho + \frac{\delta t}{2} F, \quad (8)$$

$$T = \sum_a g_a. \quad (9)$$

式中, $f_a$ 为某一点上 $a$ 个分量或方向上的压力分布函数, $e_a$ 为格子速度, $\delta$ 为步长, $g_a$ 为某一点上 $a$ 个分量或方向上的温度分布函数.

通常,在二维空间中一点9个分量的模型,如图2所示,这样的模型称为 D2Q9 模型<sup>[13]</sup>,进而可以求出平衡态分布函数.

### 3.2 格子演化方程

为了求出区域内各离散点上的压力分布函数、温度分布函数,求得各宏观量,因此有以下演化方程,即

$$f_a(r+e_a\delta t, t+\delta t) - f_a(r, t) = -\frac{1}{\tau} [f_a(r, t) - f_a^{\text{eq}}(r, t)] + \delta t F_i, \quad (10)$$

$$g_a(r+e_a\delta t, t+\delta t) - g_a(r, t) = -\frac{1}{\tau_T} [g_a(r, t) - g_a^{\text{eq}}(r, t)]. \quad (11)$$

式(10)和式(11)中, $\tau$ 、 $\tau_T$ 分别为压力松弛时间和温度松弛时间,且

$\tau = \nu / (c_s^2 \delta t) + 0.5$ ,  $\tau_T = (\lambda / \rho c_p) / (c_s^2 \delta t) + 0.5$ ;  $F_i$ 为离散速度空间的外力项; $f_a^{\text{eq}}(r, t)$ 、 $g_a^{\text{eq}}(r, t)$ 分别为压力和温度的平衡态分布函数; $c_s$ 为声速.

### 3.3 平衡态分布函数及外力项

根据 D2Q9 模型,平衡态压力分布函数、温度分布函数为

$$f_a^{\text{eq}} = \rho \omega_a \left[ 1 + \frac{e_a \cdot u}{c_s^2} + \frac{(e_a \cdot u)^2}{2c_s^4} - \frac{u^2}{2c_s^2} \right], \quad (12)$$

$$g_a^{\text{eq}} = T \omega_a \left[ 1 + \frac{e_a \cdot u}{c_s^2} + \frac{(e_a \cdot u)^2}{2c_s^4} - \frac{u^2}{2c_s^2} \right], \quad (13)$$

$$F_a = \omega_a \left( 1 - \frac{1}{2\tau} \right) \rho \left[ \frac{e_a \cdot F}{c_s^2} + \frac{(e_a \cdot F)(u \cdot e_a)}{c_s^4} - \frac{u \cdot F}{c_s^2} \right]. \quad (14)$$

式中, $\omega_a$ 为权系数,即  $\omega_0 = 4/9$ ,  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = 1/9$ ,  $\omega_5 = \omega_6 = \omega_7 = \omega_8 = 1/36$ ,  $c_s^2 = c^2/3$ ,  $c = dx/dt$ .

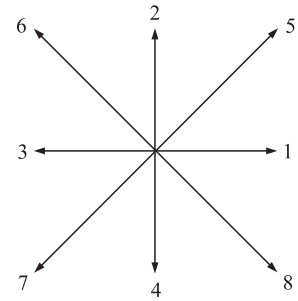


图2 D2Q9 模型

Fig. 2 D2Q9 model

4 数值结果与分析

为了验证网格数对计算结果的影响,在  $Ra$  数取  $10^6$ 、倾斜角为  $0^\circ$  的情况下,除了  $100\times 100$  网格之外,还选取了  $120\times 120$  和  $150\times 150$  网格,并计算了这两种网格高温壁面平均努塞尔数  $\overline{Nu}$  与  $100\times 100$  网格平均努塞尔数  $\overline{Nu}$  的误差,分别为 0.59%和 0.94%,这表明本文采用的网格具有很好的独立性.

为与文献[14]实验结果对比,分别计算了  $Ra$  数为  $10^5$ 、不同倾斜角下的壁面平均努塞尔数,其计算公式为  $\overline{Nu}=\frac{q}{\lambda}\frac{L}{\Delta T}$ <sup>[15]</sup>,  $q$  为壁面热流密度. 计算结果如表 1 所示.

从表 1 计算结果可知,本数值模拟的结果与文献[14]实验结果误差不超过 10%,充分说明了本模拟的可靠性. 因此,分别对不同  $Ra$  数和倾斜角  $\theta$  的结果进行模拟,流线图如图 3~图 5 所示、温度图如图 6~图 8 所示. 不同  $Ra$  数、不同倾斜角的平均努塞尔数  $\overline{Nu}$  如图 9 所示.

表 1 平均努塞尔数 $\overline{Nu}$ 与实验结果的比较  
Table 1 Comparison of the average Nusselt number with the experimental results

倾斜角 $\theta$	本文 $\overline{Nu}$	文献[14] $\overline{Nu}$	相对误差/%
$120^\circ$	4.23	3.85	9.87
$150^\circ$	4.59	4.21	9.03
$180^\circ$	4.45	4.09	8.80

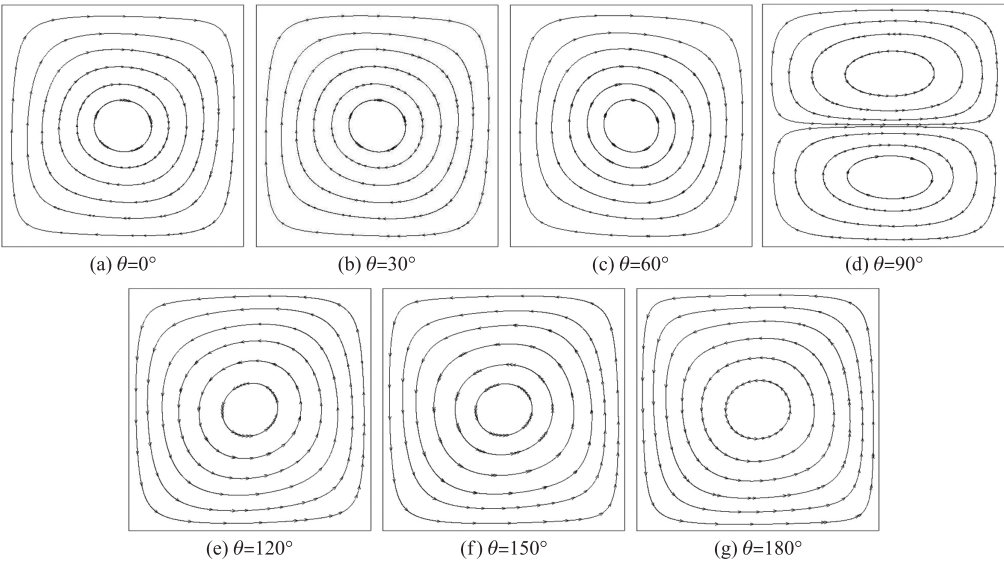


图 3 当  $Ra=10^4$  时,不同倾斜角  $\theta$  的流线图  
Fig. 3 Flow diagram of different inclined angles  $\theta$  when  $Ra = 10^4$

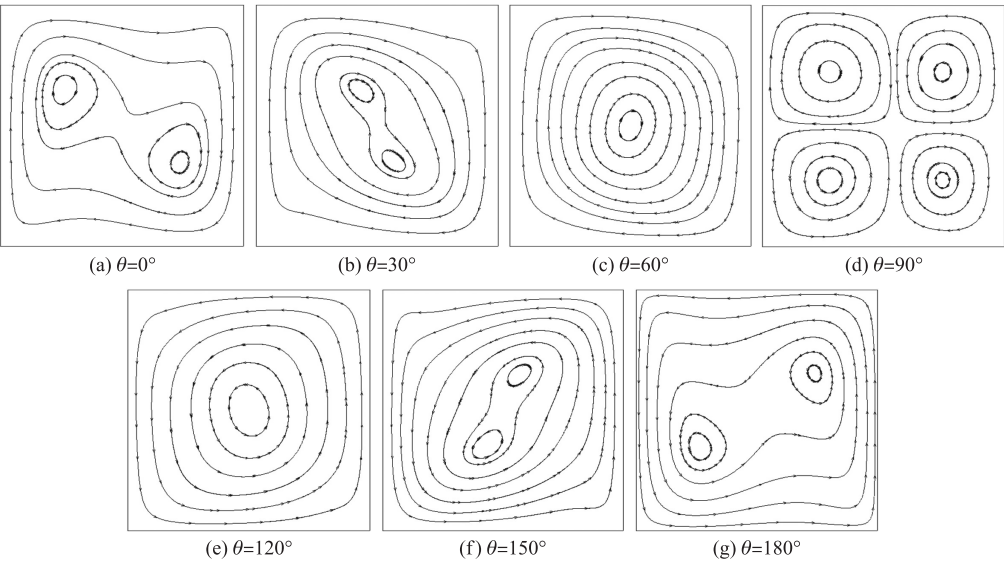


图 4 当  $Ra=10^5$  时,不同倾斜角  $\theta$  的流线图  
Fig. 4 Flow diagram of different inclined angles  $\theta$  at  $Ra = 10^5$



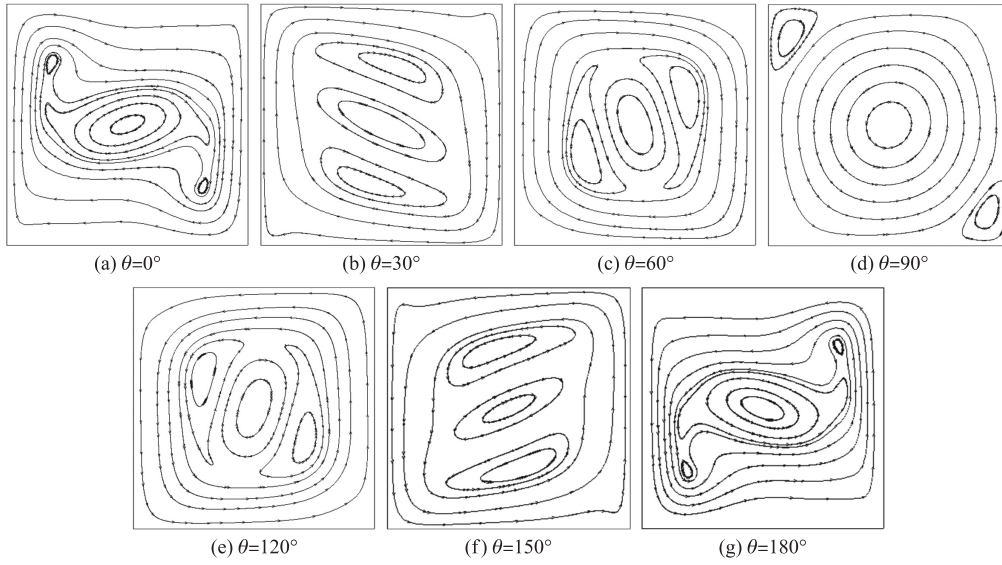


图 5 当  $Ra=10^6$  时,不同倾斜角  $\theta$  的流线图

Fig. 5 Flow diagram of different inclined angles  $\theta$  when  $Ra = 10^6$

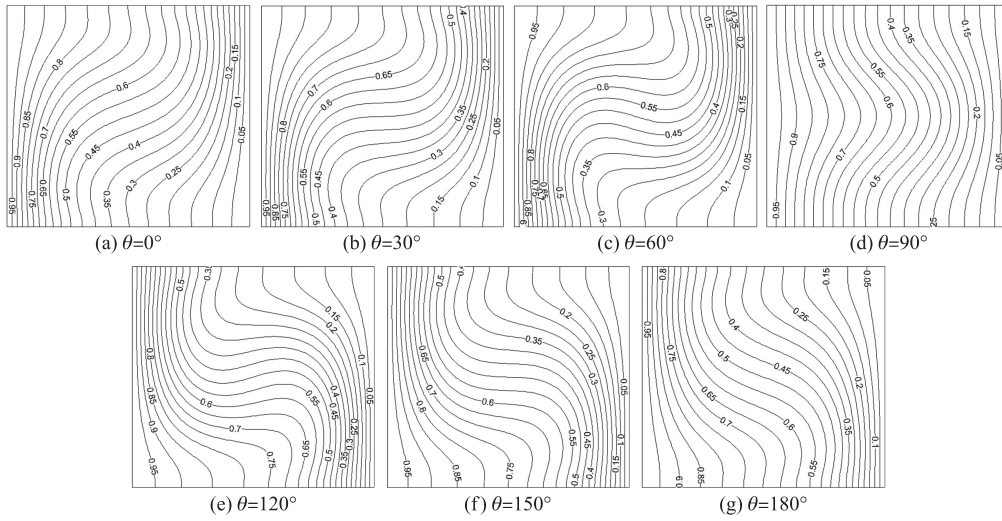


图 6 当  $Ra=10^4$  时,不同倾斜角  $\theta$  的温度场

Fig. 6 Temperature field with different inclined angle  $\theta$  when  $Ra = 10^4$

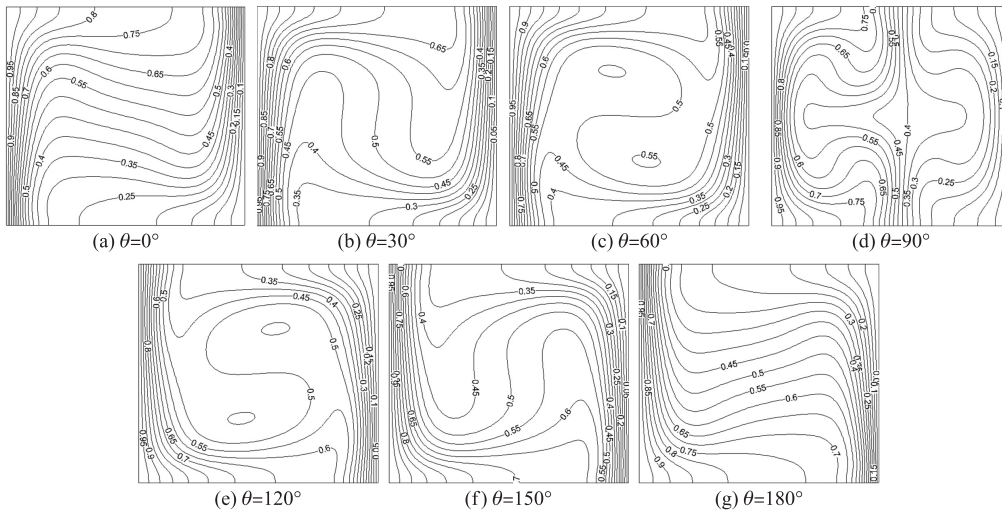


图 7 当  $Ra=10^5$  时,不同倾斜角  $\theta$  的温度场

Fig. 7 Temperature field with different inclined angle  $\theta$  when  $Ra = 10^5$

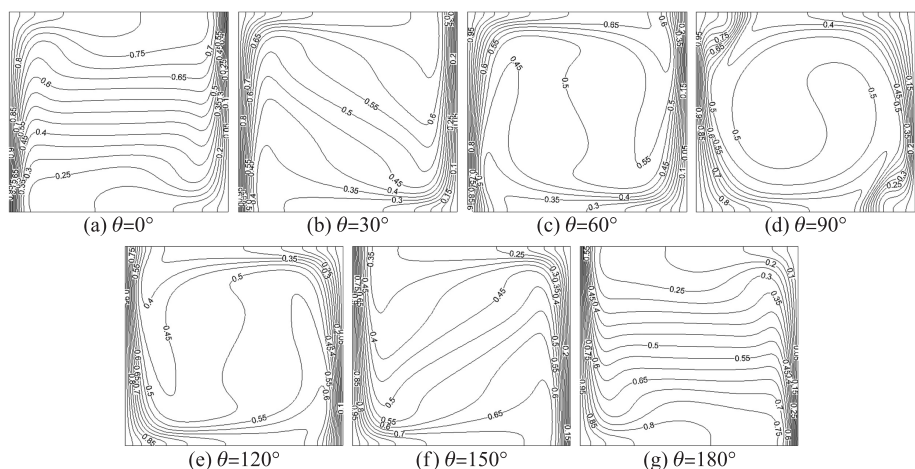


图 8 当  $Ra=10^6$  时,不同倾斜角  $\theta$  的温度场

Fig. 8 Temperature field with different inclined angle  $\theta$  when  $Ra=10^6$

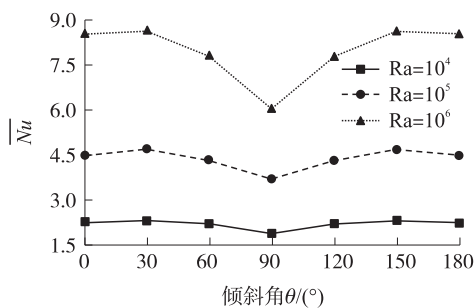


图 9 相同  $Ra$  数、不同倾斜角  $\theta$  的平均努塞尔数  $\overline{Nu}$

Fig. 9 Average Nusselt number with different inclined angles under the same Rayleigh numbers

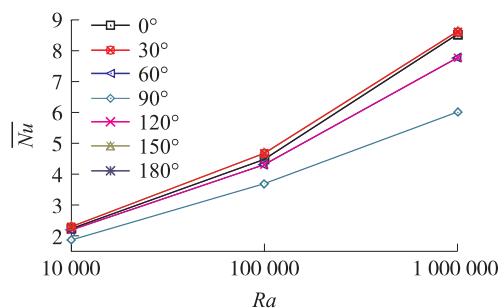


图 10 相同倾斜角  $\theta$ 、不同  $Ra$  数的平均努塞尔数  $\overline{Nu}$

Fig. 10 Average Nusselt number with different Rayleigh numbers under the same inclined angles

#### 4.1 恒定倾斜角 $\theta$ 下 $Ra$ 数的影响

由图 3、图 4、图 5 和图 10 可知,当倾斜角一定时,随着  $Ra$  数的增大,平均努塞尔数  $\overline{Nu}$  增大,封闭方腔内部自然对流换热逐渐增强。例如,当倾斜角取  $30^\circ$ ,  $Ra$  数为  $10^4$  时,流线近似同心圆,呈对称分布。当  $Ra$  数增至  $10^5$  时,腔体形成了 2 个涡,结构也不再对称。当  $Ra$  数增至  $10^6$  时,腔体出现了 3 个涡,此时流体的流动也变得更加剧烈。由图 3、图 4、图 5 可见,同一倾斜角下,随着  $Ra$  数的增加,高低温壁面的等温线越来越密集,温度梯度逐渐增大。同时,腔体内部的等温线波动越来越大,说明此时腔体内部对流换热所占的比重也越来越大。

#### 4.2 不同 $Ra$ 数下倾斜角 $\theta$ 的影响

由图 3 可见,当  $Ra$  数为  $10^4$ ,倾斜角  $\theta$  从  $0^\circ$  变化到  $180^\circ$  的过程中,方腔内的流线从近似同心圆到  $90^\circ$  时上下接近对称的椭圆再到近似的同心圆。同时,从图 9 可见,在倾斜角增大的过程中,  $\overline{Nu}$  先增加接着减小,然后又增加再下降,并在  $90^\circ$  倾斜角时,  $\overline{Nu}$  有最小值,说明方腔自然对流换热呈增减交替状态。此外,当  $Ra$  数为  $10^4$  时,图 9 中的  $\overline{Nu}$  数的最大值与最小值之间相差不大,说明随着倾斜角的增加,自然对流换热差距不明显。由图 4 可知,当  $Ra$  数增大到  $10^5$  时,  $0^\circ$  倾斜角下出现的 2 个涡中心位置会随着倾斜角的增大发生转动,同时涡中心距离会逐渐减小,当倾斜角变为  $60^\circ$  时,会变为一个近似的同心圆,倾斜角继续增大到  $90^\circ$  时,出现四个涡,再接着增大,会变成一个近似的同心圆,至  $180^\circ$  时,会形成两个涡且中心距离较远的情况。同样地,随着倾斜角的增加,  $\overline{Nu}$  也先增加接着减小,然后又增加再下降,并在  $90^\circ$  倾斜角时,  $\overline{Nu}$  有最小值,说明方腔自然对流换热呈增减交替状态。此外,当  $Ra$  数为  $10^5$  时,图 9 中的  $\overline{Nu}$  数最大值与最小值之差开始增大,说明随着倾斜角的增加,自然对流换热差距逐渐明显。当  $Ra$  数增大到  $10^6$  时,  $0^\circ$  倾斜角下形成“两小一大”的关于中心对称的涡,同时涡中心位置会随着倾斜角的增大发生转动,2 个较小的涡也会变大,即出现了流动增强的情形。而当倾斜角变为  $60^\circ$  时,涡中心位置进一步转动,当倾斜角增大到  $90^\circ$

时,即形成了 Bernard 对流,此时流线会形成一个较大的、近似同心圆,并在左上角及右下角形成 2 个小涡旋. 当倾斜角进一步增大,会由  $120^\circ$  时的 3 个较大的涡旋变成  $180^\circ$  时的“两小一大”的近似中心对称的涡旋. 同样地,随着倾斜角的增加,  $\overline{Nu}$  也先增加接着减小,然后又增加再下降,并在  $90^\circ$  倾斜角时,  $\overline{Nu}$  有最小值,说明方腔自然对流换热呈增减交替状态. 此外,当  $Ra$  数为  $10^6$  时,图 9 中的  $\overline{Nu}$  数最大值与最小值之差进一步增大,说明随着倾斜角的增加,自然对流换热差距越发明显. 此外,根据图 9 中  $\overline{Nu}$  可知,  $Ra$  数不论取何值,对流换热增强的最高点都在  $30^\circ$  与  $150^\circ$  处,而减弱的最低点都在  $90^\circ$  处. 由图 6、图 7、图 8 的温度图可知,当  $Ra$  数为  $10^4$ ,倾斜角  $\theta$  从  $0^\circ$  变化到  $180^\circ$  的过程中,  $0^\circ$  到  $60^\circ$  时方腔内的等温线弯曲程度逐渐增大,  $120^\circ$  到  $180^\circ$  时等温线逐渐缓和. 但是,当倾斜角为  $90^\circ$  时,靠近高低温壁面附近为竖线,方腔中间部分等温线稍微弯曲. 当  $Ra$  数增大到  $10^5$  时,等温线会由  $0^\circ$  时接近水平方向的线变得更加弯曲,同时方腔内部温度梯度会逐渐变小,同时,倾斜角从  $120^\circ$  到  $180^\circ$  时等温线变得逐渐水平. 不过,当倾斜角为  $90^\circ$  时,高低温壁面处等温线比  $Ra$  数为  $10^4$  时更加密集,且在接近  $x/L$  为 0.6 的位置,将方腔分为左右两部分,并在  $y/L=0.5$  的位置,形成上下对称的等温度线. 当  $Ra$  数进一步增大到  $10^6$  时,  $0^\circ$  时水平的等温线比  $Ra$  数为  $10^5$  时更加水平,随着倾斜角的增大,即  $0^\circ$  到  $60^\circ$  的过程中,等温线弯曲程度变得越来越大,同时方腔内部温度梯度进一步减小. 当倾斜角从  $120^\circ$  变为  $180^\circ$  时,等温线逐渐水平,温度梯度进一步增强. 不过,当倾斜角为  $90^\circ$  时,高低温壁面处等温线比  $Ra$  数为  $10^5$  时更加密集,温度场中心对称. 但是,在同一  $Ra$  数、不同倾斜角时,高低温壁面等温线的密集程度并没有太大变化. 因此,同一  $Ra$  时,倾斜角的变化对温度的影响不太显著,而  $Ra$  数的增大,对温度的影响才较大.

## 5 结语

通过 LBM 方法对不同  $Ra$  数、倾斜角  $\theta$  下封闭方腔自然对流换热问题的分析,得到以下结论:

- (1) 随着  $Ra$  数的增加,平均努塞尔数  $\overline{Nu}$  逐渐变大,封闭方腔自然对流换热逐渐增强,且  $Ra$  数越大,换热效果越明显.
- (2) 随着倾斜角  $\theta$  的增加,平均努塞尔数  $\overline{Nu}$  先增大后减小,减到最小时,接着增加再降低,自然对流换热特性增减交替,且由强变弱的点为倾斜角  $30^\circ$  和  $150^\circ$  处,自然对流最弱点为  $90^\circ$  处.

## [参考文献] (References)

- [1] ARNOLD J N, CATTON I, EDWARDS D K. Experimental investigation of natural convection in inclined rectangular regions of differing aspect ratios[J]. Journal of laryngology and otology, 1976, 51(6): 363-386.
- [2] DAVIS VAHL D G. Natural convection of air in a square cavity: A bench mark numerical solution[J]. International journal for numerical methods in fluids, 1983, 3(3): 249-264.
- [3] GIRGIS I G. Numerical and experimental investigations of natural convection in inclined air enclosures[J]. Aerospace sciences meeting and exhibit, 2000, 38(2): 1345-1346.
- [4] 秦国良, 徐忠. 谱元方法求解正方形封闭空腔内的自然对流换热[J]. 计算物理, 2001, 18(2): 119-124.  
QIN G L, XU Z. Computation of natural convection in two-dimensional cavity using spectral element method[J]. Chinese journal of computational physics, 2001, 18(2): 119-124. (in Chinese)
- [5] 孟凡康, 高珊, 闫明慧. 二维方腔自然对流熵产模拟分析[J]. 太阳能学报, 2010, 31(10): 1287-1291.  
MENG F K, GAO S, YAN M H. Simulation analysis of entropy generation in natural convection in two-dimensional quadrate cavity[J]. Acta energiae solaris sinica, 2010, 31(10): 1287-1291. (in Chinese)
- [6] SHAN X W. Simulation of Rayleigh-Bénard convection using lattice Boltzmann method[J]. Physical review E statistical physics plasmas fluids and related interdisciplinary topics, 1996, 55(3): 2780-2788.
- [7] ONISHI J, CHEN Y, OHASHI H. Lattice Boltzmann simulation of natural convection in a square cavity[J]. Jsme international journal, 2002, 44(1): 53-62.
- [8] JAMI M, MEZRHAB A, NAJI H. Numerical study of natural convection in a square cavity containing a cylinder using the lattice Boltzmann method[J]. International journal for numerical methods in engineering, 2008, 73(12): 1727-1738.
- [9] HUELSZ G, RECHTMAN R. Heat transfer due to natural convection in an inclined square cavity using the lattice Boltzmann equation method[J]. International journal of thermal sciences, 2013, 65(65): 111-119.

- [10] 李培生,孙金丛,张莹,等. 内置高温体倾斜多孔腔体中自然对流的 LBM 模拟[J]. 哈尔滨工程大学学报,2018,6(39):1-8.  
LI P S,SUN J C,ZHANG Y,et al. Lattice Boltzmann simulation of natural convection in an inclined porous cavity with a hot square obstacle[J]. Journal of Harbin engineering university,2018,6(39):1-8.(in Chinese)
- [11] 童长青,何雅玲,王勇,等. 封闭方腔自然对流的格子-Boltzmann 方法动态模拟[J]. 西安交通大学学报,2007,41(1):32-36.  
TONG C Q,HE Y L,WANG Y,et al. Simulation of transient natural convection in square cavity with incompressible thermal Lattice-Boltzmann method[J]. Journal of Xi'an Jiaotong university,2007,41(1):32-36.(in Chinese)
- [12] 栾辉宝,徐辉,陈黎,等. 有限体积法与 LBM 分区耦合模拟方腔自然对流[J]. 西安交通大学学报,2011,45(5):78-83.  
LUAN H B,XU H,CHEN L,et al. Coupling of FVM and LBM for natural convection in a square cavity[J]. Journal of Xi'an Jiaotong university,2011,45(5):78-83.(in Chinese)
- [13] 何雅玲,王勇,李庆. 格子 Boltzmann 方法的理论及应用[M]. 北京:科学出版社,2009.  
HE Y L,WANG Y,LI Q. Lattice Boltzmann method:theory and applications[M]. Beijing:Science Press,2009.(in Chinese)
- [14] HAMADY F J,LLOYD J R,YANG H Q,et al. Study of local natural convection heat transfer in an inclined enclosure[J]. International journal of heat and mass transfer,1989,32(9):1697-1708.
- [15] 孙跃. 二维方腔内空气对流数值研究[D]. 阜新:辽宁工程技术大学,2013.  
SUN Y. Numerical study of air convection in two-dimensional square cavity[D]. Fuxin:Liaoning Technical University,2013.(in Chinese)

[责任编辑:陈 庆]