

联合低秩表示和稀疏约束的双层多视角子空间聚类

张福康¹, 尹宏伟¹, 成新民¹, 杜文辉², 徐黄镇²

(1.湖州师范学院信息工程学院, 浙江 湖州 313000)

(2.湖州市特种设备检测研究院, 浙江 湖州 313000)

[摘要] 多视图子空间聚类是处理高维数据的一种聚类方法,通过分别在每个视图上构造邻接矩阵的方法解决聚类问题,但未考虑到低秩表示和稀疏约束的结合在构造邻接矩阵中的重要性. 针对此问题,提出一种联合低秩表示和稀疏约束的双层多视角子空间聚类方法,使其更全面地描述数据本身,从而实现更有效的聚类,并采用 ADMM 方法来解决每个视图相关的低秩表示和稀疏性约束优化问题. 在多个数据集上的实验表明,其聚类性能比现有的多视角子空间聚类算法好,低秩表示和稀疏约束的结合可以提高聚类的准确性.

[关键词] 多视角聚类,多视角子空间聚类,低秩表示,稀疏约束

[中图分类号] TP391 **[文献标志码]** A **[文章编号]** 1672-1292(2022)01-0059-09

Double-layer Multi-view Subspace Clustering with Joint Low-rank Representation and Sparsity Constraint

Zhang Fukang¹, Yin Hongwei¹, Cheng Xinmin¹, Du Wenhui², Xu Huangzhen²

(1.School of Information Engineering, Huzhou University, Huzhou 313000, China)

(2.Huzhou Special Equipment Inspection Center, Huzhou 313000, China)

Abstract: Multi-view clustering is the use of multiple different description of the data set to the same class of similar data together as far as possible. Among them, multi-view subspace clustering is a kind of clustering method to deal with high-dimensional data. The current approach is to solve the multi-view subspace clustering problem by constructing the affinity matrix on each view separately. The importance of the combination of low-rank representation and sparse constraints in constructing the adjacency matrix is not considered. In order to solve this problem, this paper proposes a double-layer multi-view subspace clustering with joint low-rank representation and sparsity constraint, so that it can describe the data itself more comprehensively, so as to achieve more effective clustering. For the low-rank representation and sparsity constraint optimization problems related to each view, we use ADMM method to solve them. Finally, experiments are conducted on multiple data sets, and it is found that the clustering performance of the proposed algorithm is better than the existing multi-view subspace clustering algorithm. It is proved that the combination of low rank representation and sparse constraint can improve the accuracy of clustering.

Key words: multi-view clustering, multi-view subspace clustering, low-rank representation, sparse constraint

由于数据来源的多样性,同一个数据可能有不同的观察视角.例如,网页由文本、图片和超链接构成,文本又可用多种语言表示,这些都被称作多视角数据^[1].通常,从一个视角得到的数据可推测出某一方面有用的信息.利用多视角学习可从数据中挖掘出其隐藏信息.

在多视角学习中,多视角子空间聚类利用隐藏在多个视图数据中的互补信息和一致信息来提高聚类性能.基于此,多视角子空间聚类算法得到了研究人员越来越多的关注和研究.例如,唐启凡等^[2]提出自适应多视角子空间聚类,利用基于不同视图数据点对之间近似的原理,构建表示矩阵;李凯鑫^[3]提出的基于低秩的子空间聚类算法和侯成浩^[4]提出的面向多视数据的稀疏子空间聚类方法,这两种算法分别用低

收稿日期:2021-08-31.

基金项目:湖州市公益性应用研究项目(2021GZ05)、湖州市特种设备检测研究院委托开发项目(073-20201210-02).

通讯作者:尹宏伟,博士,讲师,研究方向:机器学习与模式识别. E-mail:02713@zjhu.edu.cn

秩表示、稀疏约束的方法对原始数据的噪声进行优化。低秩表示(low rank representation, LRR)^[5]通过对数据自表示矩阵施加低秩约束来捕获全局结构,适用于探索不同子空间数据之间的相关性^[6]。但对于现实世界的数据集来说,低秩表示过于严格^[1]。稀疏子空间聚类(sparse subspace clustering, SSC)^[7]将每个数据点表示为其他数据点的稀疏线性组合,来捕捉数据的局部结构。与低秩表示相比,其假设相对宽松,只需数据来源于不相交的子空间。为了捕捉数据的全局和局部结构,结合低秩表达和稀疏约束很有必要。

本文提出一种联合低秩表示和稀疏约束的双层多视角子空间聚类(double-layer multi-view subspace clustering with joint low-rank representation and sparsity constraint, DMVSC)算法,其结构如图 1 所示。首先使用矩阵分解提取跨多个视图和多个层的潜在因素,使得这些潜在因素可有效地捕获数据的结构^[8]。同时,利用双层结构的特征,每层各自施加低秩表达和稀疏约束,有效地捕捉数据的全局和局部结构,以提高算法性能。本文的主要工作内容包括:

(1) 利用矩阵分解构造双层结构以揭示数据中固有的多个隐藏属性和不同的聚类结构,从而获得更好的聚类性能;

(2) 将低秩表示和稀疏约束集成在一个多视图框架中,既利用多视图之间的互补性,又让子空间的构建更加合理,以更全面地描述数据本身;

(3) 为了验证本文算法的有效性,选取了 5 个公开的数据集并加入 6 种对比算法进行了实验。

1 相关工作

1.1 低秩表示

文献[5]对自表示系数矩阵增加了低秩约束,提出了 LRR 算法,其原始动机是将鲁棒的主成分分析(RPCA)推广到多个子空间,其表达式为:

$$\min_Z \text{rank}(\mathbf{Z}) \quad \text{s.t. } \mathbf{X} = \mathbf{X}\mathbf{Z}, \quad (1)$$

式中, \mathbf{Z} 为数据 \mathbf{X} 关于自身的低秩表示。与 l_0 范数类似,因为秩函数也具有离散组合性质,故上述优化问题也是 NP 难问题,可被松弛为核范数最小化问题:

$$\min_Z \|\mathbf{Z}\|_* + \lambda \|\mathbf{E}\|_F \quad \text{s.t. } \mathbf{X} = \mathbf{X}\mathbf{Z} + \mathbf{E}, \quad (2)$$

式中, λ 为平衡参数; \mathbf{E} 为数据干扰项; $\|\mathbf{E}\|_F$ 为微小的高斯噪声干扰。

1.2 稀疏约束

SSC^[7]把数据本身作为字典,寻找每个数据点关于其他数据点的最优线性表示,采用一定的稀疏约束,使得每个数据点尽可能被隶属于同一子空间的其他数据点线性表示:

$$\min_{Z_i} \|\mathbf{Z}_i\|_0 \quad \text{s.t. } \mathbf{x}_i = \mathbf{X}\mathbf{Z}_i, \mathbf{Z}_{ii} = 0. \quad (3)$$

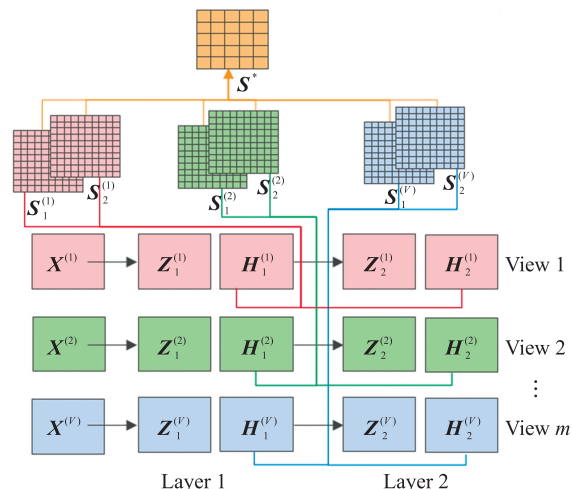
式中, $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N]$,列向量 \mathbf{x} 表示无噪声数据; \mathbf{Z}_i 为数据 \mathbf{x}_i 关于 \mathbf{X}_0 的稀疏表示。因为该问题是 NP 难问题,所以考虑最小化 l_0 范数的最紧凸松弛问题^[7],将式(3)重写为:

$$\min_Z \|\mathbf{Z}\|_1 \quad \text{s.t. } \mathbf{X} = \mathbf{X}\mathbf{Z}, \text{diag}(\mathbf{Z}) = 0. \quad (4)$$

式中, $\mathbf{Z} = [\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_N] \in \mathbf{R}^{N \times N}$ 。 $\text{diag}(\mathbf{Z}) = 0$ 约束稀疏矩阵对角线上的元素全部为 0,避免每个数据仅用自身表示,从而出现 \mathbf{Z} 为单位矩阵的情形。

2 联合低秩表示和稀疏约束的双层多视角子空间聚类

为了解决传统矩阵分解只利用最高层结构而忽略中间层信息的缺点^[8],本文提出 DMVSC 算法利用



双层模型的每一层都包含一个基本矩阵 \mathbf{Z} 和一个系数矩阵 \mathbf{H} 。Layer1 表示第一层,用于 $\mathbf{H}_1^{(v)}$ 学习低秩子空间 $\mathbf{S}_1^{(v)}$ 。Layer2 表示第二层,用于 $\mathbf{H}_2^{(v)}$ 学习稀疏子空间 $\mathbf{S}_2^{(v)}$ 。最后,结合 $\mathbf{S}_1^{(v)}$ 的信息获得共生子空间 \mathbf{S}^* 。

图 1 联合低秩表示和稀疏约束的双层多视角子空间聚类结构

Fig. 1 DMVSC framework

两层的信息,通过各自施加低秩表示和稀疏约束来增强聚类结构.

2.1 原理和目标

为了揭示数据中固有的多个隐藏属性和不同的聚类结构,将每个视图 $\mathbf{X}^{(v)}$ 分解出 $\mathbf{Z}_i^{(v)}$ 和 $\mathbf{H}_i^{(v)}$. 第一层通过分解公式 $\mathbf{X}^{(v)} \approx \mathbf{Z}_1^{(v)} \mathbf{H}_1^{(v)}$, 得到 $\mathbf{Z}_1^{(v)} \in \mathbf{R}^{d_v \times k_1}$, $\mathbf{H}_1^{(v)} \in \mathbf{R}^{k_1 \times n}$. 之后系数矩阵 $\mathbf{H}_1^{(v)}$ 可通过分解公式 $\mathbf{H}_1^{(v)} \approx \mathbf{Z}_{i+1}^{(v)} \mathbf{H}_{i+1}^{(v)}$, 得到 $\mathbf{Z}_2^{(v)} \in \mathbf{R}^{d_v \times k_2}$, $\mathbf{H}_2^{(v)} \in \mathbf{R}^{k_2 \times n}$. 模型为:

$$O_1(\mathbf{Z}_i^{(v)}, \mathbf{H}_i^{(v)}) = \sum_{v=1}^V \|\mathbf{X}^{(v)} - \mathbf{Z}_1^{(v)} \mathbf{Z}_2^{(v)} \dots \mathbf{Z}_m^{(v)} \mathbf{H}_m^{(v)}\|_F^2 \quad (5)$$

$$\text{s.t. } \mathbf{H}_i^{(v)} \geq 0, i \in \{1, 2, \dots, m\}, v \in \{1, 2, \dots, V\}.$$

式中, m 为层数; $\mathbf{Z}_i^{(v)}$ 和 $\mathbf{H}_i^{(v)}$ 分别为视图 v 的第 i 层的基矩阵和系数矩阵. 但 $\mathbf{H}_i^{(v)}$ 是从不同的层和视图中获取的, 不足以表示数据之间的关系, 且不够有效和鲁棒. 受子空间聚类成功的启发, 本文通过在 $\mathbf{H}_i^{(v)}$ 第一层中学习低秩表示 $\mathbf{S}_1^{(v)}$, $\mathbf{H}_i^{(v)}$ 第二层中学习稀疏约束 $\mathbf{S}_2^{(v)}$ 来进一步增强聚类结构:

$$O_2(\mathbf{Z}_i^{(v)}, \mathbf{H}_i^{(v)}, \mathbf{S}_i^{(v)}) = \sum_{v=1}^V \|\mathbf{X}^{(v)} - \mathbf{Z}_1^{(v)} \mathbf{Z}_2^{(v)} \mathbf{H}_2^{(v)}\|_F^2 + \sum_{v=1}^V \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{2} \|\mathbf{H}_1^{(v)} - \mathbf{H}_1^{(v)} \mathbf{S}_1^{(v)}\|_F^2 + \|\mathbf{S}_1^{(v)}\|_* \right) + \sum_{v=1}^V \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{2} \|\mathbf{H}_2^{(v)} - \mathbf{H}_2^{(v)} \mathbf{S}_2^{(v)}\|_F^2 + \|\mathbf{S}_2^{(v)}\|_1 \right) \quad (6)$$

$$\text{s.t. } \mathbf{S}_i^{(v)} \geq 0, i \in \{1, 2\}, v \in \{1, 2, \dots, V\}.$$

式中, $\mathbf{S}_i^{(v)} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 是视图 v 的第 i 层的子空间表示. 从不同的视图和层获得子空间 $\mathbf{S}_i^{(v)}$ 后, 受文献[9]的启发, 本文提出基于质心的正则化方案, 可以跨越不同的视图对共同的质心进行表示, 学习出一个共生子空间 \mathbf{S}^* . 该子空间可以来自所有子空间的聚类信息进行一个汇总, 其模型为:

$$O_3(\mathbf{Z}_i^{(v)}, \mathbf{H}_i^{(v)}, \mathbf{S}_i^{(v)}, \mathbf{S}^*) = \sum_{v=1}^V \|\mathbf{X}^{(v)} - \mathbf{Z}_1^{(v)} \mathbf{Z}_2^{(v)} \mathbf{H}_2^{(v)}\|_F^2 + \sum_{v=1}^V \sum_{i=1}^2 \lambda_1 \left(\frac{1}{2} \|\mathbf{H}_1^{(v)} - \mathbf{H}_1^{(v)} \mathbf{S}_1^{(v)}\|_F^2 + \|\mathbf{S}_1^{(v)}\|_* \right) + \sum_{v=1}^V \sum_{i=1}^2 \lambda_2 \left(\frac{1}{2} \|\mathbf{H}_2^{(v)} - \mathbf{H}_2^{(v)} \mathbf{S}_2^{(v)}\|_F^2 + \|\mathbf{S}_2^{(v)}\|_1 \right) + \lambda_3 \sum_{i=1}^2 \|\mathbf{S}_i^{(v)} - \mathbf{S}^*\|_F^2 \quad (7)$$

$$\text{s.t. } \mathbf{H}_i^{(v)} \geq 0, \mathbf{S}_i^{(v)} \geq 0.$$

2.2 优化算法

由于目标函数包含多个参数变量, 同时求解难度很大, 因此采用交换迭代的方法进行优化.

2.2.1 固定变量 $\mathbf{H}_i^{(v)}$, $\mathbf{S}_i^{(v)}$ 和 \mathbf{S}^* , 更新 $\mathbf{Z}_i^{(v)}$

参考文献[10], 对式(7)求偏导 $\mathbf{Z}_i^{(v)}$, 并置为0, 得到式(8):

$$\mathbf{Z}_i^{(v)} \leftarrow \Psi^T \mathbf{X}^{(v)} \widetilde{\mathbf{H}}_i^{(v)\tau}, \quad (8)$$

式中, $\Psi = \mathbf{Z}_1^{(v)} \dots \mathbf{Z}_{i-1}^{(v)}$; 符号 $(\cdot)^\tau$ 表示摩尔-彭罗斯伪逆算子, 其计算表达式为: $\mathbf{A}^\tau = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$; $\widetilde{\mathbf{H}}_i^{(v)}$ 表示第 v 个视图中第 i 层因子的重构.

2.2.2 固定变量 $\mathbf{Z}_i^{(v)}$, $\mathbf{S}_i^{(v)}$ 和 \mathbf{S}^* , 更新 $\mathbf{H}_i^{(v)}$

采用与文献[10]类似的方式更新 $\mathbf{H}_i^{(v)}$, 只保留式(7)中与 $\mathbf{H}_i^{(v)}$ 相关的部分:

$$\mathbf{J} = \|\mathbf{X}^{(v)} - \Psi \mathbf{H}_i^{(v)}\|_F^2 + \lambda_1 \|\mathbf{H}_1^{(v)} - \mathbf{H}_1^{(v)} \mathbf{S}_1^{(v)}\|_F^2 + \lambda_1 \|\mathbf{H}_2^{(v)} - \mathbf{H}_2^{(v)} \mathbf{S}_2^{(v)}\|_F^2. \quad (9)$$

对式(9)求偏导 $\mathbf{H}_i^{(v)}$, 并置为0, 得到式(10):

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \mathbf{H}_i^{(v)}} = -2\Psi^T \mathbf{X}^{(v)} + 2\Psi^T \Psi \mathbf{H}_i^{(v)} + 2\lambda_1 (\mathbf{H}_i^{(v)} - 2\mathbf{H}_i^{(v)} \mathbf{S}_i^{(v)} + \mathbf{H}_i^{(v)} \mathbf{S}_i^{(v)} \mathbf{S}_i^{(v)T}). \quad (10)$$

结合文献[10], 由式(10)可得出 $\mathbf{H}_i^{(v)}$ 的更新规则:

$$\mathbf{H}_i^{(v)} \leftarrow \mathbf{H}_i^{(v)} \sqrt{\frac{\Phi_n}{\Phi_d}}, \quad (11)$$

式中,

$$\Phi_n = [\Psi^T \mathbf{X}^{(v)}]_{\text{pos}} + [\Psi^T \Psi \mathbf{H}_i^{(v)}]_{\text{neg}} + \frac{\lambda_1}{2} [\mathbf{H}_i^{(v)}]_{\text{neg}} + \lambda_i [\mathbf{H}_i^{(v)} \mathbf{S}_i^{(v)}]_{\text{pos}} + \frac{\lambda_i}{2} [\mathbf{H}_i^{(v)} \mathbf{S}_i^{(v)} \mathbf{S}_i^{(v)T}]_{\text{neg}};$$

$$\Phi_d = [\Psi^T X^{(v)}]^{neg} + [\Psi^T \Psi H_i^{(v)}]^{pos} + \frac{\lambda_i}{2} [H_i^{(v)}]^{pos} + \lambda_i [H_i^{(v)} S_i^{(v)}]^{neg} + \frac{\lambda_i}{2} [H_i^{(v)} S_i^{(v)} S_i^{(v)T}]^{pos};$$

$[\cdot]^{pos}$ 和 $[\cdot]^{neg}$ 表示将矩阵中所有正数元素和负数元素分别替换为 0 的运算, 也即: $[A]_{jk}^{pos} = \frac{|A_{jk}| + A_{jk}}{2}$,

$$[A]_{jk}^{neg} = \frac{|A_{jk}| - A_{jk}}{2}.$$

2.2.3 固定变量 $H_i^{(v)}$ 、 $Z_i^{(v)}$ 和 S^* , 更新 $S_i^{(v)}$

只保留式(7)中与 $S_i^{(v)}$ 相关的部分, 可得:

$$L_1 = \frac{\lambda_1}{2} \|H_1^{(v)} - H_1^{(v)} S_1^{(v)}\|_F^2 + \|S_1^{(v)}\|_* + \frac{\lambda_2}{2} \|H_2^{(v)} - H_2^{(v)} S_2^{(v)}\|_F^2 + \|S_2^{(v)}\|_1 + \lambda_3^{(v)} \sum_{i=1}^2 \|S_i^{(v)} - S^*\|_F^2 \quad (12)$$

$$\text{s.t. } H_i^{(v)} \geq 0, S_i^{(v)} \geq 0.$$

引入辅助变量 $A^{(v)}$, $B^{(v)}$, $Y_1^{(v)}$, $Y_2^{(v)}$, $Y_3^{(v)}$, $Y_4^{(v)}$, 可得:

$$L_2 = \frac{\lambda_1}{2} \|H^{(v)} - H^{(v)} A^{(v)}\|_F^2 + \lambda_1 \|Y_1^{(v)}\|_* + \frac{\lambda_2}{2} \|H^{(v)} - H^{(v)} B^{(v)}\|_F^2 + \lambda_2 \|Y_3^{(v)}\|_1 +$$

$$\lambda_3^{(v)} \|A^{(v)} - S^*\|_F^2 + \lambda_3^{(v)} \|B^{(v)} - S^*\|_F^2 \quad (13)$$

$$\text{s.t. } A^{(v)} = Y_1^{(v)}, A^{(v)} = Y_2^{(v)},$$

$$B^{(v)} = Y_3^{(v)} - \text{diag}(Y_3^{(v)}), B^{(v)} = Y_4^{(v)}.$$

写成拉格朗日函数形式, 可得:

$$L_3 = \frac{\lambda_1}{2} \|H^{(v)} - H^{(v)} A^{(v)}\|_F^2 + \lambda_1 \|Y_1^{(v)}\|_* + \lambda_3^{(v)} \|Y_2^{(v)} - S^*\|_F^2 + \frac{u}{2} \|A^{(v)} - Y_1^{(v)} + \Lambda_1\|_F^2 +$$

$$\frac{u}{2} \|A^{(v)} - Y_2^{(v)} + \Lambda_2\|_F^2 + \frac{\lambda_2}{2} \|H^{(v)} - H^{(v)} B^{(v)}\|_F^2 + \lambda_3^{(v)} \|Y_4^{(v)} - S^*\|_F^2 + \frac{u}{2} \|B^{(v)} - Y_3^{(v)} + \Lambda_3\|_F^2 +$$

$$\lambda_2 \|Y_3^{(v)}\|_1 + \frac{u}{2} \|B^{(v)} - Y_4^{(v)} + \Lambda_4\|_F^2$$

$$\text{s.t. } Y_3^{(v)} = Y_3^{(v)} - \text{diag}(Y_3^{(v)}).$$

式中, μ 为惩罚参数; Λ_i 为拉格朗日对偶变量.

使用 ADMM 方法^[11]解决式(14)中的凸优化问题, 对式(14)的 $A^{(v)}$ 求偏导, 并置为 0, 可得:

$$A^{(v)} = (\lambda_1 (H_1^{(v)})^T H_1^{(v)} + 2\mu I)^{-1} (\lambda_1 (H_1^{(v)})^T H_1^{(v)} + \mu (Y_1^{(v)} - \Lambda_1^{(v)}) + \mu (Y_2^{(v)} - \Lambda_2^{(v)})). \quad (15)$$

对式(14)求偏导 $B^{(v)}$, 并置为 0, 可得:

$$B^{(v)} = (\lambda_2 (H_2^{(v)})^T H_2^{(v)} + 2\mu I)^{-1} (\lambda_2 (H_2^{(v)})^T H_2^{(v)} + \mu (Y_3^{(v)} - \Lambda_3^{(v)}) + \mu (Y_4^{(v)} - \Lambda_4^{(v)})). \quad (16)$$

根据文献[12], $Y_1^{(v)}$ 的更新为:

$$Y_1^{(v)} = \Pi_{\frac{\lambda_1}{\mu}} \left(A^{(v)} + \frac{\Lambda_2^{(v)}}{\mu} \right), \quad (17)$$

式中, $\Pi_{\beta}(Y_1^{(v)}) = U \pi_{\beta}(\Sigma) V^T$ 对 $Y_1^{(v)}$ 的奇异值执行软阈值运算, 而 $U \Sigma V^T$ 是 $Y_1^{(v)}$ 的奇异值分解.

对式(14)求偏导 $Y_2^{(v)}$, 并置为 0, 可得:

$$Y_2^{(v)} = (2\lambda_3^{(v)} + \mu)^{-1} (2\lambda_3^{(v)} S^* + \mu (A^{(v)} + \Lambda_2^{(v)})). \quad (18)$$

根据文献[13], $Y_3^{(v)}$ 的更新为:

$$Y_3^{(v)} = \pi_{\frac{\lambda_2}{\mu}} \left(B^{(v)} + \frac{\Lambda_3^{(v)}}{\mu} \right); Y_3^{(v)} = Y_3^{(v)} - \text{diag}(Y_3^{(v)}). \quad (19)$$

式中, $\pi_{\beta}(\cdot)$ 是软阈值运算.

对式(14)求偏导 $Y_4^{(v)}$, 并置为 0, 可得:

$$Y_4^{(v)} = (2\lambda_3^{(v)} + \mu)^{-1} (2\lambda_3^{(v)} S^* + \mu (B^{(v)} + \Lambda_4^{(v)})). \quad (20)$$

则对偶变量 $\mathbf{A}^{(v)}$ 、 $\mathbf{B}^{(v)}$ 、 $\mathbf{Y}_1^{(v)}$ 、 $\mathbf{Y}_2^{(v)}$ 、 $\mathbf{Y}_3^{(v)}$ 、 $\mathbf{Y}_4^{(v)}$ 更新为:

$$\begin{aligned}\Lambda_1^{(v)} &= \Lambda_1^{(v)} + \mu(\mathbf{A}^{(v)} - \mathbf{Y}_1^{(v)}), \\ \Lambda_2^{(v)} &= \Lambda_2^{(v)} + \mu(\mathbf{A}^{(v)} - \mathbf{Y}_2^{(v)}), \\ \Lambda_3^{(v)} &= \Lambda_3^{(v)} + \mu(\mathbf{B}^{(v)} - \mathbf{Y}_3^{(v)}), \\ \Lambda_4^{(v)} &= \Lambda_4^{(v)} + \mu(\mathbf{B}^{(v)} - \mathbf{Y}_4^{(v)}), \\ \mu &= \min(\rho\mu, \mu_{\max}).\end{aligned}\tag{21}$$

式中, μ_{\max} 为乘子系数上限; ρ 为乘子的正系数.

2.2.4 固定变量 $\mathbf{Z}_i^{(v)}$ 、 $\mathbf{H}_i^{(v)}$ 和 $\mathbf{S}_i^{(v)}$, 更新 \mathbf{S}^*

根据文献[9]对式(13)求偏导 \mathbf{S}^* , 并置为 0, 可得:

$$\mathbf{S}^* = \frac{\sum_{v=1}^{n_v} \lambda_3^{(v)} \mathbf{A}^{(v)} + \sum_{v=1}^{n_v} \lambda_3^{(v)} \mathbf{B}^{(v)}}{2 \sum_{v=1}^{n_v} \lambda_3^{(v)}}.\tag{22}$$

通过基于质心的正则化方案得到共生子空间 \mathbf{S}^* . 通过 $\mathbf{W} = (\mathbf{S}^* + (\mathbf{S}^*)^T)/2$ 构造加权图的对称非负相似度矩阵, 并对 \mathbf{W} 使用谱聚类获得数据的类簇划分. 算法的详细步骤为:

算法 1 求解问题(7)

输入: 数据集 \mathbf{X} , 低秩参数 λ_1 , 稀疏参数 λ_2 , 视图权重 $\lambda_3^{(v)}$, 分层参数 layers;

Step 1 For $v = 1$; num_view;

Step 2 初始化 $\mathbf{Z}_i^{(v)}$, $\mathbf{H}_i^{(v)}$;

Step 3 While not converged do;

Step 4 通过式(8), 更新变量 $\mathbf{Z}_i^{(v)}$;

Step 5 通过式(11), 更新变量 $\mathbf{H}_i^{(v)}$;

Step 6 通过算法 2, 更新变量 $\mathbf{S}_i^{(v)}$;

Step 7 End while;

Step 8 End for;

Step 9 通过式(22)更新变量 \mathbf{S}^* ;

输出: 共生矩阵 \mathbf{S}^* .

算法 2 用 ADMM 算法求解问题(14)

输入: 分解出的矩阵 $\mathbf{H}_i^{(v)}$, 迭代控制参数 μ ;

初始化: $\mathbf{A}^{(v)} = \mathbf{B}^{(v)} = \mathbf{Y}_1^{(v)} = \mathbf{Y}_2^{(v)} = \mathbf{Y}_3^{(v)} = \mathbf{Y}_4^{(v)} = \mathbf{0}$, $\varepsilon = 10^{-3}$, $\mu_{\max} = 10^{10}$, $\rho = 1.5$;

Step 1 While not converged do;

Step 2 固定其他变量, 用式(15)更新 $\mathbf{A}^{(v)}$;

Step 3 固定其他变量, 用式(16)更新 $\mathbf{B}^{(v)}$;

Step 4 固定其他变量, 用式(17)、(18)、(19)、(20)各自更新 $\mathbf{Y}_1^{(v)}$, $\mathbf{Y}_2^{(v)}$, $\mathbf{Y}_3^{(v)}$, $\mathbf{Y}_4^{(v)}$;

Step 5 用式(21)更新对偶变量;

Step 6 判断收敛条件;

$$\|\mathbf{A}^{(v)} - \mathbf{Y}_1^{(v)}\| \leq \varepsilon; \|\mathbf{A}^{(v)} - \mathbf{Y}_2^{(v)}\| \leq \varepsilon;$$

$$\|\mathbf{B}^{(v)} - \mathbf{Y}_3^{(v)}\| \leq \varepsilon; \|\mathbf{B}^{(v)} - \mathbf{Y}_4^{(v)}\| \leq \varepsilon;$$

Step 7 End while;

输出: $\mathbf{S}_i^{(v)}$.

2.3 复杂度分析

由文献[10]可知矩阵分解的时间复杂度为 $O(mVt_1(ndk + nk^2 + kn^2))$ 阶, 其中, n 为样本数, m 为层数, V 为视图数, t_1 是直到收敛的迭代数, k 是最大的 layers 尺寸, d 是所有视图中特征数目的最大值. $\mathbf{S}_i^{(v)}$ 的时

间复杂度主要由矩阵求逆和奇异值分解决定,且都是 $n \times n$ 方阵,因此复杂度为 $O(t_2(n^3))$,其中, t_2 是算法 2 的迭代次数. 因此,算法总复杂度为 $O(mVt_1(ndk+nk^2+kn^2+t_2(n^3)))$.

3 仿真实验

为了验证算法有效性,实验采用 5 种公开数据集,用 3 种评价指标 ACC、NMI 和 Purity 分别从聚类划分的准确度、聚类性能及预测精度 3 个方面对算法进行评价^[1]. 最后使用 6 种对比算法来与本文 DMVSC 算法作比较.

3.1 实验数据集

本文采用了 uci-digit、3-sources、MSRC_v1、BBCSport 和 Outdoor-Scene 5 个数据集,如表 1 所示.

(1) uci-digit: 包含手写数字 0 到 9 的 2 000 个样本,共有 10 个类.

(2) 3-sources: 包含来自 BBC、Reuter、guardian 新闻文章的数据集,使用其中 169 篇.

(3) MSRC_v1: 包含 240 张共 8 个类别的图像,本实验选择常用的牛、树、建筑、飞机、人脸、汽车和自行车 7 个物体共计 210 张.

(4) BBCSport: 包含来自 2 个不同领域的 544 条体育新闻.

(5) Outdoor-Scene: 包含 2 688 幅图像,提取每幅图像的 4 个不同的特征向量,包括 512 维 GIST、432 维彩色矩、256 维 HOG 和 48 维 DLBP.

3.2 对比算法

将 DMVSC 算法与其他 6 种算法进行对比实验,其中包含单视角聚类算法 1 种,多视角聚类算法 5 种. 单视角聚类包括谱聚类(spectral clustering, SC)^[14]算法. 多视角聚类算法包括多视图共生图聚类(multiview consensus graph clustering, MCGC)^[15]算法、多视角聚类的图学习(graph learning for multi-view clustering, MVGL)^[16]算法、基于低秩稀疏分解的鲁棒多视图谱聚类(robust multi-view spectral clustering via low-rank and sparse decomposition, RMSC)^[17]算法、基于谱扰动的加权多视角谱聚类(weighted multi-view spectral clustering based on spectral perturbation, WMSC)^[18]算法和基于低秩稀疏约束的自权重多视角子空间聚类(self weighted multi-view subspace clustering with low-rank sparse constrain, SWLRSC)^[1]算法.

3.3 参数设置

本文算法中有 5 个参数: λ_1 、 λ_2 、 λ_3 、Layers、 μ , 其中 $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$. λ_1 用于控制低秩层, λ_2 用于控制稀疏层, λ_3 用于控制每个视图的权重. 由于尚无关于视图重要性的任何先验信息,因此本文对每个视图 v 使用相同的权重. Layers 代表每层的大小. μ 用于控制迭代.

以下以 MSRC_v1 数据集为例分析参数设置. Layers = {7, 4} 时,固定 $\lambda_3 = 0.3$ 更新 λ_1 、 μ 的值. 图 2 是对参数 λ_3 的对比分析,固定 $\mu = 1 \times 10^5$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.5$. 可以看出,当 $\lambda_3 = 0.6$ 时,聚类效果较好且稳定. 从图 3 可以看出,当 μ 在 1×10^5 到 1×10^7 之间变化且 λ_1 在 0.5 时具有更稳定的性能. 因此,在 MSRC_v1 数据集上 5 个参数设置为: $\mu = 1 \times 10^5$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.5$, $\lambda_3 = 0.6$, Layers = (7, 4). 最终聚类结果如图 3(c) 所示. 基于同样的步骤可以得出 BBCSport, uci-digit, 3-source, Outdoor-Scene 数据集的最佳参数: 迭代参数设置分别为 $\{10^3, 10^1, 10^3, 10^1\}$; Layers 设置分别为 $\{(140, 4), (600, 50), (89, 13), (1000, 100)\}$.

3.4 实验结果

为了避免算法随机初始化引起的误差,本实验在数据集上均运行 10 次,记录平均值和标准差,采用“平均值(标准差)”的格式进行展示. 结果如表 2 所示,DMVSC 在数据集 ACC 指标上取得了最优结果. 相

表 1 多视图数据集

Table 1 Multi-view datasets

数据集	样本数	视图数	类
uci-digit	2 000	3	10
3-sources	169	3	6
MSRC_v1	210	5	7
BBCSport	544	2	5
Outdoor-Scene	2 688	4	8

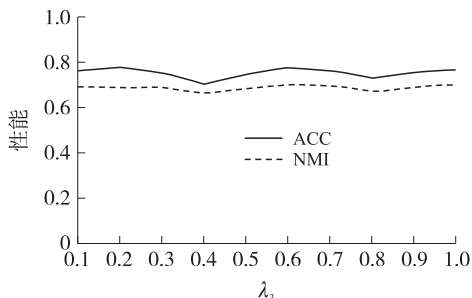


图 2 固定 λ_1 、 λ_2 和 μ 后的实验结果对比

Fig. 2 Comparison of experimental results after fixing λ_1 , λ_2 and μ

比单视角聚类算法,DMVSC 构建的多视图结构可以更充分地利用多视角信息. 相比以 WMSC 为代表的多视角聚类算法,DMVSC 通常具有更好的性能,这是由于 DMVSC 利用双层结构将低秩表示和稀疏约束结合在一起,可以更全面地描述数据本身.

DMVSC 在多视角数据的表示上增加了低秩表示和稀疏约束结合的方式,改进了多视角子空间聚类算法. 这种算法既利用多视角之间的互补性,又让子空间的构建更加合理,可以获得更优的聚类效果.

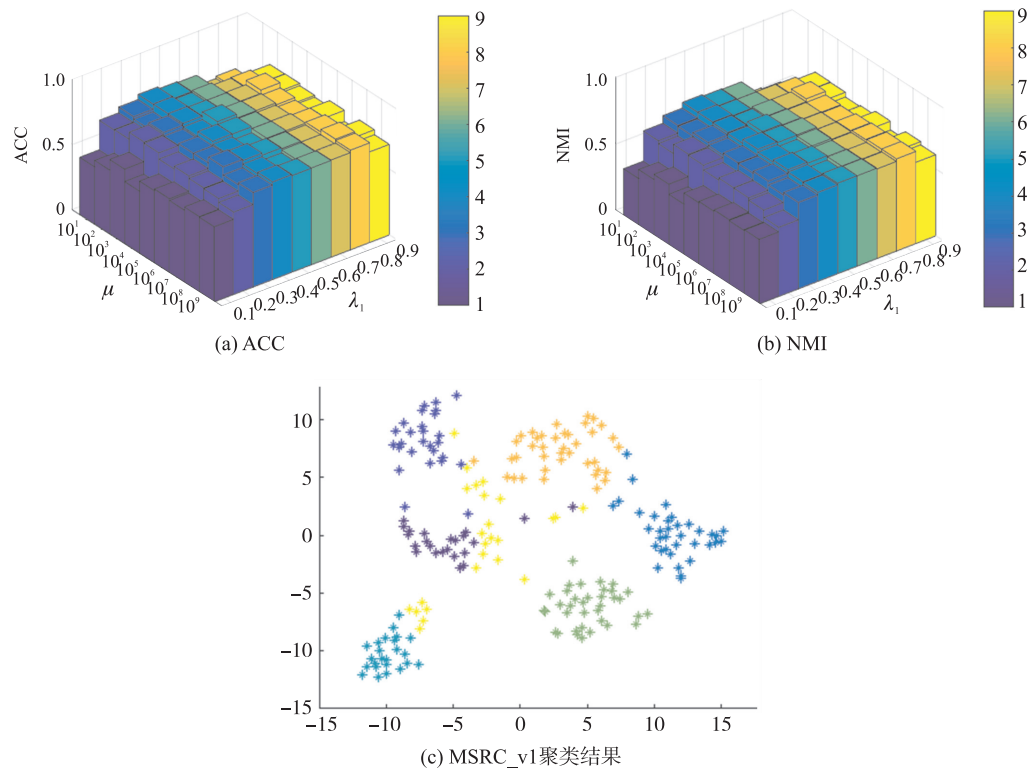


图3 MSRC_v1 数据集在 λ_1 和 μ 值不同情况下的表现和聚类结果

Fig. 3 The performance and clustering results of MSRC_v1 dataset under different λ_1 and μ

表 2 对比实验结果

Table 2 Comparison of clustering performance

数据集	算法	NMI	ACC	PURITY	运行时间/s
BBCSport	SC	0.126(0.022)	0.425(0.012)	0.469(0.020)	0.077
	MCGC	0.636(0.000)	0.832(0.000)	0.832(0.000)	0.693
	MVGL	0.708(0.000)	0.726(0.000)	0.762(0.000)	0.242
	RMSC	0.415(0.000)	0.566(0.000)	0.610(0.000)	4.266
	WMSC	0.471(0.002)	0.611(0.002)	0.680(0.002)	0.090
	SWLRSC	0.021(0.000)	0.356(0.000)	0.241(0.000)	2.856
	DMVSC	0.692(0.005)	0.835(0.596)	0.798(0.008)	9.866
uci-digit	SC	0.637(0.020)	0.700(0.036)	0.514(0.020)	1.048
	MCGC	0.752(0.000)	0.753(0.000)	0.791(0.000)	17.311
	MVGL	0.824(0.054)	0.857(0.000)	0.857(0.000)	73.598
	RMSC	0.248(0.004)	0.257(0.000)	0.332(0.005)	101.621
	WMSC	0.868(0.000)	0.841(0.000)	0.866(0.000)	0.453
	SWLRSC	0.809(0.000)	0.850(0.000)	0.614(0.000)	2 657.000
	DMVSC	0.796(0.023)	0.859(0.055)	0.773(0.050)	275.304
3-sources	SC	0.411(0.034)	0.478(0.040)	0.595(0.031)	0.169
	MCGC	0.553(0.000)	0.734(0.000)	0.763(0.000)	0.361
	MVGL	0.561(0.000)	0.727(0.000)	0.763(0.000)	1.051
	RMSC	0.393(0.009)	0.394(0.005)	0.594(0.008)	0.513
	WMSC	0.417(0.005)	0.424(0.005)	0.601(0.005)	0.061
	SWLRSC	0.602(0.000)	0.704(0.000)	0.672 6(0.000)	9.115
	DMVSC	0.615(0.040)	0.635(0.075)	0.677(0.062)	2.697

续表 2 Table 2 continued					
数据集	算法	NMI	ACC	PURITY	运行时间/s
MSRC_v1	SC	0.592(0.051)	0.680(0.068)	0.695(0.056)	0.253
	MCGC	0.632(0.000)	0.742(0.000)	0.747(0.000)	0.772
	MVGL	0.721(0.000)	0.747(0.000)	0.776(0.000)	1.835
	RMSC	0.691(0.006)	0.744(0.002)	0.797(0.002)	0.708
	WMSC	0.710(0.007)	0.762(0.003)	0.798(0.006)	0.228
	SWLRSC	0.504(0.000)	0.605(0.000)	0.377(0.000)	10.505
	DMVSC	0.694(0.039)	0.776(0.045)	0.665(0.043)	1.931
Outdoor-Scene	SC	0.024(0.001)	0.180(0.001)	0.184(0.002)	2.537
	MCGC	0.390(0.000)	0.559(0.000)	0.559(0.000)	39.763
	MVGL	0.298(0.000)	0.446(0.000)	0.446(0.000)	281.372
	RMSC	0.134(0.000)	0.240(0.000)	0.278(0.000)	292.527
	WMSC	0.631(0.010)	0.630(0.010)	0.659(0.002)	1.378
	SWLRSC	0.357(0.000)	0.399(0.000)	0.694(0.000)	2 840.930
	DMVSC	0.486(0.000)	0.657(0.000)	0.496(0.000)	720.175

3.5 收敛性分析

为了证明收敛性,图 4 展示了本文算法在 5 个数据集上的收敛情况,可以观察到曲线大约在 10 个迭代数内达到收敛,证明了算法在实践中可以快速稳定地收敛.

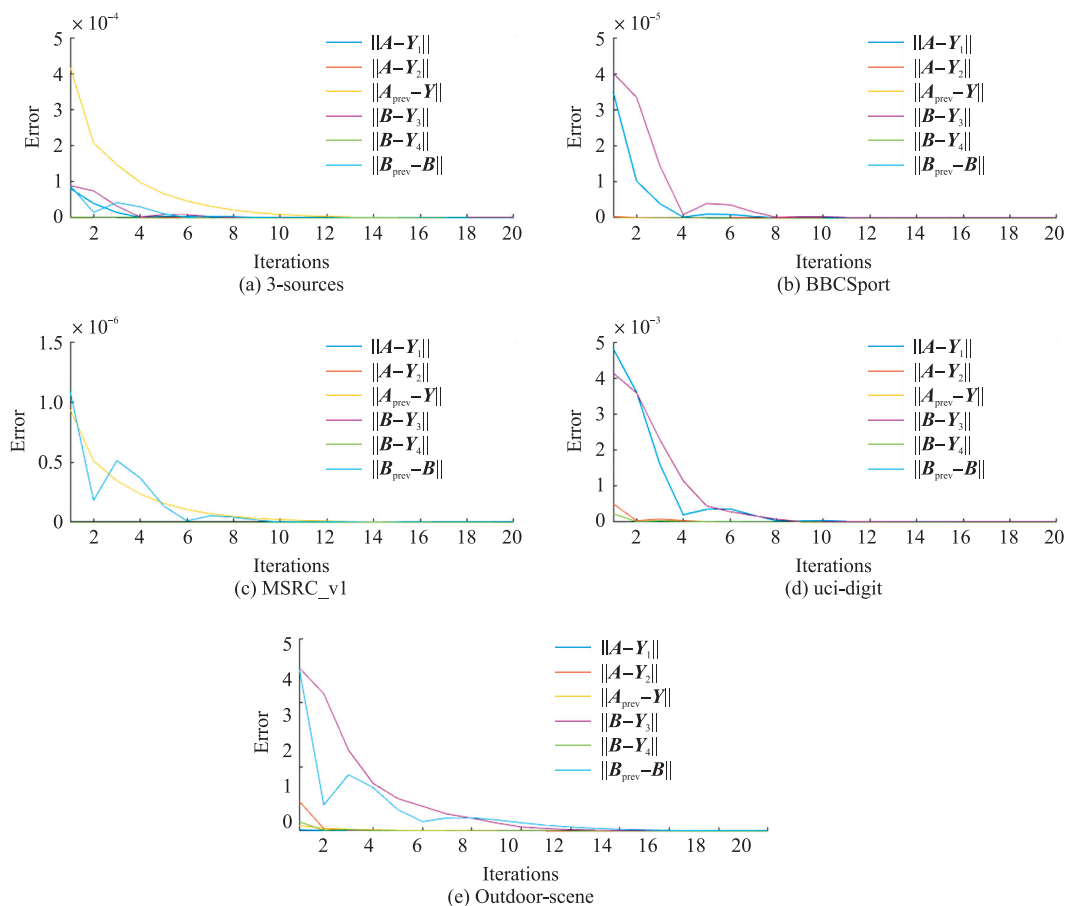


图 4 5 个数据集的收敛曲线

Fig. 4 Convergence curves on the five datasets

4 结论

为了解决多视角子空间聚类直接合并会造成多视角数据大量信息缺失的问题,本文提出 DMVSC 算法,利用矩阵分解产生双层结构,将低秩表示和稀疏约束结合在一起,以实现更有效的聚类.

DMVSC 算法首先在每个视图上执行矩阵分解,之后进一步增强系数矩阵聚类结构:第一层学习低秩

表示,第二层学习稀疏约束. 优化过程中使用 ADMM 方法对目标函数进行求解,然后利用基于质心的正则化方案学习各视图共享的潜在一致数据结构. 实验过程中,参数 layers 块的大小会对结果产生较大的影响,所以利用网格搜索的方法先使用较广的搜索范围和较大的步长,来寻找全局最优值得可能位置;然后逐渐缩小搜索范围和步长,来更精确地定位合适的数值. 有合适的 layers 后,再进一步确定其余参数. 实验部分也证明了 DMVSC 算法的有效性.

当然,该算法还存在不足,如在模型中未考虑多视角数据寻找各视图的一致结构时对各视图权值的自适应,且由于可选参数范围很大,块的大小在大规模数据集上需经过较长时间的调参. 这将是今后研究工作的重点.

[参考文献] (References)

- [1] 夏菁,丁世飞. 基于低秩稀疏约束的自权重多视角子空间聚类[J]. 南京大学学报(自然科学),2020,56(6):862-869.
- [2] 唐启凡,张玉龙,何士豪,等. 自适应多视角子空间聚类[J]. 西安交通大学学报,2021,55(5):102-112.
- [3] 李凯鑫. 基于低秩的子空间聚类算法[D]. 广州:华南理工大学,2018.
- [4] 侯成浩. 面向多视数据的稀疏子空间聚类方法研究[D]. 北京:北京工业大学,2017.
- [5] LIU G C, LIN Z C, YU Y. Robust subspace segmentation by low-rank representation[C]//Proceedings of the 27th International Conference on Machine Learning. Haifa, Israel: Omnipress, 2010: 663-670.
- [6] 江楠,张国明,王俊淑,等. 融合低秩和形态学的高光谱影像特征提取[J]. 南京师范大学学报(工程技术版),2020,20(2):52-58.
- [7] ELHAMIFAR E, VIDAL R. Sparse subspace clustering[C]//Proceedings of the 2009 IEEE Conference on Computer Vision & Pattern Recognition. Miami, USA: IEEE, 2009: 2790-2797.
- [8] XUE Z, DU J P, DU D W, et al. Deep low-rank subspace ensemble for multi-view clustering[J]. Information Sciences, 2019, 482: 210-227.
- [9] BRBIC M, KOPRIVA I. Multi-view low-rank sparse subspace clustering[J]. Pattern Recognition, 2018, 73: 247-258.
- [10] DING C H Q, LI T, JORDAN M I. Convex and semi-nonnegative matrix factorizations[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2010, 32(1): 45-55.
- [11] BOYD S, PARIKH N, CHU E, et al. Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers[J]. Foundations and Trends in Machine Learning, 2011, 3(1): 1-122.
- [12] CAI J F, CANDÈS E J, SHEN Z W. A singular value thresholding algorithm for matrix completion[J]. SIAM Journal on Optimization, 2010, 20(4): 1956-1982.
- [13] DAUBECHIES I, DEFRISE M, DE MOL C. An iterative thresholding algorithm for linear inverse problems with a sparsity constraint[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 2004, 57(11): 1413-1457.
- [14] YU S X, SHI J B. Multiclass spectral clustering[C]//Proceedings of the 9th IEEE International Conference on Computer Vision. Nice, France: IEEE, 2003.
- [15] ZHAN K, NIE F P, WANG J, et al. Multiview consensus graph clustering[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2019, 28(3): 1261-1270.
- [16] ZHAN K, ZHANG C Q, GUAN J P, et al. Graph learning for multiview clustering[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2018, 48(10): 2887-2895.
- [17] XIA R K, PAN Y, DU L, et al. Robust multi-view spectral clustering via low-rank and sparse decomposition[C]//Proceedings of the 28th AAAI Conference on Artificial Intelligence. Quebec, Canada: AAAI Press, 2014: 2149-2155.
- [18] ZONG L L, ZHANG X C, LIU X Y, et al. Weighted multi-view spectral clustering based on spectral perturbation[C]//Proceedings of the Thirty-Second AAAI Conference on Artificial Intelligence. New Orleans, USA: AAAI Press, 2018.

[责任编辑:严海琳]