doi:10.3969/j.issn.1672-1292.2022.04.005

有向超图的超网络能量及其性质

刘胜久[1],伍小兵[1],曹小平[2],汪应[1],欧明辉[1]

(1.重庆工程职业技术学院大数据与物联网学院,重庆 402260)
(2.重庆科创职业学院人工智能学院,重庆 402160)

[摘要]　图能量表述为方阵形式的矩阵特征值绝对值之和. 网络能量已在无向图、有向图及混合图中得到较为成功的应用,与传统意义上的图能量之间存在多个相同或相似的上下限. 由于图与超图之间的关联,无向图与有向图的网络能量及无向超图的超网络能量之间存在密切联系. 将超网络能量由无向超图推广应用到有向超图,提出了有向超图的超网络能量,分析了无向超图与有向超图的超网络能量之间的关联,同时论述了无向图与有向图的网络能量及无向超图与有向超图的超网络能量之间的联系,最后给出了有向超图的超网络能量若干重要性质.

[关键词]　复杂网络,超图,有向超图,图能量,网络能量,超网络能量

[中图分类号]TP391　[文献标志码]A　[文章编号]1672-1292(2022)04-0036-09

Hypernetwork Energy of Directed Hypergraphs and Its Properties

Liu Shengjiu[1],Wu Xiaobing[1],Cao Xiaoping[2],Wang Ying[1],Ou Minghui[1]

(1.Big Data and Internet of Things School,Chongqing Vocational Institute of Engineering,Chongqing 402260,China)
(2.School of Artical Intelligence,Chongqing Creation Vocational College,Chongqing 402160,China)

Abstract:Graph energy is expressed as the sum of all absolute values of eigenvalues of square matrix. Network energies have been applied in undirected graphs,oriented graphs,and mixed graphs successfully,and share several same or similar lower bounds or upper bounds with traditional graph energies. For the relationship between graph and hypergraph,there are closely relationships among network energies of undirected graph and oriented graph and hypernetwork energy of undirected hypergraph. In this paper,the hypernetwork energy of directed hypergraphs is proposed by extended hypernetwork energy from undirected hypergraph to directed hypergraph. The relationship between hypernetwork energies of undirected hypergraph and directed hypergraph is analyzed,and the relationships among network energy of undirected graph and oriented graph and hypernetwork energies of undirected hypergraph and directed hypergraph are also discussed. Finally,several important properties of hypernetwork energy of directed hypergraph are analyzed as well.

Key words:complex network,hypergraph,directed hypergraph,graph energy,network energy,hypernetwork energy

图能量最初是由 Gutman 于 1978 年提出[1],最早可追溯到 Huckel 分子轨道理论[2]. 对图能量的研究是从无向图开始的,传统意义上的图能量定义为图的邻接矩阵特征值绝对值之和. 对于有向图而言,则是将其斜邻接矩阵的特征值绝对值之和作为斜能量来进行研究的[3]. 现今提出的图的不同能量形式有数十种之多[4],包括距离能量[5]、拟 Laplacian 能量[6]、关联能量[7]、匹配能量[8]、Laplacian 能量[9]、无符号 Laplacian 能量[10]、Von Neumann 能量[11]、距离 Laplacian 能量[12]、距离无符号 Laplacian 能量[12]等. 由于有向图比无向图更为复杂,有向图的研究成果远不及无向图丰硕.

图在数学及化学中有重要的研究价值[13-14],现实生活中也存在各种各样的图[15-16]. 超图是比图更为复杂的一类结构. 对于超图而言,一般是通过与其一一对应的关联矩阵进行表述. 由于关联矩阵通常情况下不是方阵,使得通常意义上图能量的研究方法不能直接应用于超图的研究中. 基于网络维数[17]的网络

收稿日期:2022-03-16.
基金项目:重庆市高校创新研究群体项目(CXQT21032)、重庆市自然科学基金项目(cstc2021jcyj-msxmX0532)、重庆市教育委员会科学技术研究计划项目(KJQN202103404、KJQN202005403、KJQN202003409、KJQN202103401、KJZD-M202203401)、重庆市高等教育教学改革研究重点项目(202182)、重庆市高等职业教育教育改革研究项目(Z212026).
通讯作者:刘胜久,博士,研究方向:复杂网络、自然语言处理和大数据. E-mail:liushengjiu2008@163.com

能量已在无向图[18]、有向图[19]及混合图[20]中得到成功的应用,基于超网络维数[21]的超网络能量已在无向超图[22]中得到成功的应用,我们可以尝试将无向超图的超网络能量推广应用于有向超图中,提出有向超图的超网络能量. 本文所研究的超图均是超边及节点均不带权重的无权超图.

1 预备知识

1.1 无向图与有向图

定义 1[1] 对任一含有 n 个节点及 m 条边的图而言,如果该图的所有边均是无向的,则该图称为无向图,记为 $G(n,m)$.

无向图 G 的表述方法一般是方阵形式的邻接矩阵,记为 $\boldsymbol{A}(G)$.

定义 2[3] 对任一含有 n 个节点及 m 条边的图而言,如果该图的所有边均是有向的,则该图称为有向图,记为 $G^{\sigma}(n,m)$.

有向图 G^{σ} 的表述方法一般是方阵形式的斜邻接矩阵,记为 $\boldsymbol{S}(G^{\sigma})$.

显然,有向图是对无向图的所有无向边均赋予一个方向 $\boldsymbol{\sigma}$ 得到的. 对于一个含有 m 条边的无向图 G 而言,其对应的有向图 G^{σ} 有 2^m 个.

1.2 无向超图与有向超图

定义 3[23] 对任一节点集为 $\boldsymbol{V}$,超边集为 $\boldsymbol{E}$ 的超图而言,如果该超图的所有超边均是无向的,则该超图称为无向超图,记为 $\boldsymbol{F}=(\boldsymbol{V},\boldsymbol{E})$.

无向超图 $\boldsymbol{F}$ 的表述方法一般是关联矩阵,记为 $C(\boldsymbol{F})$. 当 $\boldsymbol{F}$ 的节点数与无向超边数相等时,$C(\boldsymbol{F})$ 为方阵,否则,$C(\boldsymbol{F})$ 为非方阵.

定义 4[24] 对任一节点集为 $\boldsymbol{V}$,超边集为 $\boldsymbol{E}$ 的超图而言,如果该超图的所有超边均是有向的,则该超图称为有向超图,记为 $\boldsymbol{H}=(\boldsymbol{V},\boldsymbol{E})$.

有向超图 $\boldsymbol{H}$ 的表述方法一般也是关联矩阵,记为 $C(\boldsymbol{H})$. 当 $\boldsymbol{H}$ 的节点数与有向超边数相等时,$C(\boldsymbol{H})$ 为方阵,否则,$C(\boldsymbol{H})$ 为非方阵.

超图的表述方法除了关联矩阵之外,还有邻接矩阵[25],但邻接矩阵与超图并不一定一一对应,应用也不是很多.

对于有向超图中的一条有向超边 e 包含的节点而言,这些节点可以划分为头节点集 $\boldsymbol{H}(e)$ 和尾节点集 $\boldsymbol{T}(e)$,这导致有向超图远比有向图复杂. 目前,尽管无向超图的能量已有一些理论提出,但迄今为止,对有向超图的能量研究甚少.

1.3 网络能量与超网络能量

从分形维数出发,我们提出了网络维数的计算方法[17],并先后应用于无向图及有向图中,提出了无向图的网络能量[18]及有向图的网络能量[19].

对于无向图 $G(n,m)$ 而言,其网络能量 $NE(G)$ 表述为[18],

$$NE(G)=n^{\sqrt{\log_n 2m}}. \tag{1}$$

对于有向图 $G^{\sigma}(n,m)$ 而言,其网络能量 $NE(G^{\sigma})$ 表述为[19],

$$NE(G^{\sigma})=n^{\sqrt{\log_n m}}. \tag{2}$$

网络能量通过解析的形式得到图的能量的另一种表述,与图的其他形式的能量之间具有相同或相近的上下限. 实际上,无向图及有向图的网络能量也可以推广应用到混合图中[20].

对超图能量的研究也是从无向超图开始的. 对于无向超图而言,由于其关联矩阵一般情况下不是方阵,我们可以借鉴无向图中通过网络维数计算网络能量的方法,通过超网络维数计算超网络能量.

对于节点集为 $\boldsymbol{V}$,超边集为 $\boldsymbol{E}$ 的无向超图 $\boldsymbol{F}$ 而言,其超网络能量 $HE(\boldsymbol{F})$ 表述为[22],

$$HE(\boldsymbol{F})=\sqrt{|\boldsymbol{V}||\boldsymbol{E}|}^{\sqrt{HD(\boldsymbol{F})}}=(|\boldsymbol{V}||\boldsymbol{E}|)^{\frac{1}{2}\sqrt{HD(\boldsymbol{F})}}. \tag{3}$$

上式中,$HD(\boldsymbol{F})$ 为超网络 $\boldsymbol{F}$ 的超网络维数,表述为[26],

$$HD(\boldsymbol{F})=\frac{2}{\lg|\boldsymbol{V}||\boldsymbol{E}|}\lg\sum_{i\in\boldsymbol{V}}\sum_{j\in\boldsymbol{E}}C_{ij}. \tag{4}$$

我们对无向超图的超网络能量进行研究,得出了一些重要结论. 虽然有向超图与无向超图均是通过

关联矩阵进行表述的,但是有向超图远较无向超图复杂. 在本文中,我们尝试对无向超图的超网络能量计算方法进行改进,得到有向超图的超网络能量计算方法,并分析其重要性质.

2　有向超图的超网络能量研究

对于无向超图而言,其关联矩阵中的元素非 0 即 1,属于 0-1 矩阵. 对于有向超图而言,其关联矩阵中的元素包含-1、0、1 共 3 种不同的元素,可以称之为{-1,0,1}矩阵. 有向超图的超网络能量不能直接用无向超图的超网络能量计算方法得到,需要进行适当的改进.

在无向超图 $\boldsymbol{F}$ 中,根据节点是否包含在超边中,可以直接得到 0-1 形式的关联矩阵 $C(\boldsymbol{F})$,表述为

$$[\boldsymbol{C}_{ij}]_{|\boldsymbol{V}|\times|\boldsymbol{E}|}=\begin{cases}1, & v_i\in e_j,\\ 0, & v_i\notin e_j.\end{cases} \tag{5}$$

在有向超图 $\boldsymbol{H}$ 中,其任一有向超边 $e_i(1\leqslant i\leqslant|\boldsymbol{E}|)$ 中的节点可以划分为头节点集 $\boldsymbol{H}(e_i)$ 及尾节点集 $\boldsymbol{T}(e_i)$. 在关联矩阵 $C(\boldsymbol{H})$ 中,有:

$$[\boldsymbol{C}_{ij}]_{|\boldsymbol{V}|\times|\boldsymbol{E}|}=\begin{cases}1, & v_i\in \boldsymbol{H}(e_j),\\ -1, & v_i\in \boldsymbol{T}(e_j),\\ 0, & \text{其它}.\end{cases} \tag{6}$$

于是,类似于式(5)中的无向超图的关联矩阵表述方法,我们可以得到有向超图 $\boldsymbol{H}$ 的头节点关联矩阵 $\boldsymbol{HC}(\boldsymbol{H})$ 及尾节点关联矩阵 $\boldsymbol{TC}(\boldsymbol{H})$,

$$[\boldsymbol{HC}_{ij}]_{|\boldsymbol{V}|\times|\boldsymbol{E}|}=\begin{cases}1, & v_i\in \boldsymbol{H}(e_j),\\ 0, & v_i\notin \boldsymbol{H}(e_j).\end{cases} \tag{7}$$

$$[\boldsymbol{TC}_{ij}]_{|\boldsymbol{V}|\times|\boldsymbol{E}|}=\begin{cases}1, & v_i\in \boldsymbol{T}(e_j),\\ 0, & v_i\notin \boldsymbol{T}(e_j).\end{cases} \tag{8}$$

很显然,由式(6)、式(7)、式(8)可得 $\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{HC}$、$\boldsymbol{TC}$ 三者之间的联系,

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{HC}-\boldsymbol{TC}. \tag{9}$$

我们对有向超图的 0-1 矩阵形式的头节点关联矩阵及尾节点关联矩阵进行分析,进而得到有向超图的超网络能量.

对于节点集为 $\boldsymbol{V}$,超边集为 $\boldsymbol{E}$ 的有向超图 $\boldsymbol{H}$ 而言,其超网络能量 $HE(\boldsymbol{H})$ 为,

$$HE(\boldsymbol{H})=\sqrt{|\boldsymbol{V}||\boldsymbol{E}|}^{\frac{1}{2}\left(\sqrt{HD(\boldsymbol{HC})}+\sqrt{HD(\boldsymbol{TC})}\right)}=(|\boldsymbol{V}||\boldsymbol{E}|)^{\frac{1}{4}\left(\sqrt{HD(\boldsymbol{HC})}+\sqrt{HD(\boldsymbol{TC})}\right)}. \tag{10}$$

式中,$HD(\boldsymbol{HC})$、$HD(\boldsymbol{TC})$ 分别为有向超图 $\boldsymbol{H}$ 的头节点关联矩阵及尾节点关联矩阵对应的超网络的超网络维数,

$$HD(\boldsymbol{HC})=\frac{2}{\lg|\boldsymbol{V}||\boldsymbol{E}|}\lg\sum_{i\in\boldsymbol{V}}\sum_{j\in\boldsymbol{E}}\boldsymbol{HC}_{ij}(\boldsymbol{H}), \tag{11}$$

$$HD(\boldsymbol{TC})=\frac{2}{\lg|\boldsymbol{V}||\boldsymbol{E}|}\lg\sum_{i\in\boldsymbol{V}}\sum_{j\in\boldsymbol{E}}\boldsymbol{TC}_{ij}(\boldsymbol{H}). \tag{12}$$

实际上,式(11)、式(12)中,$\sum_{i\in\boldsymbol{V}}\sum_{j\in\boldsymbol{E}}\boldsymbol{HC}_{ij}(\boldsymbol{H})$、$\sum_{i\in\boldsymbol{V}}\sum_{j\in\boldsymbol{E}}\boldsymbol{TC}_{ij}(\boldsymbol{H})$ 分别是超边包含的所有头节点与尾节点数目之和,即头节点集与尾节点集的基数之和,则式(11)、式(12)可改写为

$$HD(\boldsymbol{HC})=\frac{2}{\lg|\boldsymbol{V}||\boldsymbol{E}|}\lg\sum_{i=1}^{|\boldsymbol{E}|}|\boldsymbol{H}(e_i)|. \tag{13}$$

$$HD(\boldsymbol{TC})=\frac{2}{\lg|\boldsymbol{V}||\boldsymbol{E}|}\lg\sum_{i=1}^{|\boldsymbol{E}|}|\boldsymbol{T}(e_i)|. \tag{14}$$

从式(10)可以发现,我们是采用 $\sqrt{HD(\boldsymbol{HC})}$、$\sqrt{HD(\boldsymbol{TC})}$ 二者的算术平均值而不是几何平均值来取代式(3)中的 $\sqrt{HD(\boldsymbol{F})}$ 进而得到有向超图的超网络能量,主要原因在于避免可能存在的零值相乘问题. 因为在极端情况下,可能存在有向超图中的所有头节点集及尾节点集均为空的情况. 基于这种考量,采用二者的算术平均值进行计算比采用几何平均值进行计算更为合适.

3 有向超图的超网络能量性质

我们对有向超图的超网络能量性质进行分析,主要是分析有向超图的超网络能量的上下限及几类特殊有向超图的超网络能量.

定理 1 对有向超图 $\boldsymbol{H}=(\boldsymbol{V},\boldsymbol{E})$ 而言,其超网络能量的下限为 0,即

$$HE(\boldsymbol{H})\geqslant 0. \tag{15}$$

证明 根据有向超图的超网络能量的定义,定理 1 显然成立. 定理 1 得证. 证毕.

实际上,只有不含有任何节点及超边的空超图与不含有超边的零超图的超网络能量才是 0. 于是我们可以得到如下引理.

引理 1 空超图的超网络能量为 0.

证明 空超图不含有任何节点及超边,即有:$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{\Phi}$ 且 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{\Phi}$,则 $|\boldsymbol{V}|=0$,且 $|\boldsymbol{E}|=0$. 根据有向超图的超网络能量的定义,引理 1 显然成立. 引理 1 得证. 证毕.

引理 2 零超图的超网络能量为 0.

证明 零超图至少含有一个节点,但不含有任何超边,即有:$\boldsymbol{V}\neq\boldsymbol{\Phi}$ 且 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{\Phi}$,则 $|\boldsymbol{V}|\neq 0$,且 $|\boldsymbol{E}|=0$. 根据有向超图的超网络能量的定义,引理 2 显然成立. 引理 2 得证. 证毕.

一般情况下,非空超图都至少含有一条非空超边,于是,我们可以得到如下定理.

定理 2 对非空有向超图 $\boldsymbol{H}=(\boldsymbol{V},\boldsymbol{E})$ 而言,其超网络能量的下限为 1,即有:

$$HE(\boldsymbol{H})\geqslant 1. \tag{16}$$

证明 非空有向超图至少含有一条非空超边,即有:$\boldsymbol{V}\neq\boldsymbol{\Phi}$ 且 $\boldsymbol{E}\neq\boldsymbol{\Phi}$,则 $|\boldsymbol{V}|\geqslant 1$,且 $|\boldsymbol{E}|\geqslant 1$. 根据有向超图的超网络能量的定义,定理 2 显然成立. 定理 2 得证. 证毕.

实际上,只有仅含有一条连接有一个节点的有向超边的有向超图的超网络能量才是 1,此时,$|\boldsymbol{V}|=1$,且 $|\boldsymbol{E}|=1$,而且,由于此有向超边只连接有一个节点,则此有向超边的头节点集为空或尾节点集为空.

对于有向超图 $\boldsymbol{H}=(\boldsymbol{V},\boldsymbol{E})$ 来说,可以通过对无向超图 $\boldsymbol{F}=(\boldsymbol{V},\boldsymbol{E})$ 的每条无向超边包含的所有节点划分为头节点集及尾节点集而得到. 在极端情况下,存在头节点集或尾节点集为空的情形,可得到如下定理.

定理 3 对于通过对无向超图 $\boldsymbol{F}=(\boldsymbol{V},\boldsymbol{E})$ 中的每条无向超边包含的所有节点划分为头节点集及尾节点集而得到的有向超图 $\boldsymbol{H}=(\boldsymbol{V},\boldsymbol{E})$ 而言,若所有的头节点集或尾节点集为空,则无向超图及有向超图的超网络能量 $HE(\boldsymbol{F})$ 及 $HE(\boldsymbol{H})$ 满足

$$HE(\boldsymbol{H})=\sqrt{HE(\boldsymbol{F})}. \tag{17}$$

证明 对于无向超图 $\boldsymbol{F}=(\boldsymbol{V},\boldsymbol{E})$ 及得到的有向超图 $\boldsymbol{H}=(\boldsymbol{V},\boldsymbol{E})$ 而言,若所有的头节点集或尾节点集为空,则有 $\boldsymbol{H}(e_i)=\boldsymbol{\Phi}$ 或 $\boldsymbol{T}(e_i)=\boldsymbol{\Phi}$,根据式(9),则有 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{F})=\boldsymbol{HC}(\boldsymbol{H})$ 或者 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{F})=\boldsymbol{TC}(\boldsymbol{H})$,于是有:

$$\sqrt{HD(\boldsymbol{HC})}+\sqrt{HD(\boldsymbol{TC})}=\sqrt{HD(\boldsymbol{H})}. \tag{18}$$

结合式(3)、式(10),可得式(17). 定理 3 显然成立. 证毕. 式(10)中,$\sqrt{HD(\boldsymbol{HC})}$ 与 $\sqrt{HD(\boldsymbol{TC})}$ 二者是通过算术平均值结合起来的,根据加法的交换律,可以得到如下定理.

定理 4 对于有向超图 $\boldsymbol{H}=(\boldsymbol{V},\boldsymbol{E})$ 而言,将其每一条有向超边所包含的头节点集及尾节点集交换,得到的有向超图超网络能量不变.

证明 对于有向超图 $\boldsymbol{H}=(\boldsymbol{V},\boldsymbol{E})$ 而言,交换其每一条有向超边所包含的头节点集及尾节点集,在计算所得到的有向超图的超网络能量时,相当于将 $HD(\boldsymbol{HC})$ 与 $HD(\boldsymbol{TC})$ 交换,根据式(10),得到的超网络能量不变. 定理 4 显然成立. 定理 4 得证,证毕.

由于 2-均匀无向超图就是通常意义上的图,我们对由 2-均匀无向超图得到的有向超图进行分析,则有如下定理.

定理 5 对于由 2-均匀无向超图 $\boldsymbol{F}=(\boldsymbol{V},\boldsymbol{E})$ 得到的有向超图 $\boldsymbol{H}=(\boldsymbol{V},\boldsymbol{E})$ 而言,如果其每一条有向超边的头节点集及尾节点集均只含有一个节点,则其超网络能量 $HE(\boldsymbol{H})$ 为:

$$HE(\boldsymbol{H})=\sqrt{|\boldsymbol{V}|\,|\boldsymbol{E}|}^{\sqrt{\frac{2}{\lg|\boldsymbol{V}|\,|\boldsymbol{E}|}\lg|\boldsymbol{E}|}}. \tag{19}$$

证明 无向超图中,2-均匀无向超图每条超边只包含有 2 个节点,其实就是通常意义上的无向图. 如

果得到的有向超图每一条有向超边的头节点集及尾节点集均只含有一个节点,则此有向超图就是通常意义上的有向图. 则有:

$$HD(\boldsymbol{HC})=\frac{2}{\lg|\boldsymbol{V}||\boldsymbol{E}|}\lg\sum_{i\in V}\sum_{j\in E}\boldsymbol{HC}_{ij}(\boldsymbol{H})=\frac{2}{\lg|\boldsymbol{V}||\boldsymbol{E}|}\lg|\boldsymbol{E}|,\tag{20}$$

$$HD(\boldsymbol{TC})=\frac{2}{\lg|\boldsymbol{V}||\boldsymbol{E}|}\lg\sum_{i\in V}\sum_{j\in E}\boldsymbol{TC}_{ij}(\boldsymbol{H})=\frac{2}{\lg|\boldsymbol{V}||\boldsymbol{E}|}\lg|\boldsymbol{E}|.\tag{21}$$

将式(20)、式(21)代入式(10),可以得到此有向超图的超网络能量为:

$$HE(\boldsymbol{H})=\sqrt{|\boldsymbol{V}||\boldsymbol{E}|}^{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2}{\lg|\boldsymbol{V}||\boldsymbol{E}|}\lg|\boldsymbol{E}|}+\sqrt{\frac{2}{\lg|\boldsymbol{V}||\boldsymbol{E}|}\lg|\boldsymbol{E}|}\right)}=\sqrt{|\boldsymbol{V}||\boldsymbol{E}|}^{\sqrt{\frac{2}{\lg|\boldsymbol{V}||\boldsymbol{E}|}\lg|\boldsymbol{E}|}}.\tag{22}$$

特别的,当节点数与超边数相等时,即$|\boldsymbol{V}|=|\boldsymbol{E}|$时,我们可以得到如下的引理.

引理 3　对于节点数与超边数相等的 2-均匀有向超图而言,如果其任一有向超边的头节点集及尾节点集均只含有一个节点,则其超网络能量等于其节点数,也等于其超边数,即有:

$$HE(\boldsymbol{H})=|\boldsymbol{V}|=|\boldsymbol{E}|.\tag{23}$$

证明　在式(22)中,将$|\boldsymbol{V}|=|\boldsymbol{E}|$代入,则有:

$$HE(\boldsymbol{H})=\sqrt{|\boldsymbol{V}||\boldsymbol{E}|}^{\sqrt{\frac{2}{\lg|\boldsymbol{V}||\boldsymbol{E}|}\lg|\boldsymbol{E}|}}=|\boldsymbol{V}|^{\sqrt{\frac{2}{\lg|\boldsymbol{V}||\boldsymbol{V}|}\lg|\boldsymbol{V}|}}=|\boldsymbol{V}|^{\sqrt{\frac{1}{\lg|\boldsymbol{V}|}\lg|\boldsymbol{V}|}}=|\boldsymbol{V}|=|\boldsymbol{E}|.\tag{24}$$

式(23)显然成立. 引理 3 得证. 证毕.

由于原始图为单圈图的有向图的网络能量等于其节点数与边数,则可以得到如下引理.

引理 4　对于节点数与超边数相等的 2-均匀有向超图而言,如果其任一有向超边的头节点集及尾节点集均只含有一个节点,则其超网络能量与原始图为单圈图且节点数相同的有向图的网络能量相等,即有:

$$HE(\boldsymbol{H})=NE(G^{\sigma}).\tag{25}$$

证明　对于原始图 G 为单圈图的有向图 G^{σ} 而言,其网络能量 $NE(G^{\sigma})$ 为[19]:

$$NE(G^{\sigma})=|\boldsymbol{V}|^{\sqrt{\log_{|V|}|E|}}=|\boldsymbol{V}|^{\sqrt{\log_{|V|}|V|}}=|\boldsymbol{V}|=|\boldsymbol{E}|.\tag{26}$$

结合式(24),式(25)显然成立. 引理 4 得证. 证毕.

通过引理 4,我们可以发现,有向超图是有向图的超集,有向图是有向超图的特例,从而进一步将图与超图联系起来了.

对于由无向超图 $\boldsymbol{F}=(\boldsymbol{V},\boldsymbol{E})$ 得到的有向超图 $\boldsymbol{H}=(\boldsymbol{V},\boldsymbol{E})$ 而言,结合式(11)、式(12),则有

$$\sum_{i\in V}\sum_{j\in E}\boldsymbol{TC}_{ij}(\boldsymbol{H})+\sum_{i\in V}\sum_{j\in E}\boldsymbol{TC}_{ij}(\boldsymbol{H})=\sum_{i\in V}\sum_{j\in E}\boldsymbol{C}_{ij}(\boldsymbol{F}).\tag{27}$$

根据式(3),我们可以得到有向超图的超网络能量的一个上限,则可以得到如下定理.

定理 6　对于由无向超图 $\boldsymbol{F}=(\boldsymbol{V},\boldsymbol{E})$ 得到的有向超图 $\boldsymbol{H}=(\boldsymbol{V},\boldsymbol{E})$ 而言,有向超图 $\boldsymbol{H}$ 的超网络能量存在上限,

$$HE(\boldsymbol{H})\leqslant(|\boldsymbol{V}||\boldsymbol{E}|)^{\frac{1}{2}\sqrt{HD(\boldsymbol{H}')}}.\tag{28}$$

式中,

$$HD(\boldsymbol{H}')=\frac{2}{\lg|\boldsymbol{V}||\boldsymbol{E}|}\lg\frac{1}{2}\sum_{i\in V}\sum_{j\in E}\boldsymbol{C}_{ij}.\tag{29}$$

证明　欲证式(28),只需证明

$$HE(\boldsymbol{H})-(|\boldsymbol{V}||\boldsymbol{E}|)^{\frac{1}{2}\sqrt{HD(\boldsymbol{H}')}}=(|\boldsymbol{V}||\boldsymbol{E}|)^{\frac{1}{4}\left(\sqrt{HD(\boldsymbol{HC})}+\sqrt{HD(\boldsymbol{TC})}\right)}-(|\boldsymbol{V}||\boldsymbol{E}|)^{\frac{1}{2}\sqrt{HD(\boldsymbol{H}')}}\leqslant 0.\tag{30}$$

由于$|\boldsymbol{V}||\boldsymbol{E}|\geqslant 1$,于是,只需证明

$$\sqrt{HD(\boldsymbol{HC})}+\sqrt{HD(\boldsymbol{TC})}\leqslant 2\sqrt{HD(\boldsymbol{H}')}.\tag{31}$$

根据式(27),可令 $y=\sum_{i\in V}\sum_{j\in E}\boldsymbol{C}_{ij}(\boldsymbol{H})$,$x=\sum_{i\in V}\sum_{j\in E}\boldsymbol{TC}_{ij}(\boldsymbol{H})$,根据式(11)、式(12),代入式(31),则只需要证明

$$\sqrt{\frac{2}{\lg|\boldsymbol{V}||\boldsymbol{E}|}\lg x}+\sqrt{\frac{2}{\lg|\boldsymbol{V}||\boldsymbol{E}|}\lg(y-x)}\leqslant 2\sqrt{\frac{2}{\lg|\boldsymbol{V}||\boldsymbol{E}|}\lg\frac{1}{2}y}.\tag{32}$$

上式中,由于$\sqrt{\frac{2}{\lg|\boldsymbol{V}||\boldsymbol{E}|}}>0$,即需证明

$$\sqrt{\lg x}+\sqrt{\lg(y-x)}\leqslant 2\sqrt{\lg\frac{1}{2}y}. \tag{33}$$

令$f(x)=\sqrt{\lg x}+\sqrt{\lg(y-x)}-2\sqrt{\lg\frac{1}{2}y}$,则有:

$$f'(x)=\frac{1}{2x\sqrt{\lg x}}-\frac{1}{2(y-x)\sqrt{\lg(y-x)}}=\begin{cases}>0, & x<\frac{1}{2}y,\\ =0, & x=\frac{1}{2}y,\\ <0, & x>\frac{1}{2}y.\end{cases} \tag{34}$$

由于$1\leqslant x\leqslant y$,即当$x\in\left[1,\frac{1}{2}y\right]$时,$f(x)$为增函数. 当$x\in\left[\frac{1}{2}y,y\right]$时,$f(x)$为减函数. 当$x=\frac{1}{2}y$时,$f(x)$取最大值. 则有:

$$f(x)_{\max}=f\left(\frac{1}{2}y\right)=2\sqrt{\lg\frac{1}{2}y}. \tag{35}$$

定理6得证. 证毕.

结合式(4)、式(29),我们可以发现有向超图$\boldsymbol{H}=(\boldsymbol{V},\boldsymbol{E})$的超网络能量$HE(\boldsymbol{H})$不超过无向超图$\boldsymbol{F}=(\boldsymbol{V},\boldsymbol{E})$的超网络能量$HE(\boldsymbol{F})$. 于是我们可以得到如下的引理.

引理5 对于无向超图$\boldsymbol{F}=(V,E)$而言,其得到的有向超图$\boldsymbol{H}=(\boldsymbol{V},\boldsymbol{E})$的超网络能量$HE(\boldsymbol{H})$不超过无向超图$\boldsymbol{F}=(\boldsymbol{V},\boldsymbol{E})$的超网络能量,即有:

$$HE(\boldsymbol{H})\leqslant HE(\boldsymbol{F}). \tag{36}$$

证明 根据定理6,对于有向超图$\boldsymbol{H}=(\boldsymbol{V},\boldsymbol{E})$的超网络能量$HE(\boldsymbol{H})$而言,有:

$$HE(\boldsymbol{H})\leqslant(|\boldsymbol{V}||\boldsymbol{E}|)^{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\lg|\boldsymbol{V}||\boldsymbol{E}|}\lg\frac{1}{2}\sum\limits_{i\in\boldsymbol{V}}\sum\limits_{j\in\boldsymbol{E}}\boldsymbol{C}_{ij}}}. \tag{37}$$

根据式(3)、式(4),对于无向超图$\boldsymbol{F}=(\boldsymbol{V},\boldsymbol{E})$的超网络能量$HE(\boldsymbol{F})$而言,有:

$$HE(\boldsymbol{F})=(|\boldsymbol{V}||\boldsymbol{E}|)^{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\lg|\boldsymbol{V}||\boldsymbol{E}|}\lg\sum\limits_{i\in\boldsymbol{V}}\sum\limits_{j\in\boldsymbol{E}}\boldsymbol{C}_{ij}}}. \tag{38}$$

式(36)显然成立. 引理5得证. 证毕.

对于密度为ρ的无向超图$\boldsymbol{F}=(\boldsymbol{V},\boldsymbol{E})$而言,可以得到有向超图$\boldsymbol{H}=(\boldsymbol{V},\boldsymbol{E})$的超网络能量$HE(\boldsymbol{H})$的另一个上限. 于是我们可以得到如下的引理.

引理6 对于由密度为ρ的无向超图$\boldsymbol{F}=(\boldsymbol{V},\boldsymbol{E})$得到的有向超图$\boldsymbol{H}=(\boldsymbol{V},\boldsymbol{E})$而言,有向超图$\boldsymbol{H}$的超网络能量存在如下式所示的上限:

$$HE(\boldsymbol{H})\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\rho}(|\boldsymbol{V}||\boldsymbol{E}|)^{\frac{3}{4}}. \tag{39}$$

证明 根据定理6,有:

$$HE(\boldsymbol{H})\leqslant(|\boldsymbol{V}||\boldsymbol{E}|)^{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\lg|\boldsymbol{V}||\boldsymbol{E}|}\lg\frac{1}{2}\sum\limits_{i\in\boldsymbol{V}}\sum\limits_{j\in\boldsymbol{E}}\boldsymbol{C}_{ij}}}. \tag{40}$$

而$\sum\limits_{i\in\boldsymbol{V}}\sum\limits_{j\in\boldsymbol{E}}\boldsymbol{C}_{ij}=|\boldsymbol{V}||\boldsymbol{E}|\rho$,代入上式,则有:

$$HE(\boldsymbol{H})\leqslant(|\boldsymbol{V}||\boldsymbol{E}|)^{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\lg|\boldsymbol{V}||\boldsymbol{E}|}\lg\frac{1}{2}\rho|\boldsymbol{V}||\boldsymbol{E}|}}=(|\boldsymbol{V}||\boldsymbol{E}|)^{\frac{1}{2}\sqrt{2+\frac{2}{\lg|\boldsymbol{V}||\boldsymbol{E}|}\lg\frac{1}{2}\rho}}=(|\boldsymbol{V}||\boldsymbol{E}|)^{\frac{1}{2}\sqrt{1+\left(1+\frac{2}{\lg|\boldsymbol{V}||\boldsymbol{E}|}\lg\frac{1}{2}\rho\right)}}. \tag{41}$$

对上式中的指数项用泰勒公式展开,只取前两项,则有:

$$HE(\boldsymbol{H})\leqslant(|\boldsymbol{V}||\boldsymbol{E}|)^{\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{\lg|\boldsymbol{V}||\boldsymbol{E}|}\lg\frac{1}{2}\rho\right)\right]}=(|\boldsymbol{V}||\boldsymbol{E}|)^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2\lg|\boldsymbol{V}||\boldsymbol{E}|}\lg\frac{1}{2}\rho}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\rho}(|\boldsymbol{V}||\boldsymbol{E}|)^{\frac{3}{4}}. \tag{42}$$

特别地,当节点数与超边数相等时,即$|\boldsymbol{V}|=|\boldsymbol{E}|$时,我们可以得到如下的引理.

引理 7　对于由密度为 ρ 的节点数与超边数相等的无向超图 $\boldsymbol{F}=(\boldsymbol{V},\boldsymbol{E})$ 得到的有向超图 $\boldsymbol{H}=(\boldsymbol{V},\boldsymbol{E})$ 而言,有向超图 $\boldsymbol{H}$ 的超网络能量 $\boldsymbol{HE}(\boldsymbol{H})$ 存在如下式所示的上限:

$$\boldsymbol{HE}(\boldsymbol{H})\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\rho}\,|\boldsymbol{V}|^{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\rho}\,|\boldsymbol{E}|^{\frac{3}{2}}.\tag{43}$$

证明　将 $|\boldsymbol{V}|=|\boldsymbol{E}|$ 代入式(39),即得式(43). 引理 7 得证. 证毕.

由于均匀超图在现实生活中应用较广,下面,我们重点对均匀超图进行分析.

对于 k 均匀超图而言,有 $k=\rho|\boldsymbol{V}|$,于是可以得到如下的定理.

定理 7　对于由 k 均匀无向超图 $\boldsymbol{F}=(\boldsymbol{V},\boldsymbol{E})$ 得到的有向超图 $\boldsymbol{H}=(\boldsymbol{V},\boldsymbol{E})$ 而言,有向超图 $\boldsymbol{H}$ 的超网络能量 $HE(\boldsymbol{H})$ 存在如下式所示的上限:

$$HE(\boldsymbol{H})\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{k}\,|\boldsymbol{V}|^{\frac{1}{4}}|\boldsymbol{E}|^{\frac{3}{4}}.\tag{44}$$

证明　将 $k=\rho|\boldsymbol{V}|$ 代入式(39),即得式(44). 定理 7 显然成立. 定理 7 得证. 证毕.

当节点数目与超边数目相等时,我们可以得到如下的引理.

引理 8　对于由节点数目与超边数目相等的 k 均匀无向超图 $\boldsymbol{F}=(\boldsymbol{V},\boldsymbol{E})$ 得到的有向超图 $\boldsymbol{H}=(\boldsymbol{V},\boldsymbol{E})$ 而言,有向超图 $\boldsymbol{H}$ 的超网络能量 $HE(\boldsymbol{H})$ 存在如下式所示的上限:

$$HE(\boldsymbol{H})\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{k}\,|\boldsymbol{V}|=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{k}\,|\boldsymbol{E}|.\tag{45}$$

证明　将 $|\boldsymbol{V}|=|\boldsymbol{E}|$ 代入式(44),即得式(45). 引理 8 显然成立. 引理 8 得证. 证毕.

实际上,将 $k=\rho|\boldsymbol{V}|$ 代入式(43),也可以得到式(45).

当 $k=2$ 时,此时得到的有向超图 $\boldsymbol{H}$ 就是通常意义上的有向图 G^{σ},根据[19],此时引理 8 的结论仍然成立.

对于有向超图而言,由于其每一条有向超边 e 可以分别包含头节点集 $\boldsymbol{H}(e)$ 及尾节点集 $\boldsymbol{T}(e)$,如果所有的头节点集 $\boldsymbol{H}(e)$ 及尾节点集 $\boldsymbol{T}(e)$ 的基数 h、t 均相等,则可以得到如下的定理.

定理 8　在有向超图 $\boldsymbol{H}=(\boldsymbol{V},\boldsymbol{E})$ 中,如果有向超图 $\boldsymbol{H}$ 的每一条有向超边 e 的头节点集 $\boldsymbol{H}(e)$ 的基数为 h、尾节点集 $\boldsymbol{T}(e)$ 的基数为 t,则有向超图 $\boldsymbol{H}$ 的超网络能量 $HE(\boldsymbol{H})$ 存在如下式所示的上限:

$$HE(\boldsymbol{H})\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{h+t}\,|\boldsymbol{V}|^{\frac{1}{4}}|\boldsymbol{E}|^{\frac{3}{4}}.\tag{46}$$

证明　在有向超图 $\boldsymbol{H}$ 中,如果其每一条有向超边 e 的头节点集 $\boldsymbol{H}(e)$ 的基数为 h、尾节点集 $\boldsymbol{T}(e)$ 的基数为 t,则相当于每一条有向超边均包含 $(h+t)$ 个节点,其对应的无向超图为 $(h+t)$ 均匀无向超图. 将 $k=h+t$ 代入式(44),即得式(46). 定理 8 显然成立. 证毕.

从定理 8 可以看出,若有向超图的每一条超边的头节点集及尾节点集均包含该超边的所有节点,则得到的有向超图的超网络能量与对应的无向超图的超网络能量相等. 这个结论与将无向图的每一条无向边替换成两条反向的有向边所得到的有向图的网络能量与原始无向图的网络能量相等的结论是类似的,从而进一步将图与超图联系起来了.

对定理 8 进行分析,我们可以得到如下的一个引理.

引理 9　$2k$ 均匀无向超图得到的有向超图 $\boldsymbol{H}$ 与 k 均匀无向超图 $\boldsymbol{F}$ 的超网络能量具有相同的上限.

证明　根据定理 8,$2k$ 均匀无向超图得到的有向超图 $\boldsymbol{H}$ 的超网络能量 $HE(\boldsymbol{H})$ 为:

$$HE(\boldsymbol{H})\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2k}\,|\boldsymbol{V}|^{\frac{1}{4}}|\boldsymbol{E}|^{\frac{3}{4}}=\sqrt{k}\,|\boldsymbol{V}|^{\frac{1}{4}}|\boldsymbol{E}|^{\frac{3}{4}}.\tag{47}$$

k 均匀无向超图 $\boldsymbol{F}$ 的超网络能量 $HE(\boldsymbol{F})$ 为[17]:

$$HE(\boldsymbol{F})\leqslant\sqrt{k}\,|\boldsymbol{V}|^{\frac{1}{4}}|\boldsymbol{E}|^{\frac{3}{4}}.\tag{48}$$

引理 9 显然成立. 证毕.

实际上,对 k 均匀无向超图 $\boldsymbol{F}$ 而言,式(48)中的等号是严格成立. 对引理 9 进行推广,我们可以得到另一个引理.

引理 10 密度为 2ρ 的无向超图得到的有向超图 $\boldsymbol{H}$ 与密度为 ρ 的无向超图 F 的超网络能量具有相同的上限.

证明 根据引理 6,密度为 2ρ 的无向超图得到的有向超图 $\boldsymbol{H}$ 的超网络能量 $HE(\boldsymbol{H})$ 为:

$$HE(\boldsymbol{H}) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2\rho}(|\boldsymbol{V}||\boldsymbol{E}|)^{\frac{3}{4}} = \sqrt{\rho}(|\boldsymbol{V}||\boldsymbol{E}|)^{\frac{3}{4}}. \tag{49}$$

密度为 ρ 的无向超图 $\boldsymbol{F}$ 的超网络能量 $HE(\boldsymbol{F})$ 为[17]:

$$HE(\boldsymbol{F}) \leqslant \sqrt{\rho}(|\boldsymbol{V}||\boldsymbol{E}|)^{\frac{3}{4}}. \tag{50}$$

引理 10 显然成立. 证毕.

4 结语

本文提出了一种有向超图的超网络能量计算方法,将超网络能量的研究由无向超图推广并应用到有向超图,并分析了无向图与有向图的网络能量及无向超图与有向超图的超网络能量之间的关联,给出了有向超图超网络能量的几个上下限,并重点论述了有向超图超网络能量的若干重要性质.

未来的工作包括 3 个方面:

(1)本文所研究的有向超图仍是无权超图,实际中,超图的节点及边可能带有权重,如何将超网络能量应用于带权超图需要进一步分析.

(2)在实际中,与混合图类似,可能存在既有有向超边,又有无向超边的混合超图,混合超图的超网络能量如何处理需要进一步研究.

(3)现实生活中,存在作者合著网络、供应链网络等真实的超图,如何对真实超图的超网络能量进行分析处理也是后续研究的重点.

[参考文献](References)

[1] GUTMAN I. The energy of graph[J]. Ber Math Statist Sekt Forsch Graz,1978,22(103):2179-2187.

[2] DEWAR M J S. The molecular orbital theory of organic chemistry[M]. New York:McGraw-Hill,1969.

[3] ADIGA C,BALAKRISHNAN R,SO W. The skew energy of a digraph[J]. Linear Algebra and Its Applications,2010,432(7):1825-1835.

[4] GUTMAN I,FURTULA B. Survey of graph energies[J]. Mathematics Interdisciplinary Research,2017,2:85-129.

[5] INDULAL G,GUTMAN I,VIJAYAKUMAR A. On distance energy of graphs[J]. Communications in Mathematical and in Computer Chemistry,2008,60(2):461-472.

[6] LIU J P,LIU B L. A Laplacian-energy like invariant of a graph[J]. Communications in Mathematical and in Computer Chemistry,2008,59(2):355-372.

[7] JOOYANDEH M,KIANI D,MIRZAKHAH M. Incidence energy of a graph[J]. Communications in Mathematical and in Computer Chemistry,2009,62(3):561-572.

[8] GUTMAN I,WAGNER S. The matching energy of a graph[J]. Discrete Applied Mathematics,2012,160(15):2177-2187.

[9] GUTMAN I,ZHOU B. Laplacian energy of a graph[J]. Linear Algebra and Its Applications,2006,414(1):29-37.

[10] SO W,ROBBIANO M,ABREU N D. Applications of a theorem by Ky Fan in the theory of graph energy[J]. Linear Algebra and its Applications,2010,432(9):2163-2169.

[11] BRYC W,DEMBO A,JIANG T. Spectral measure of large random Hankel,Markov and Toeplitz matrices[J]. The Annals of Probability,2006,34(1):1-38.

[12] DASA K,AOUCHICHE M,HANSEN P. On(distance)Laplacian energy and(distance)signless Laplacian energy of graphs[J]. Discrete Applied Mathematics,2018,243:172-185.

[13] 唐保祥,任韩. 3 类图完美匹配的计数[J]. 南京师大学报(自然科学版),2012,35(1):16-21.

[14] 赵春红,董伟. 平面图 3 可着色的充分条件[J]. 南京师大学报(自然科学版),2011,34(9):13-18.

[15] 秦荪榛,凌秀泽,徐寅林. 基于无线传感网络的血氧实时监测系统的研究与设计[J]. 南京师范大学学报(工程技术版),2012,12(4):39-43.

[16] 凌秀泽,秦荪榛,徐寅林. 心电信号无线传输网络节点的研究与实现[J]. 南京师范大学学报(工程技术版),2012,

12(3):71-75.
[17] 刘胜久,李天瑞,刘小伟. 网络维数:一种度量复杂网络的新方法[J]. 计算机科学,2019,46(1):51-56.
[18] LIU S J,LI T R,ZHU J,et al. Network energy:A new energy of a graph[C]//Proceedings of 2019 IEEE 14th International Conference on Intelligent Systems and Knowledge Engineering. Dalian,China,2019:785-789.
[19] LIU S J,LI T R,ZHANG X B,et al. On network energy of oriented graphs[C]//Proceedings of the 14th International FLINS Conference on Robotics and Artificial Intelligence. Cologne,Germany,2020:11-18.
[20] 刘胜久,李天瑞,谢鹏,等. 网络能量在混合图中的研究与应用[J]. 湖南大学学报(自然科学版),2021,48(6):105-111.
[21] 刘胜久,李天瑞,杨宗霖,等. 带权超网络的度量方法及其性质[J]. 计算机应用,2019,39(11):3107-3113.
[22] 刘胜久,李天瑞,刘佳,等. 超网络能量研究与应用[J]. 计算机科学与探索,2021,15(4):682-689.
[23] 王建方. 超图的理论基础[M]. 北京:高等教育出版社,2006.
[24] GALLO G,LONGO G,PALLOTTINO S,et al. Directed hypergraphs and applications[J]. Discrete Applied Mathematics,1993,42:177-201.
[25] FENG K Q,LI W W. Spectra of hypergraphs and applications[J]. Journal of Number Theory,1996,60(1):1-22.
[26] 刘胜久,李天瑞,洪西进,等. 超网络模型构建及特性分析[J]. 计算机科学与探索,2017,11(2):194-211.

[责任编辑:陈　庆]