

有源荷控忆阻系统的多稳态分析及电路实现

李 闯, 闵富红, 吕晏旻

(南京师范大学南瑞电气与自动化学院, 江苏 南京 210023)

[摘要] 采用有源荷控忆阻替换蔡氏电路中的非线性电阻, 实现一个五维忆阻非线性电路系统. 建立了该系统的无量纲方程, 分析了系统的平衡点集与稳定性. 利用分岔图、Lyapunov 指数谱和相轨迹图等分析方法, 从多角度研究了随系统参数与初始状态变化而产生的多稳态动力学行为. 研究表明, 当系统参数、初始状态变化时, 都会出现不同拓扑结构的混沌吸引子共存、不同吸引域的多周期极限环共存、不同周期数的极限环与不同拓扑结构的混沌吸引子等共存行为. 最后, 设计了五维忆阻混沌系统的模拟电路模型, 电路仿真实验与数值仿真结果相一致, 观测到不同的多稳态共存运动. 这表明动力学分析的正确性和系统的物理可实现性, 为进一步拓展系统加密应用奠定基础.

[关键词] 有源荷控忆阻, 蔡氏电路, 忆阻系统, 多稳态共存

[中图分类号] TP271 **[文献标志码]** A **[文章编号]** 1672-1292(2019)01-0019-10

Multi-Stability Analysis of an Active Charge-Controlled Memristive System and Circuit Implementation

Li Chuang, Min Fuhong, Lü Yanmin

(School of NARI Electrical and Automation, Nanjing Normal University, Nanjing 210023, China)

Abstract: In the paper, a new type of five-dimensional memristive chaotic system is easily implemented by replacing a nonlinear resistance in the Chua's circuit with an active charge-controlled memristor. Firstly, the stable equilibrium and unstable equilibrium point sets of the system are analyzed theoretically by establishing the dimensionless equation. Next, through Lyapunov index spectrum, bifurcation diagram and phase track diagram, the coexistence phenomena of the system with respect to the changes and initial condition is studied. When different initial conditions are used, the system displays the coexistent phenomenon of chaotic attractors with different topological structures or several limit cycles with different attraction domains, as well as the phenomenon of multiple attractors of several periodic limit cycle and chaotic attractors with multiple topological structures. Finally, based on multisim circuit simulation model, the simulation results are consistent with the numerical simulations and relevant theoretical analysis. These show the correctness of dynamic analysis and the physical realizability of the system, and lay a foundation for expanding the application in encryption.

Key words: active charge-controlled memristor, Chua's circuit, memristive chaotic system, multi-stable coexistence

20 世纪 70 年代, 美籍华裔科学家蔡少棠教授根据电路基本变量组合完备性原理预测了描述磁通和电荷关系元件的存在, 并把这类元件定义为记忆电阻器^[1] (简称忆阻器). 但直到 2008 年 5 月, 惠普公司实验室研究人员才在 Nature 杂志上报道了忆阻器的实现^[2]. 此后, 研究人员开始全方位对忆阻器进行研究, 忆阻与其他现有的电路元件相互连接组合、以电路的形式在各个工程领域中得到了广泛应用. 电路中引入非线性元件忆阻器能够很容易实现电路混沌振荡, 文献[3-7]已对忆阻混沌电路作深入研究. 由于新实现的忆阻器属于纳米级元件, 技术难度大、造价高, 忆阻器在短时间内无法推广使用. 即便如此, 目前研究人员利用模拟元器件实现多种形式的忆阻模拟器, 或者以特殊拓扑结构的电路来构建一些广义忆阻模拟器, 对忆阻混沌系统的建模分析和实验电路观测起到了重要作用.

近年来, 混沌系统的多稳态和超级多稳态现象^[8-10] 成为混沌学研究热点. 多稳态现象普遍存在于非线性

收稿日期: 2018-06-30.

基金项目: 国家自然科学基金(61871230)、江苏省研究生科研与实践创新计划项目(KYCX18_1220).

通讯联系人: 闵富红, 博士, 教授, 研究方向: 非线性电路与系统. E-mail: minfuhong@njnu.edu.cn

动力学系统中,是指在某一固定的系统参数下,系统运动会因为系统的初始状态不同而产生不同的运动轨迹,一般共存的运动状态为有限个. 而系统能够产生无穷多个吸引子共存则称之为超级多稳态. 不同拓扑结构的吸引子或者隐藏吸引子共存是系统多稳态的主要特征. 在工程应用时,一些实际非线性动力学系统需要尽量避免系统产生共存吸引子这一非线性行为,因此研究混沌系统存在的共存现象有着重要的物理意义和工程应用价值. 文献[11-16]已对忆阻混沌系统的多稳态特性分析. 研究人员将不同的忆阻模型引入到经典的混沌系统如 Lorenz 系统、Chua 电路、Shinriki 电路等,并分析其存在的共存吸引子或共存隐藏吸引子. 文献[14]采用二次型磁控忆阻模拟器作为 Lorenz 系统的正反馈项,设计出一个四阶的超混沌系统,并分析了混沌系统随忆阻器初始状态变化引起的吸引子共存现象. 文献[15]用非理想有源压控忆阻器代替蔡氏二极管引入蔡氏电路得到一个四阶忆阻系统,分析表明有两个稳定非零鞍焦点的忆阻蔡氏电路有着丰富的动力学行为与多稳态性. 文献[16]提出了一个新颖的忆阻振荡器,它是由 Shinriki 电路中非线性电导与一阶记忆二极管组合而成,系统运动产生共存吸引子以及共存的隐藏吸引子现象. 以上文献一般从一个或者两个角度去分析系统多稳态的共存现象,本文尝试从多个角度分析一个五阶忆阻系统的多稳态特性.

基于此,本文提出了一个含荷控忆阻器的五维混沌系统,由于其具有无限稳定平衡点以及不稳定平衡点,系统运动会产生拟周期窗口、状态转移等特殊非线性行为. 同时,该系统受平衡点集的影响有着丰富的多稳态现象,文中分别论述了系统运动随参数变化产生的共存现象及考虑系统的初始状态是否因平衡点而产生的共存现象. 从不同角度分析得出,系统会出现不同拓扑结构的混沌吸引子共存、不同吸引域的多周期极限环共存、以及不同周期数的极限环与不同拓扑结构的混沌吸引子共存. 然后,通过运放、电阻和电容等分立元件,设计实现了忆阻系统的模拟电子电路. 实验结果表明,电路实验与理论分析结果是一致的,为进一步探索忆阻系统应用奠定了基础.

1 系统模型及基本特性

1.1 数学模型

文献[17-18]介绍了不同忆阻器模型的性质以及应用,采用有源荷控忆阻模型为研究对象,其数学模型表示为:

$$M(q) = d\varphi(q)/dq = m + nq^2. \quad (1)$$

式中,参数 m 和 n 为常量,且参数 $m < 0$.

一个基于有源荷控忆阻器的五维混沌电路如图 1 所示,其由经典蔡氏电路改进得到,电路主要由两个电容,两个电感和一个忆阻等 5 个动态元件组成的,所对应的 5 个状态变量分别是 $v_1, v_2, i_{L_1}, i_{L_2}, q$, 其中 q 是荷控忆阻的状态变量.

依据元件的伏安特性及基尔霍夫电压和电流定律,可以列写出图 1 电路的状态方程为:

$$\begin{cases} di_{L_1}/dt = (v_1 - i_{L_1}M(q))/L_1, \\ di_{L_2}/dt = (v_1 - v_2)/L_2, \\ dv_1/dt = -(i_{L_1} + i_{L_2} + v_1/R)/C_1, \\ dv_2/dt = i_{L_2}/C_2, \\ dq/dt = i_{L_1}. \end{cases} \quad (2)$$

令 $x = i_{L_1}, y = i_{L_2}, z = v_1, u = v_2, v = q, a = 1/L_1, b = 1/C_1, c = 1/C_2, L_2 = 1, R = 1$, 用非线性函数 $M(v) = m + nv^2$ 表示忆阻的数学模型,则式(2)可以表示为:

$$\begin{cases} \dot{x} = a(z - xM(v)), \\ \dot{y} = z - u, \\ \dot{z} = -b(y + x + z), \\ \dot{u} = cy, \\ \dot{v} = x. \end{cases} \quad (3)$$

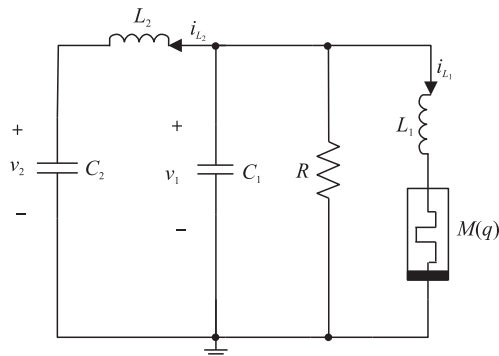


图 1 有源荷控忆阻混沌电路图

Fig. 1 Active charge-controlled memristor-based circuit schematic

式中, x, y, z, u, v 为系统的状态变量; a, b, c 和 m, n 分别表示系统参数和荷控忆阻模型的参数.

选择系统参数为 $a=9, b=30, c=17, m=-1.2$ 和 $n=1.2$, 初始状态为 $(10^{-6}, 0, 0, 0, 0)$, 系统产生的混沌吸引子如图 2 所示. 利用 Wolf's 法计算的 Lyapunov 指数为 $L_1=0.257\ 1, L_2=0, L_3=0, L_4=-7.251\ 4, L_5=-16.449\ 2$, 对应的 Lyapunov 维数为 $d_L=3.574\ 6$. 综上所述, 系统参数下的有源荷控忆阻电路相轨迹图、李氏指数以及 Lyapunov 维数都说明了该忆阻电路系统是混沌振荡的.

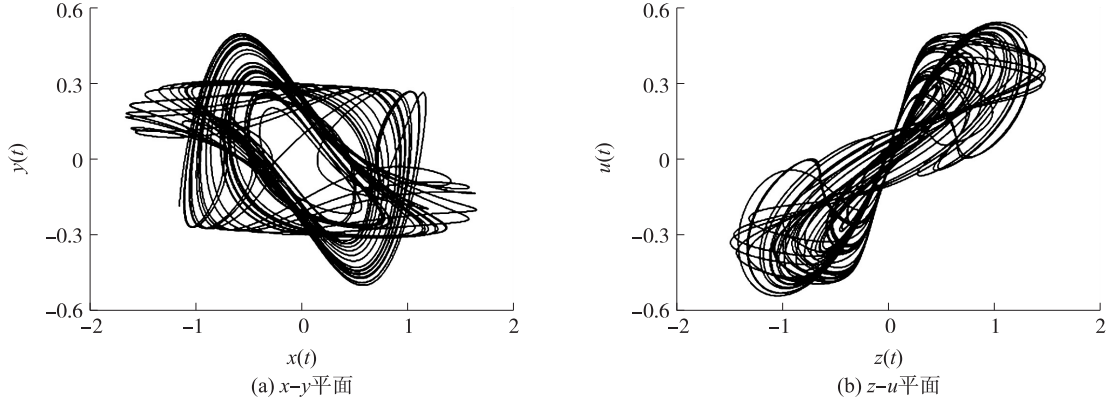


图 2 混沌吸引子相图

Fig. 2 Phase diagrams of chaotic attractors

1.2 平衡特性

忆阻混沌系统的平衡点为分布于某一坐标轴上的点集, 具有无限的不稳定平衡点和无限稳定平衡点. 为了进一步分析式(3)的非线性动力学特性, 需要计算出式(3)的平衡点稳定性及分布.

令 $\dot{x}=\dot{y}=\dot{z}=\dot{u}=\dot{v}=0$, 得到式(3)的平衡点为集合 A :

$$A = \{ (x, y, z, u, v) \mid x=y=z=u=0, v=l \}. \quad (4)$$

式中, l 为任意实数, 即系统的平衡点集为整个 v 轴. 在平衡点处线性化式(3), 可得到系统的 Jacobi 矩阵为:

$$J_A = \begin{bmatrix} -aM(l) & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -b & -b & -b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

式中, $M(l)=m+nl^2$. 平衡点集合 A 的特征方程为:

$$f(\lambda) = \lambda^5 + (b+aM(l))\lambda^4 + (b+c+ab+abM(l))\lambda^3 + (bc+abM(l)+acM(l))\lambda^2 + (abc+abcM(l))\lambda = 0. \quad (6)$$

系统参数选取 $a=9, b=30, c=17, m=-1.2$ 和 $n=1.2$, 选择参数 l 为可变参数, 式(6)可以简化为:

$$\lambda(\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4) = 0. \quad (7)$$

式中, $a_1=10.8l^2+19.2, a_2=324l^2-7, a_3=507.6l^2+2.4, a_4=5\ 508l^2-918$. 上式括号中的四次多项式方程的系数均为非零实常数, 根据 Routh-Hurwitz 稳定条件, 四次多项式方程的所有根具有负实部的充要条件为:

$$\begin{cases} a_1 > 0, \\ a_1a_2 - a_3 > 0, \\ a_1(a_2a_3 - a_1a_4) - a_3^2 > 0, \\ a_4(a_1(a_2a_3 - a_1a_4) - a_3^2) > 0. \end{cases} \quad (8)$$

由上式可得 l 的稳定范围为:

$$0.408\ 2 < |l| < 0.4763 \text{ 或 } |l| > 0.895\ 3. \quad (9)$$

若忆阻器的初始值满足式(9), 其它状态变量的初始值为零, 则系统(3)运动轨迹是渐近稳定的. 反之, 可得 l 的不稳定范围为:

$$|l| < 0.408\ 2 \text{ 或 } 0.476\ 3 < |l| < 0.895\ 3. \quad (10)$$

若忆阻器初始值为式(10)中的某一值, 则系统(3)的解是不稳定的, 趋于极限环或混沌或无穷发散.

2 系统动力学特性分析

忆阻器对流经的电荷具有记忆作用,不同的忆阻初始值会导致忆阻器的非线性函数发生改变,使得系统运动极易出现一些共存行为.混沌系统的共存是指在同一组系统参数条件下,由于状态变量的初始值不同而具有不同的系统运动轨迹.下面分别分析随系统参数变化的共存行为以及因初值改变而产生的多稳态现象.

2.1 依赖参数的共存特性

选择系统参数为 $a=9, b=30, m=-1.2$ 和 $n=1.2$,以系统参数 c 为分岔参数,忆阻混沌系统状态变量 z 的分岔图以及相应的 Lyapunov 指数谱如图 3 所示.图 3(a)中随参数 c 变化的分岔轨迹对应的初始状态分别为 $(10^{-4}, 0, 0, 0, 0)$ 和 $(-10^{-4}, 0, 0, 0, 0)$;图 3(b)的 Lyapunov 指数谱选择的初值为 $(10^{-4}, 0, 0, 0, 0)$.由图 3 可以看出,系统呈现了不同周期数的极限环共存、拟周期共存以及混沌吸引子共存等复杂的动力学行为.

当参数 $c \geq 17.85$ 时,系统运行轨迹从 v 坐标轴正、负区域无法相互穿越造成系统运行轨迹的对称性被破坏.因此,系统进入了混沌状态继而周期态的共存分岔模式, Lyapunov 指数 LE_1 在零值和正值之间变化.当 $c=17.85$ 且增大时,系统进入单涡卷运动, $LE_1 > 0, LE_2 = 0$ 和 $LE_3 = 0$, 并且进入分岔共存模式.当增大至 $c=17.922$ 时,系统共存分岔出现一个周期 7 的窄窗口,随着参数的增大,系统继续保持着单涡卷运行.在 $18.15 \leq c < 18.19$ 内,系统从共存的单涡卷吸引子经周期减半分岔进入了共存的周期 3 态.但在 $c=18.20$ 左右,系统伴随着边界危机由周期再次进入混沌态,此时混沌吸引子更加趋于收敛.参数 c 在区间 $[18.45, 19.3]$ 内,系统运动为周期态,并经周期减半分岔最终进入周期 1 态.接着,根据图 3(a)和图 3(b)中的不同运动区域选取不同的系统参数 c 值,绘制了 $x-y$ 平面上相轨迹如图 4 所示,呈现了单涡卷共存以及不同的周期数共存,其中共存相轨迹分别对应系统初始条件为 $(10^{-4}, 0, 0, 0, 0)$ 和 $(-10^{-4}, 0, 0, 0, 0)$.

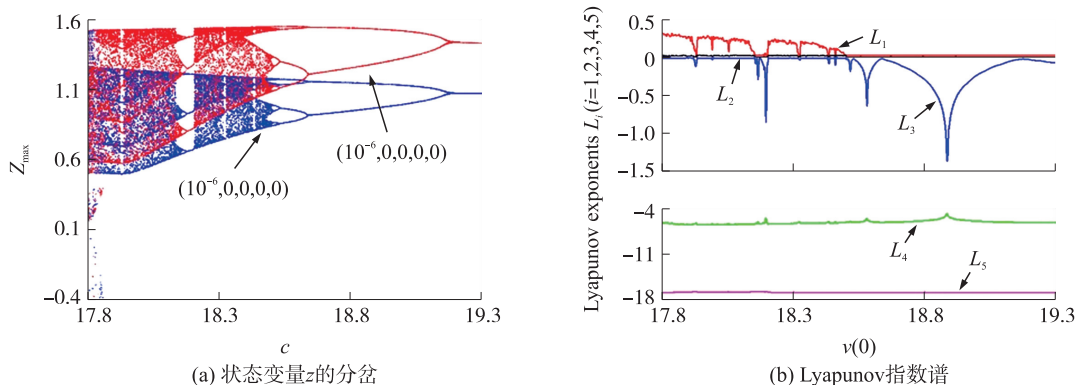


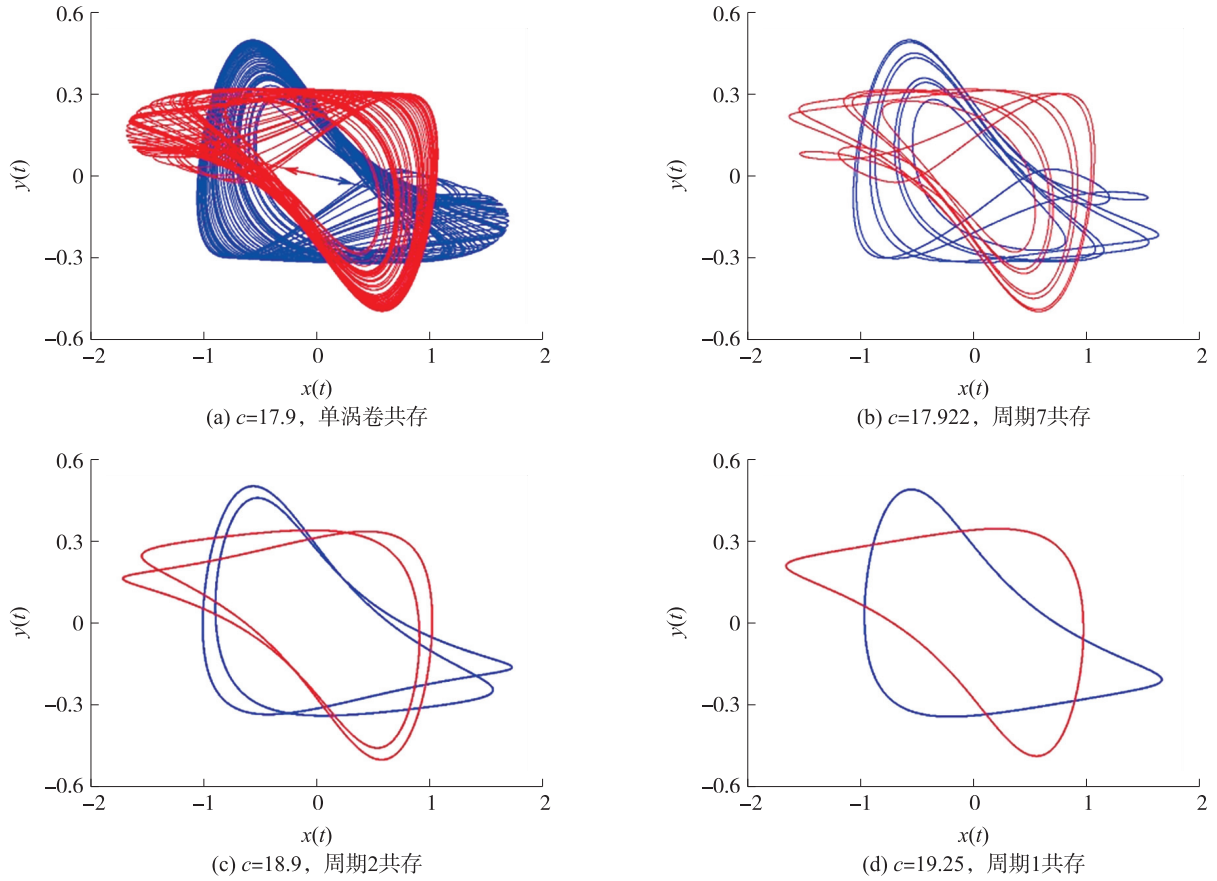
图 3 参数 c 变化时分岔图与 Lyapunov 指数谱

Fig. 3 Bifurcation diagrams and Lyapunov spectrum with the change of c

2.2 依赖初值的多稳态特性

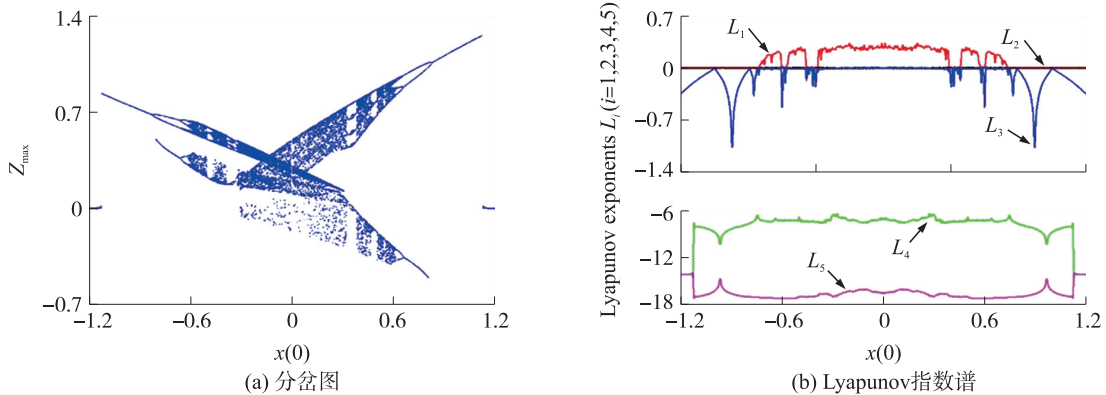
对于上述确定的系统参数值,分别选择初始状态 $(x(0), 0, 0, 0, v(0))$ 中非忆阻状态状态变量 $x(0)$ 和忆阻初始状态 $v(0)$ 作为可变参数,利用分岔图、Lyapunov 指数谱和吸引盆对系统产生的多吸引子共存行为进行分析.

考虑初始条件 $(x(0), 0, 0, 0, v(0))$ 中 $x(0)$ 在区间 $[-1.2, 1.2]$ 内变化且 $v(0)=0$ 时,相应的状态变量分岔图 x 与 Lyapunov 指数谱如图 5 所示.可见,分岔图与 Lyapunov 指数谱基本一致.在对称区间 $[-1.2, -0.344]$ 和 $[0.344, 1.2]$ 内,系统出现不动点、周期、拟周期和混沌等非线性行为,图 5(a)显示了系统从不动点跃变到周期 1,经历倍周期分岔进入混沌,并经历多个周期窗口,最终由单涡卷混沌吸引子状态过渡到具有双涡卷的混沌轨道上.在区间 $(-0.344, 0.344)$ 范围内,系统产生双涡卷拓扑结构的吸引子,相应的图 5(b)观察到系统具有一个正值的 Lyapunov 指数,两个零值的 Lyapunov 指数和两个负值的 Lyapunov 指数.当状态变量 $|x(0)|$ 增大时,系统运行轨迹会由于 $x(0)$ 的符号不同而在不同吸引域产生,且系统运行也越来越收敛直至变为稳定不动点.在趋于稳定的过程中,系统运动轨迹的拓扑结构产生各种变化,出现

图4 不同参数 c 条件下,初始值分别为 $(10^{-6}, 0, 0, 0, 0)$ 和 $(-10^{-6}, 0, 0, 0, 0)$ 时系统的相轨迹图Fig. 4 Under different c , coexisting attractors with initial conditions $(10^{-6}, 0, 0, 0, 0)$ and $(-10^{-6}, 0, 0, 0, 0)$

较为复杂共存行为,如混沌共存、周期共存以及不同运动态的共存等。

考虑初始条件 $(x(0), 0, 0, 0, v(0))$ 中 $v(0)$ 作为分岔参数且 $y(0) = 0$ 。由于状态变量 $x(0)$ 为 0 时系统无法产生振荡,这里 $x(0)$ 取值 $\pm 10^{-6}$ 给系统一个初始小扰动,同时使得系统的初始值可以近似为平衡点。当忆阻初始状态在区间上变化时,状态变量的分岔以及相应的 Lyapunov 指数谱如图 6 所示。其中,图 6(a) 中的区域 II 和区域 I 分别对应 $x(0) = 10^{-6}$ 和 $x(0) = -10^{-6}$ 。图 6(b) 中上下部分分别表示 $x(0) = 10^{-6}$ 和 $x(0) = -10^{-6}$ 时的 Lyapunov 指数谱。不难观察到,当 $x(0) = -10^{-6}$ 时,系统在区域 I 的运动轨迹演化为从周期 3 进行倍周期分岔进入混沌,所对应的由 0 变为正值。而在区域 II 的运动轨迹演化为从弱混沌态经反倍周期分岔进入周期态,并最终进入稳定状态,收敛于一个稳定点,所对应的由正值变为 0,并再由 0 变为负值。当 $x(0) = 10^{-6}$ 时,系统在区域 I 和 II 运动演化分别对应 $x(0) = -10^{-6}$ 时系统在区域 II 和 I 的运

图5 初始条件 $x(0)$ 变化时分岔图和 Lyapunov 指数谱Fig. 5 Bifurcation diagrams and Lyapunov spectrum with different $x(0)$

动演化行为. 此外,图 6(a)显示的不稳定区域与式(10)所描述的不稳定区域是基本一致. 综合以上, $x(0)$ 取值极大影响了系统随忆阻初值 $v(0)$ 变化的动力学行为. 依赖忆阻初值变化,系统运动演化更为复杂,且共存的多吸引子差异性较大.

考虑初始条件分别为 $(x(0),y(0),0,0,0)$ 和 $(x(0),0,0,0,v(0))$,即分别分析 $x(0)$ 和 $y(0)$ 同时变化, $x(0)$ 和 $v(0)$ 同时变化对系统运动状态影响,如图 7 所示. 这样可以对比分析忆阻初值与非忆阻初值对系统运动状态分布的影响. 当 $x(0)$ 在区间 $[-1,1]$, $y(0)$ 在区间 $[-1,1]$ 内变化时,系统不同运动状态分布如图 7(a)所示;当 $x(0)$ 在区间 $[-1,1]$, $v(0)$ 在区间 $[-1,1]$ 内变化时,系统所呈现的动力学行为如图 7(b)所示.

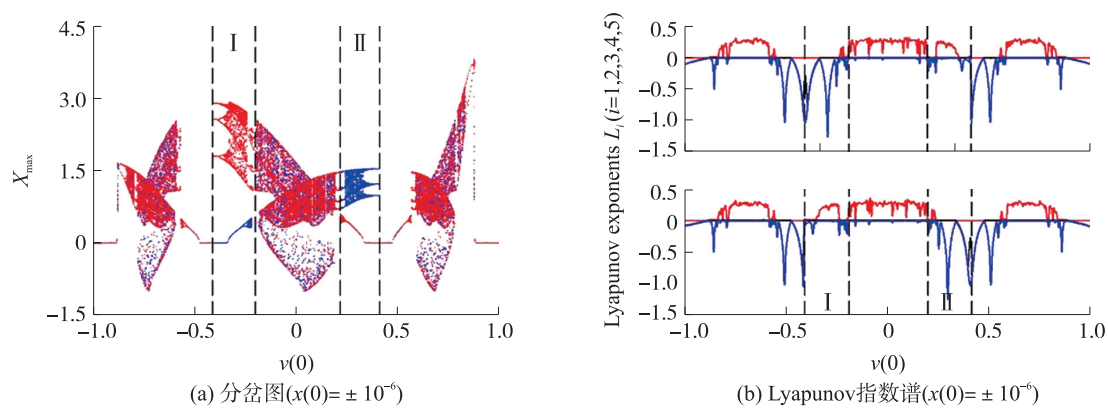


图 6 忆阻初始状态 $v(0)$ 变化时分岔图与 Lyapunov 指数谱
Fig. 6 Bifurcation diagrams and Lyapunov spectrum with different $v(0)$

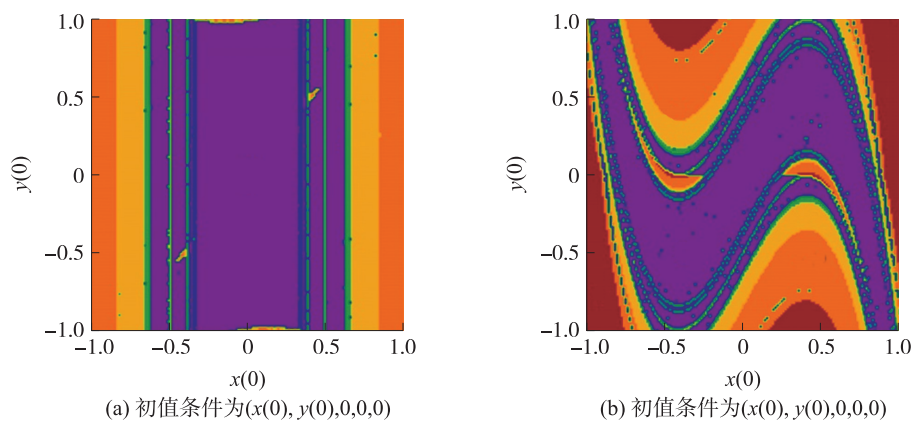


图 7 不同初值平面的吸引盆
Fig. 7 Basins of attraction in different planes

从图 7 可以看出,随 $x(0)$ 和 $y(0)$ 同时变化,系统运动状态是成条形分布的,分布规律为关于原点对称,且两端是周期态,中间为混沌态,并存在一些大小不一的周期窗. 当 $y(0)=0$ 时颜色分布与图 5 所呈现的动力学行为基本一致,而且可以看出初值 $y(0)$ 符号的改变不会影响吸引子产生的吸引域. 随 $x(0)$ 和 $v(0)$ 同时变化,不同运动轨迹分布是水平‘S’型,分布规律为关于原点对称性,且在 $x(0)=\pm 10^{-6}$ 处所呈现的动力学行为与图 6 基本一致. 图中不同颜色代表着不同的运动状态,并且分别用不同字母表示出来,如表 1 所示.

需要说明的是,图 7 中其他较小的颜色区域表示的运动状态为不同周期数的极限环. 有一些区域的颜色区分不明显是由于多种不同运动轨迹共存造成的.

为了更为清晰地呈现系统依赖初值而产生的多稳态现象,这里选择不同初值作出相应的相轨迹图,如图 8 所示,系统依赖初值变化可以呈现稳定点,不同周期数极限环,拟周期以及混沌等运动状态. 对于 $x(0)$ 和 $y(0)$,只

表 1 吸引盆中不同颜色对应的运动状态
Table 1 The different motion states with different color in the basin of attraction

| 颜色 | 暗红色 | 橙色 | 黄色 | 绿色 | 紫色 |
|------|----------|----------|----------|----------|-------|
| 运动状态 | 稳定不动点(S) | 周期 1(P1) | 周期 2(P2) | 周期 4(P4) | 混沌(C) |

改变 $y(0)$ 的符号是会产生共存吸引子,但是只要改变 $x(0)$ 的符号,系统产生的共存吸引子是同类型的,且关于原点对称,如图 8(a)~图 8(c) 所示. 图中对称共存吸引子都是周期运动,那么相对应的 Lyapunov 指数均为 $(0, -, -, -, -)$. 对于 $x(0)$ 和 $v(0)$,若取值不关于原点对称时,系统产生的共存吸引子是不同类型的,如图 8(d)~图 8(f) 所示. 非对称吸引子共存则相应 Lyapunov 指数存在着差异,如图 8(d) 中的周期 4 和稳定点对应的 Lyapunov 指数分别为 $(0, -, -, -, -)$ 和 $(-, -, -, -, -)$. 图 8(f) 中的单涡卷和拟周期对应的 Lyapunov 指数分别为 $(+, 0, -, -, -)$ 和 $(0, 0, -, -, -)$.

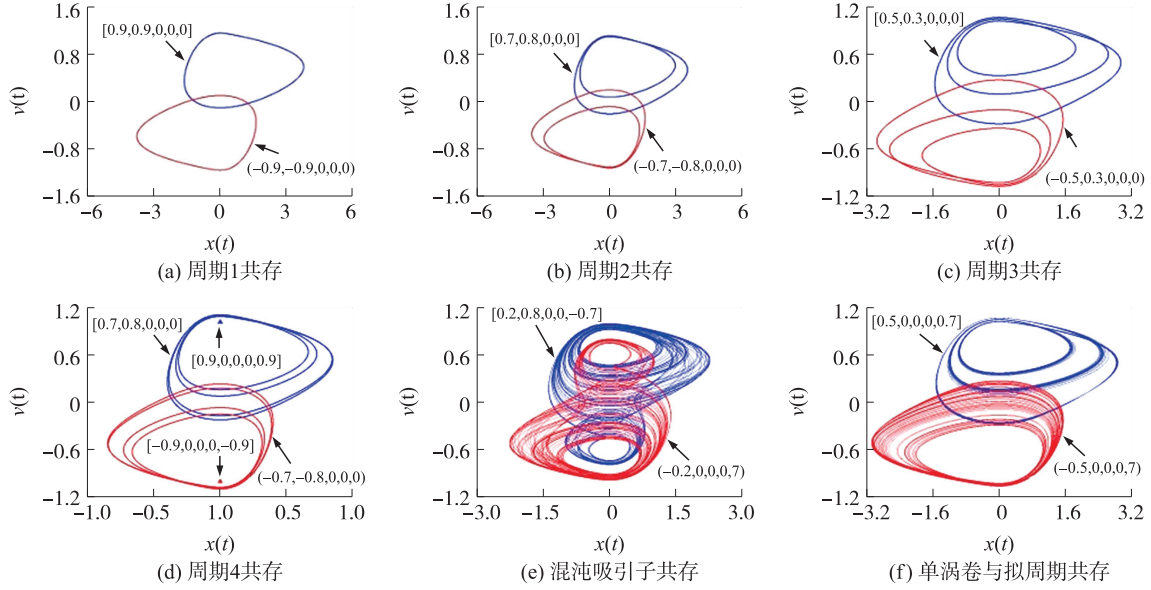


图 8 不同初始值条件下的共存

Fig. 8 The coexisting attractors with different initial conditions

3 系统的电路仿真实现

利用运算放大器 TL082CP 和模拟乘法器 AD633 的纯模拟电路可实现式(3)所描述的非线性动力学系统,如图 9 所示,其中 x, y, z, u, v 分别代表 5 个积分电路通道的电容电压状态变量,对应图中的下半部分. 上半部分是实现荷控忆阻 M ,其输出信号为 M_q ,即可实现本文提出的新型忆阻自激振荡系统.

依据图 9 所设计的忆阻电路原图,同时需要注意到乘法器 AD633 的增益系数为 0.1,可以得到新型忆阻振荡系统式(2)的电路方程为:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = \frac{1}{R_7 C_1} z - \frac{1}{10 R_6 C_1} x \left(\frac{R_3}{R_2} V_1 + \frac{R_3}{10 R_1} v^2 \right), \\ \frac{dy}{d\tau} = \frac{1}{R_{10} C_2} z - \frac{1}{R_{11} C_2} u, \\ \frac{dz}{d\tau} = -\frac{1}{R_{14} C_3} z - \frac{1}{R_{15} C_3} x - \frac{1}{R_{16} C_3} y, \\ \frac{du}{d\tau} = \frac{1}{R_{19} C_4} y, \\ \frac{dv}{d\tau} = \frac{1}{R_{20} C_5} x. \end{cases} \quad (11)$$

将式(11)和式(3)相比较,可得参数: $a = \frac{1}{R_7 C_1} = \frac{1}{10 R_6 C_1}$, $m = \frac{R_3}{R_2}$, $n = \frac{R_3}{10 R_1}$, $b = \frac{1}{R_{14} C_3} = \frac{1}{R_{16} C_3}$, $c = \frac{1}{R_{15} C_3}$, $d = \frac{1}{R_{19} C_4}$, 并计算出各个器件的参数取值如表 2 所示.

$\frac{1}{R_{19} C_4}$, 并计算出各个器件的参数取值如表 2 所示.

电路实现该忆阻混沌系统奠定了基础。

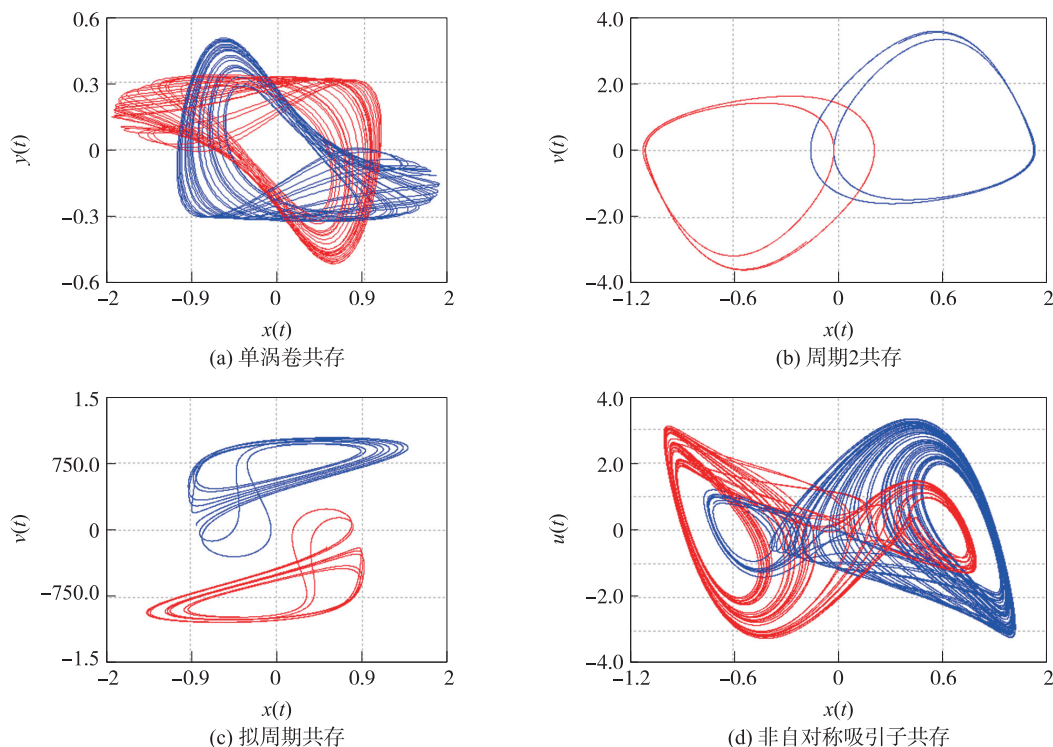


图 10 Multisim 仿真共存相轨图

Fig. 10 The coexisting attractors by Multisim

4 结语

本文提出一个基于有源荷控忆阻器的五维光滑系统,发现该五维忆阻混沌系统具有丰富动力学特性,并通过 Lyapunov 指数谱、分岔图和相轨迹图等数值仿真手段,表明五阶忆阻混沌系统可呈现周期、混沌、周期态与混沌态交替和瞬态混沌等复杂的非线性行为. 本文从多角度研究了系统运动产生的多稳态吸引子共存现象,分别从系统参数变化以及系统初始状态改变的角度去分析和寻找. 在不同初始条件下,系统会出现不同拓扑结构的混沌吸引子共存或者不同吸引域的多周期极限环共存,以及不同周期数的极限环与不同拓扑结构的混沌吸引子的共存. 最后,运用电路软件设计了系统的模拟电路,仿真结果较好地展现不同相平面的混沌吸引子轨迹以及验证了相关理论分析和数值仿真结果.

[参考文献] (References)

- [1] CHUA L O. Memristor—the missing circuit element[J]. IEEE transactions on circuit theory, 1971, 18(5): 507–519.
- [2] STRUKOV D B, SNIDER G S, STEWART D R, et al. The missing memristor found[J]. Nature, 2008, 453(7191): 80–83.
- [3] 武花干, 包伯成, 徐权. 基于二极管桥与串联 RL 滤波器的一阶广义忆阻器[J]. 电子学报, 2015, 43(10): 2192–2132.
- WU H G, BAO B C, XU Q. First order generalized memristor emulator based on diode bridge and series RL filter[J]. Acta electronica sinica, 2015, 43(10): 2129–2132. (in Chinese)
- [4] 闵富红, 王珠林, 王恩荣, 等. 新型忆阻器混沌电路及其在图像加密中的应用[J]. 电子与信息学报, 2016, 38(10): 2681–2688.
- MIN F H, WANG Z L, WANG E R, et al. New memristor chaotic and its application to encryption[J]. Journal of electronics & information technology, 2016, 38(10): 2681–2688. (in Chinese)
- [5] 刘东青, 程海峰, 朱玄, 等. 忆阻器及其阻变机理研究进展[J]. 物理学报, 2014, 63(18): 187301.
- LIU D Q, CHENG H F, ZHU X, et al. Research progress of memristors and memristive mechanism[J]. Acta physica sinica, 2014, 63(18): 187301. (in Chinese)

- [6] 洪庆辉,曾以成,李志军. 含磁控和荷控两种忆阻器的混沌电路设计与仿真[J]. 物理学报,2013,62(23):230502.
HONG Q H,ZENG Y C,LI Z J. Design and simulation of chaotic circuit for flux-controlled memristor and charge-controlled memristor[J]. Acta physica sinica,2013,62(23):230502.(in Chinese)
- [7] 吴洁宁,王丽丹,段书凯. 基于忆阻器的时滞混沌系统及伪随机序列发生器[J]. 物理学报,2017,66(3):030502.
WU J N,WANG L D,DUAN S K. A memristor-based time-delay chaotic systems and pseudo-random sequence generator[J]. Acta physica sinica,2017,66(3):030502.(in Chinese)
- [8] YUAN F,WANG G Y,WANG X W. Extreme multistability in a memristor-based multi-scroll hyper-chaotic system[J]. Chaos,2016,26(7):073107.
- [9] PENG G Y,MIN F H. Multistability analysis,circuit implementations and application in image encryption of a novel memristive chaotic circuit[J]. Nonlinear dynamics,2017,90(3):1607-1625.
- [10] PATEL M S,PATEL U,SEN A,et al. Experimental observation of extreme multistability in an electronic system of two coupled Rössler oscillators[J]. Physical review E,2014,89(2):022918.
- [11] 俞清,包伯成,胡丰伟,等. 基于一阶广义忆阻器的文氏桥混沌振荡器研究[J]. 物理学报,2014,63(24):240505.
YU Q,BAO B C,HU F W,et al. Wien-bridge chaotic oscillator based on first-order generalized memristor[J]. Acta physica sinica,2014,63(24):240505.(in Chinese)
- [12] 包涵,包伯成,林毅,等. 忆阻自激振荡系统的隐藏吸引子及其动力学特性[J]. 物理学报,2016,65(18):180501.
BAO H,BAO B C,LIN Y,et al. Hidden attractor and its dynamical characteristic in memristive self-oscillating system[J]. Acta physica sinica,2016,65(18):180501.(in Chinese)
- [13] SPROTT J C,LI C B. Comment on“How to obtain extreme multistability in coupled dynamical systems”[J]. Physical review E,2014,89(6):066901.
- [14] 阮静雅,孙克辉,牟俊. 基于忆阻器反馈的 Lorenz 超混沌系统及其电路实现[J]. 物理学报,2016,65(19):190502.
RUAN J Y,SUN K H,MOU J. Memristor-based Lorenz hyper-chaotic system and its circuit implementation[J]. Acta physica sinica,2016,65(19):190502.(in Chinese)
- [15] XU Q,LIN Y,BAO B C,et al. Multiple attractors in a non-ideal active voltage-controlled memristor based Chua's circuit[J]. Chaos solitons and fractals,2016,83:186-200.
- [16] KENGNE J,TABEKOUENG Z N,TAMBA V K,et al. Periodicity, chaos, and multiple attractors in a memristor-based Shinriki's circuit[J]. Chaos,2015,25(10):103126.
- [17] LI Q D,ZENG H Z,LI J. Hyperchaos in a 4D memristive circuit with infinitely many stable equilibria[J]. Nonlinear dynamics,2015,79(4):2295-2308.
- [18] DANG X Y,LI C B,BAO B C et al. Complex transient dynamics of hidden attractors in simple 4D system[J]. Chinese physics B,2015,24(5):050503.

[责任编辑:陈 庆]