

交叉抽样在复杂网络中的研究与应用

刘胜久¹, 伍小兵¹, 曹小平², 汪 应¹, 欧明辉¹

(1. 重庆工程职业技术学院大数据与物联网学院, 重庆 402260)

(2. 重庆科创职业学院人工智能学院, 重庆 402160)

[摘要] 针对传统网络抽样主要是对复杂网络的节点及边进行独立抽样, 提出对复杂网络的节点或边进行独立的 2 次抽样, 再对得到的抽样网络进行分析, 从而推算出原始网络的各项参数. 在交叉抽样中, 分析了点交叉抽样、边交叉抽样及混合抽样中的点混合抽样与边混合抽样 4 种交叉抽样方法, 并在经典的 ER、WS 及 BA 网络模型上进行了验证. 结果表明, 通过交叉抽样可较好地推算出原始网络的平均度、平均路径长度、网络直径、传递聚集系数、WS 聚集系数、网络维数等参数, 且点混合抽样的效果最优.

[关键词] 复杂网络, 网络抽样, 交叉抽样, 混合抽样, 网络参数

[中图分类号] TP391 [文献标志码] A [文章编号] 1672-1292(2023)01-0084-09

Research and Application of Cross Sampling on Complex Network

Liu Shengjiu¹, Wu Xiaobing¹, Cao Xiaoping², Wang Ying¹, Ou Minghui¹

(1. Big Data and Internet of Things School, Chongqing Vocational Institute of Engineering, Chongqing 402260, China)

(2. School of Artificial Intelligence, Chongqing Creation Vocational College, Chongqing 402160, China)

Abstract: Among the analysis and research of complex network, in view of the traditional network sampling being mainly on sample the nodes and edges of complex network independently, this paper firstly proposes cross sampling by sample the nodes or edges of the complex network twice independently, and then calculate the parameters of the original network by sampling network. On cross sampling, four cross sampling methods including point cross sampling, edge cross sampling, point mixed sampling and edge mixed sampling are analyzed and verified on ER, WS and BA network models. The results show that the average degree, average path length, network diameter, transitivity clustering coefficient, WS clustering coefficient, and network dimension of the original network can be calculated by cross sampling, while that the point mixed sampling is the best cross sampling method.

Key words: complex network, network sampling, cross sampling, mixed sampling, network parameter

传统意义上度量图及复杂网络特性的参数有节点数、边数、度、平均度、直径、平均路径长度、聚类系数等. 对于无向图、有向图、混合图, 还可通过其图能量^[1]、斜能量^[2]、Hermitian 能量^[3]及网络能量^[4-6]等对其特性进行深层次的分析研究. 图的这些参数在各种人工网络^[7-8]及真实网络^[9-10]中均得到成功应用, 如社会学中的六度分割等.

图及复杂网络的节点及边的数量往往非常庞大, 对大规模的图进行分析极为耗时费力, 抽样成为推断复杂网络参数的一个可行选择. 由于网络是由节点及边构成的, 传统抽样方法主要有点抽样和边抽样两种. 实际应用中, 这两种方法均有一些缺陷与不足. 本文提出一种交叉抽样的方法, 通过对复杂网络的节点或边分别进行 2 次独立的抽样, 再对抽样结果进行分析, 以此估算实际网络的各种参数. 实验结果表明, 所提方法在多个复杂网络模型中表现良好, 且混合交叉抽样中的点混合抽样效果最优.

收稿日期: 2022-09-15.

基金项目: 重庆市高校创新研究群体项目(CXQT21032)、重庆市自然科学基金项目(cstc2021jcyj-msxmX0532)、重庆市教育委员会科学技术研究计划项目(KJQN202103404、KJQN202005403、KJQN202003409、KJQN202103401、KJZDM202203401)、重庆市高等教育教学改革研究重点项目(202182)、重庆市高等职业教育教学改革研究项目(Z212026).

通讯作者: 刘胜久, 博士, 研究方向: 复杂网络、自然语言处理和大数据. E-mail: liushengjiu2008@163.com

1 预备知识

1.1 图及其分类

根据不同的分类标准,图可以分为多个不同的类型^[11].

根据节点及边是否带有权重,图可以分为无权图与带权图. 无权图可表述为 $G=(V,E)$ 形式的二元组,其中 V 为节点集, E 为边集, $V\subset E\times E$. 带权图可表述为 $G=(V,E,W)$,其中 W 为权重. 节点或边的权重可以分别是正实数、负实数、纯虚数及复数等. 可认为无权图的节点及边的权重非 0 即 1,即无权图是带权图的特例.

根据图中的边是否有方向,图可分为无向图、有向图及混合图. 无向图、有向图、混合图一般情况下可通过邻接矩阵、斜邻接矩阵、Hermitian 矩阵进行表述,这些矩阵均为 $|V|\times|V|$ 的方阵.

此外,根据图中是否含有平行边及自环,图可分为简单图与多重图. 根据图中一个节点连接的其他节点数目,图可分为零图、空图、环图、规则图、完全图等.

本文研究所涉及的图是指无向、无权、无自环、无平行边的简单图.

1.2 复杂网络模型

经典的复杂网络模型主要有 ER 随机网络模型、WS/NW 小世界网络模型、BA 无标度网络模型.

Erdos 等提出了 ER 随机网络模型^[12],该网络节点度分布呈泊松分布. 但 ER 随机网络模型与真实世界中的复杂网络并不契合. Watts 等对 ER 随机网络模型连接策略进行改进,采用断边重连处理节点之间的连接,提出了 WS 小世界网络模型^[13]. Newman 等又采用随机加边处理节点之间的连接,提出了 NW 小世界网络模型^[14]. 二者得到的度分布呈指数分布. 在节点数目极大时,可认为 WS 网络模型与 NW 网络模型是等价的. Barabasi 等继续对 ER 随机网络模型连接策略进行改进,采用增长择优处理节点之间的连接,提出了 BA 无标度网络模型^[15],较好地解释了真实世界中的网络鲁棒与脆弱并存的特性.

对经典复杂网络模型的改进是当前研究的一大热点,如对 BA 无标度网络模型的改进^[16]等. 由于邻接矩阵与网络是一一对应的,通过邻接矩阵对复杂网络进行研究也是复杂网络研究的重要内容^[17].

1.3 复杂网络参数

度分布是区分 ER 随机网络模型、WS/NW 小世界网络模型、BA 无标度网络模型的一个重要方法,三者的度分布不同,参数也不一致. 度秩函数^[18]、分维指标^[19]、分形维数^[20]、网络维数^[21]等是较常用的方法. 本文主要应用平均度、平均路径长度、网络直径、聚集系数、网络维数、网络能量对网络参数进行估算.

对图 G 中的任一节点 v_i ,与 v_i 直接相连的节点数目,即与 v_i 直接相连的边数,称为 v_i 的度,记为 $d(v_i)$. 所有节点的度的平均值称为图 G 的平均度,记为 $\overline{d(v)}$:

$$\overline{d(v)} = \frac{1}{|V|} \sum_{v_i \in V} d(v_i). \quad (1)$$

对图 G 中的任一节点对 v_i 及 v_j , v_i 到 v_j 之间所要经过的边数称为 v_i 到 v_j 的路径长度,记为 d_{ij} . 所有节点对之间的路径长度的平均值称为图 G 的平均路径长度,记为 L :

$$L = \frac{1}{|\cup_{|d_{ij}|} v_i \in V, v_j \in V, i \neq j|} \sum d_{ij}. \quad (2)$$

图 G 的网络直径 D 定义为所有节点对之间的路径长度的最大值:

$$D = \max_{v_i \in V, v_j \in V, i \neq j} d_{ij}. \quad (3)$$

聚集系数有局部聚集系数及全局聚集系数之分,统计一般只分析全局聚集系数^[22],记为 CC :

$$CC = \frac{3|\cup_{|\mathcal{G}\Delta|}|}{3|\cup_{|\mathcal{G}\Delta|}| + 2|\cup_{|\mathcal{G}^{\Delta}|}|}, \quad (4)$$

式中, $\mathcal{G}\Delta$ 表示图 G 中闭三点组; \mathcal{G}^{Δ} 表示图 G 中开三点组.

图 G 的网络维数 ND 定义为图 G 边数目 2 倍的对数值与节点数目对数值的比值:

$$ND = \frac{\lg 2|E|}{\lg |V|}. \quad (5)$$

2 交叉抽样

2.1 点交叉抽样

点交叉抽样对原始网络中的节点进行 2 次随机抽样,再对 2 次抽样得到的节点集进行分析,取 2 次抽样得到的不同节点集合的交集作为点交叉抽样的结果. 步骤如下:

- (1) 以概率 p_{v1} 对原始网络 G 中的节点进行随机抽样,抽样得到的节点集记为 V_1 ;
- (2) 以概率 p_{v2} 对原始网络 G 中的节点进行随机抽样,抽样得到的节点集记为 V_2 ;
- (3) 对得到的节点集 V_1 及 V_2 进行分析,将节点交集 $V=V_1 \cap V_2$ 作为点交叉抽样的结果;
- (4) 对所得节点交集 V 构成的抽样网络 G_p 进行分析,反推出原始网络的各项参数并分析其特性.

由于 2 次点抽样是相互独立的,故点交叉抽样的概率为 $p_v=p_{v1} \cdot p_{v2}$. 显然,当 p_{v1} 或 p_{v2} 等于 1 时,点交叉抽样即退化为通常意义上的点抽样.

一般情况下,在点交叉抽样时对 2 次节点抽样进行等概率抽样,即 $p_{v1}=p_{v2}=\sqrt{p_v}$.

2.2 边交叉抽样

边交叉抽样对原始网络中的边进行 2 次随机抽样,再对 2 次抽样得到的边集进行分析,取 2 次抽样得到的不同边集合的交集作为边交叉抽样的结果. 步骤如下:

- (1) 以概率 p_{e1} 对原始网络 G 中的边进行随机抽样,抽样得到的边集记为 E_1 ;
- (2) 以概率 p_{e2} 对原始网络 G 中的边进行随机抽样,抽样得到的边集记为 E_2 ;
- (3) 对得到的边集 E_1 及 E_2 进行分析,将边交集 $E=E_1 \cap E_2$ 作为边交叉抽样的结果;
- (4) 对所得边交集 E 构成的抽样网络 G_p 进行分析,反推出原始网络的各项参数并分析其特性.

由于 2 次边抽样是相互独立的,故边交叉抽样的概率为 $p_e=p_{e1} \cdot p_{e2}$. 显然,当 p_{e1} 或 p_{e2} 等于 1 时,边交叉抽样即退化为通常意义上的边抽样.

一般情况下,在边交叉抽样时对 2 次边抽样进行等概率抽样,即 $p_{e1}=p_{e2}=\sqrt{p_e}$.

2.3 混合交叉抽样

混合交叉抽样分别通过对原始网络中的节点及边进行随机抽样,再对 2 次抽样所得节点集及边集进行分析,取 2 次抽样所得节点集及边集合的交集作为混合交叉抽样的结果. 根据混合交叉抽样的结果,混合交叉抽样可进一步分为点混合抽样与边混合抽样. 步骤如下:

- (1) 以概率 p_v 对原始网络 G 中的节点进行随机抽样,抽样得到的节点集记为 V_p ;
- (2) 以概率 p_e 对原始网络 G 中的边进行随机抽样,抽样得到的边集记为 E_p ;
- (3) 对所得节点集 V_p 及边集 E_p 进行分析,将节点交集 $V=V_p \cap \cup_{|V \in E_p|}$ 及边交集 $E=\cup_{|E \in V_p \times V_p|} V_p \cap E_p$ 作为混合交叉抽样的结果;
- (4) 对所得节点交集 V 构成的抽样网络 G_{pv} 进行分析,反推出原始网络的各项参数,即点混合抽样;
- (5) 对所得边交集 E 构成的抽样网络 G_{pe} 进行分析,反推出原始网络的各项参数,即边混合抽样.

由于 2 次点抽样及边抽样是相互独立的,故点抽样及边抽样的先后顺序不影响混合交叉抽样的结果,混合交叉抽样的概率为 $p_c=p_v \cdot p_e$. 显然,当 $p_v=1$ 时,混合交叉抽样即退化为通常意义上的边抽样;当 $p_e=1$ 时,混合交叉抽样即退化为通常意义上的点抽样.

一般情况下,在混合抽样时对点及边进行等概率抽样,即 $p_v=p_e=\sqrt{p_c}$.

3 实验验证

3.1 实验设计

本文分别在随机网络、小世界网络及无标度网络上进行交叉抽样实验,随机网络选取 ER 随机网络模型,小世界网络模型选取 WS 小世界网络模型,无标度网络模型选取 BA 无标度网络模型. 对每种网络模型均选取 3 种不同规模的网络,采用 Pajek64 5.14 生成不同规模的网络. 抽样概率分别设定为 10%、20%、30%、40%、50%. 为避免随机性的影响,对每次抽样均重复 10 次,取 10 次交叉抽样所得结果的算术平均值作为最终结果. 实验硬件环境为 Intel(R) Core(TM) i5-4300U CPU@ 1.90GHz 2.50GHz、8G 内存、500G

硬盘,软件环境是 Windows 7 旗舰版 64 位操作系统、jdk1.8.0_191、Eclipse 2019-06(4.12.0).

3.2 交叉抽样实验结果

3.2.1 随机网络交叉抽样实验结果

分别构建 3 个不同规模的 ER 随机网络,各项参数如表 1 所示.

表 1 中,ER(m, n)表示向初始的 m 个节点随机添加 n 条边构成的 ER 随机网络.

图 1~图 3 分别是对表 1 中的 3 个 ER 随机网络进行交叉抽样得到的结果.

3.2.2 小世界网络交叉抽样实验结果

分别构建不同规模的 WS 小世界网络,各项参数如表 2 所示.

表 1 ER 随机网络参数统计表

Table 1 Parameter statistics of ER random network

编号	参数	ER($10^3, 10^4$)	ER($10^4, 10^5$)	ER($10^5, 10^6$)
1	平均度	20	20	20
2	平均路径长度	3.257 69	4.258 51	5.261 46
3	网络直径	5	7	9
4	传递聚集系数	0.009 878 13	0.000 971 61	0.000 098 18
5	WS 聚集系数	0.009 787 96	0.000 967 69	0.000 099 59
6	网络维数	1.433 677	1.325 257	1.260 206

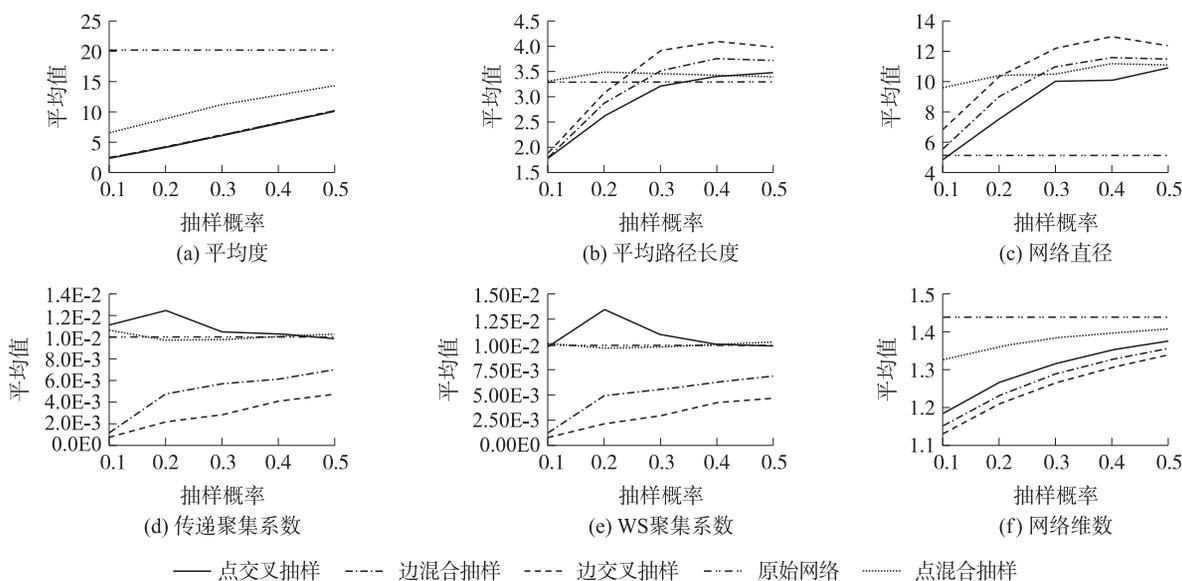


图 1 ER($10^3, 10^4$)交叉抽样结果

Fig. 1 Cross sampling result of ER($10^3, 10^4$)

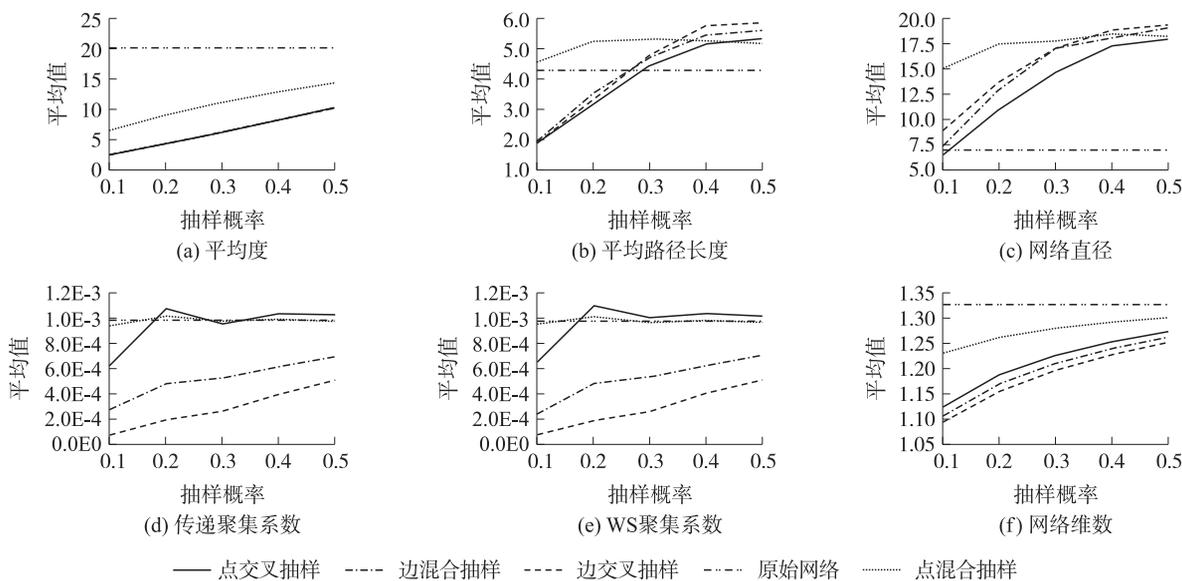


图 2 ER($10^4, 10^5$)交叉抽样结果

Fig. 2 Cross sampling result of ER($10^4, 10^5$)

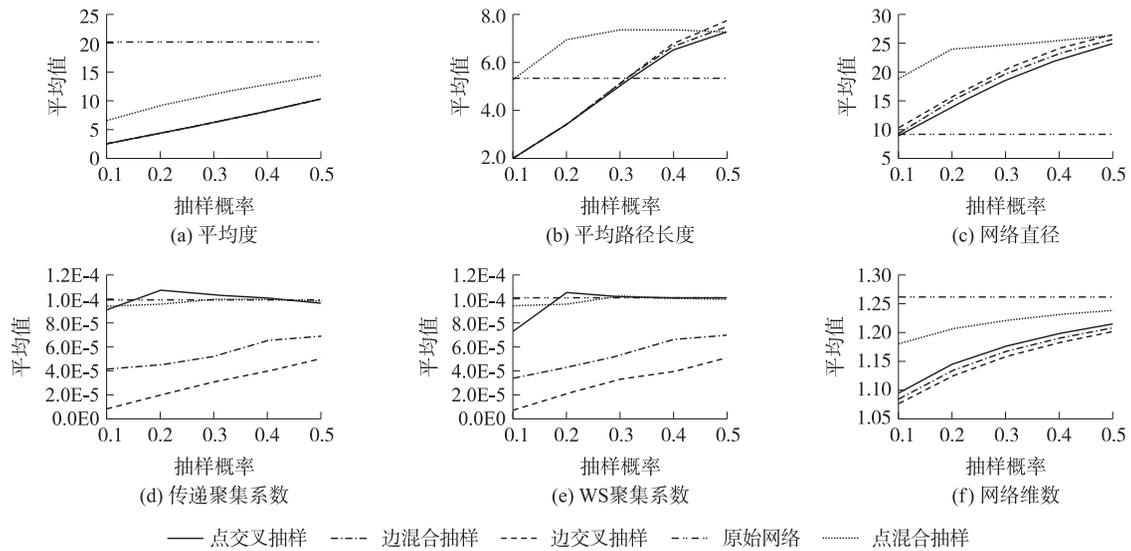


图 3 $ER(10^5, 10^6)$ 交叉抽样结果

Fig. 3 Cross sampling result of $ER(10^5, 10^6)$

表 2 WS 小世界网络参数统计表

Table 2 Parameter statistics of WS small-world network

编号	参数	WS($10^3, 10, 0.5$)	WS($10^4, 10, 0.5$)	WS($10^5, 10, 0.5$)
1	平均度	20	20	20
2	平均路径长度	2.696 31	3.532 28	4.329 87
3	网络直径	4	5	6
4	传递聚集系数	0.103 776 54	0.089 455 03	0.085 621 83
5	WS 聚集系数	0.109 375 32	0.093 902 15	0.090 241 15
6	网络维数	1.433 677	1.325 257	1.260 206

表 2 中, $WS(m, k, p)$ 表示初始的规则图有 m 个节点, 每个节点与左右各 k 个节点相连, 以概率 p 随机断掉连接并重新连边后得到 WS 小世界网络。

图 4~图 6 分别是对表 2 中的 3 个 WS 小世界网络进行交叉抽样得到的结果。

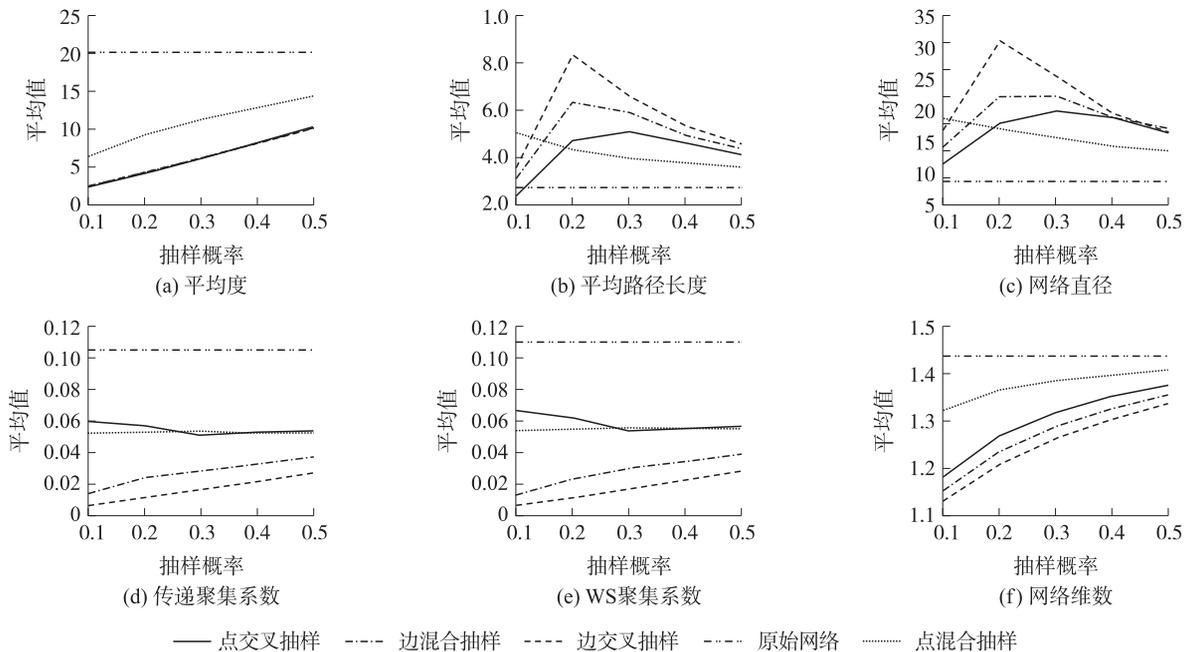


图 4 $WS(10^3, 10, 0.5)$ 交叉抽样结果

Fig. 4 Cross sampling result of $WS(10^3, 10, 0.5)$

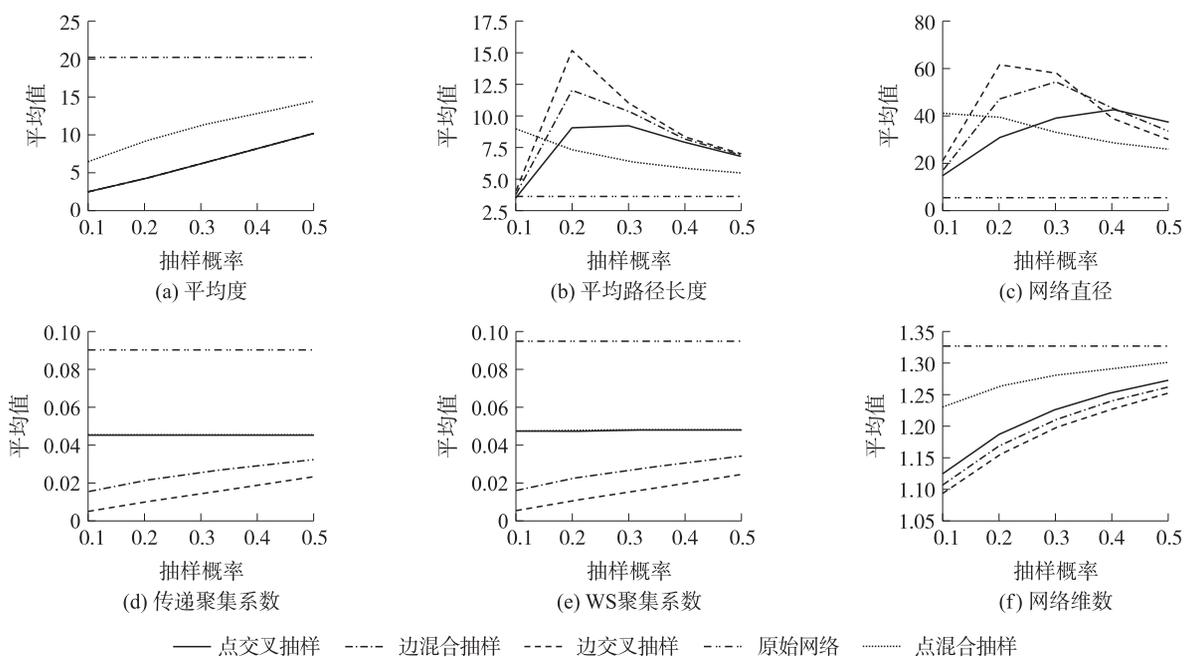


图5 WS(10⁴,10,0.5)交叉抽样结果

Fig. 5 Cross sampling result of WS(10⁴,10,0.5)

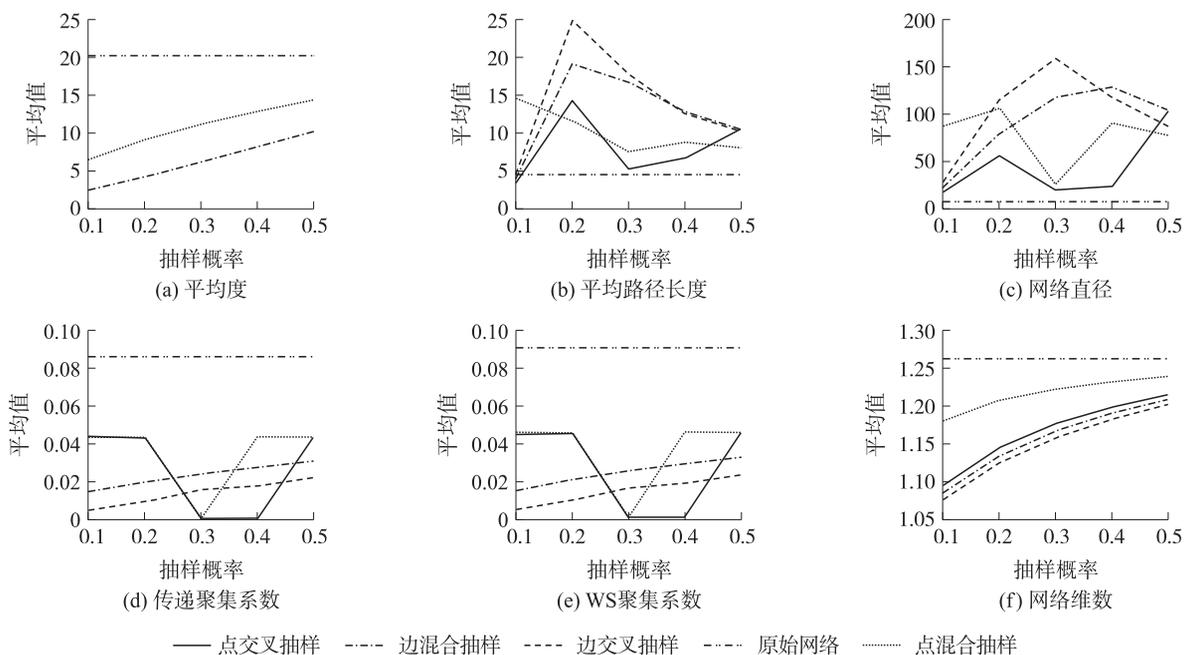


图6 WS(10⁵,10,0.5)交叉抽样结果

Fig. 6 Cross sampling result of WS(10⁵,10,0.5)

3.2.3 无标度网络交叉抽样实验结果

分别构建不同规模的BA无标度网络,各项参数如表3所示.

表3 BA无标度网络参数统计表

Table 3 Parameter statistics of BA scale-free network

编号	参数	BA(10 ³ ,10 ⁴ ,10,0.2)	BA(10 ⁴ ,10 ⁵ ,10,0.2)	BA(10 ⁵ ,10 ⁶ ,10,0.2)
1	平均度	19.144	19.897 2	19.921 72
2	平均路径长度	2.736 86	3.353 71	3.974 60
3	网络直径	6	7	8
4	传递聚集系数	0.068 056 48	0.012 573 68	0.001 961 20
5	WS聚集系数	0.049 367 18	0.006 024 66	0.000 689 53
6	网络维数	1.427 344	1.324 698	1.259 865

表 3 中, $BA(m, n, c, p)$ 表示初始的 ER 随机图有 c 个节点, 这些节点的初始连接概率为 p , 通过添加 m 个节点及不超过 n 条边后得到 BA 无标度网络.

图 7~图 9 分别是对表 3 中的 3 个 BA 无标度网络进行交叉抽样得到的结果.

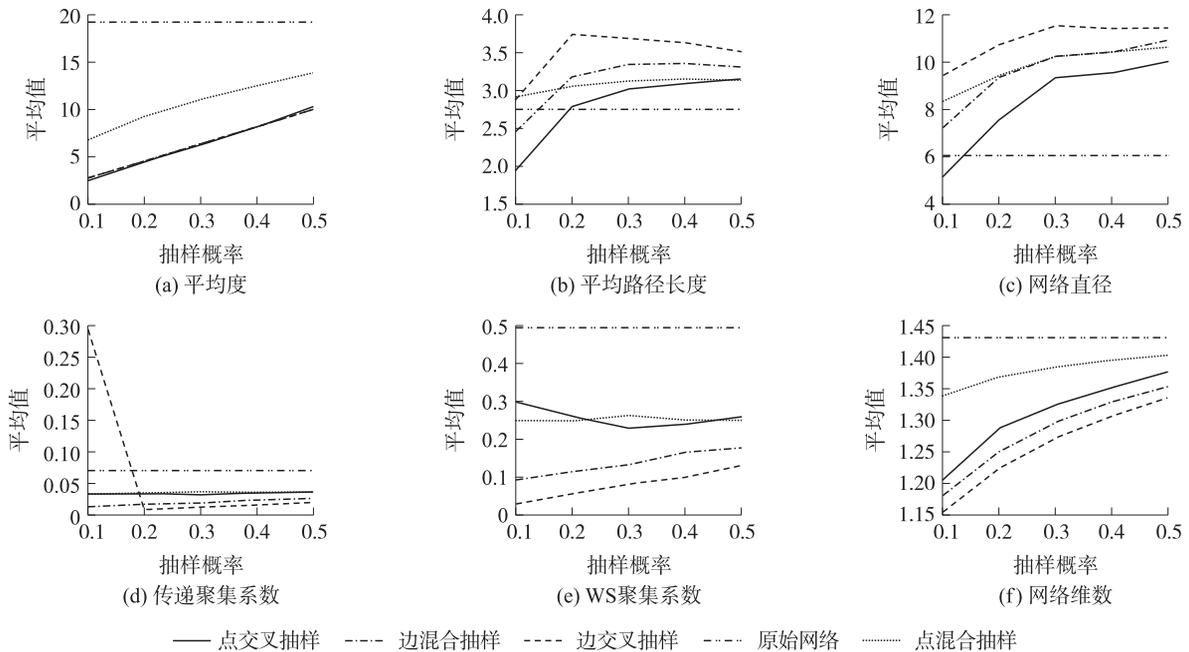


图 7 $BA(10^3, 10^4, 10, 0.2)$ 交叉抽样结果
Fig. 7 Cross sampling result of $BA(10^3, 10^4, 10, 0.2)$

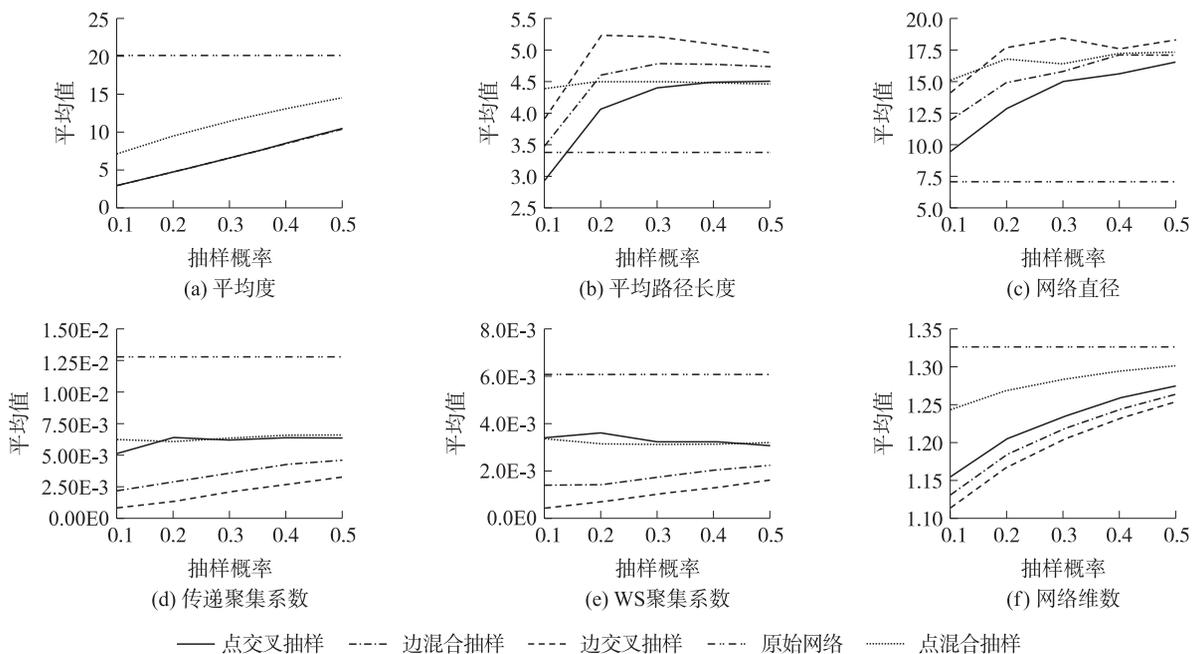
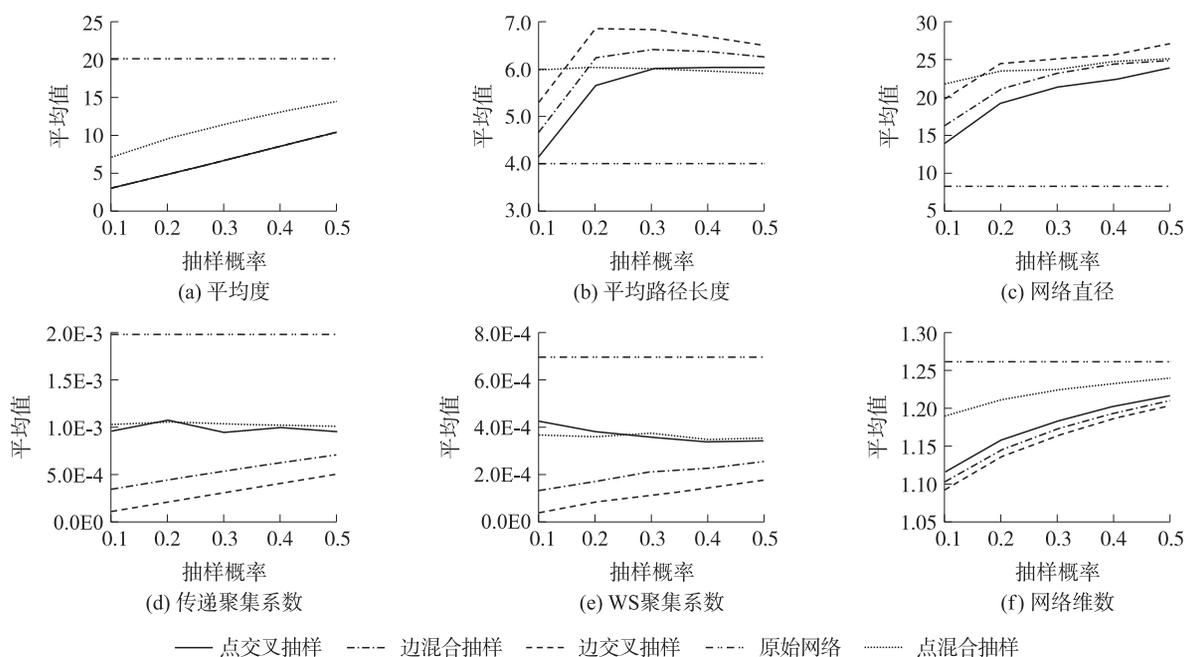


图 8 $BA(10^4, 10^5, 10, 0.2)$ 交叉抽样结果
Fig. 8 Cross sampling result of $BA(10^4, 10^5, 10, 0.2)$

3.3 实验分析

通过分析图 1~图 9 的结果可以发现, 在选定的平均度、平均路径长度、网络直径、传递聚集系数、WS 聚集系数、网络维数等 6 个网络参数的交叉抽样中, 随着交叉抽样概率的增加, 相较于点交叉抽样、边交叉抽样、边混合抽样, 点混合抽样在平均度、平均路径长度、传递聚集系数、WS 聚集系数、网络维数等方面都线性趋近原始网络, 且平均度及网络维数的线性效果最好, 因而完全可以通过分析点混合抽样结果推断出原始网络的各项参数. 尽管随着抽样概率的变化, 通过点交叉抽样、边交叉抽样、点混合抽样、边混合抽样

图9 BA($10^5, 10^6, 10, 0.2$)交叉抽样结果Fig. 9 Cross sampling result of BA($10^5, 10^6, 10, 0.2$)

所得结果均存在一定波动,但点混合抽样结果波动更为平缓,在ER及WS网络的抽样中表现得更为突出.在网络直径方面,实验发现,随着交叉抽样概率的逐步增加,交叉抽样网络的参数并未逐步趋近原始网络.实际上,由于网络直径需要对所有路径进行分析,大部分网络抽样方法对推断原始网络的网络直径效果均欠佳.

4 结论

本文提出了一种针对复杂网络的交叉抽样方法,通过对复杂网络的节点或边进行独立的2次抽样,再对抽样的结果进行分析,从而推断原始网络的各项参数.对ER/WS/BA网络模型的实验研究发现,通过交叉抽样结果可较好推断出原始网络的各项参数,且点混合抽样效果更好.

未来的工作包括3个方面:交叉抽样对推断原始复杂网络的边介数、点介数的效果如何需继续进一步分析;网络直径的交叉抽样结果欠佳,如何通过交叉抽样推断出原始网络的网络直径需进一步研究;真实世界的复杂网络往往是小世界、无标度、自相似等多种特性的复合体,在真实网络中交叉抽样的效果如何需进行进一步验证.

[参考文献](References)

- [1] GUTMAN I. The energy of a graph[J]. Ber Math Statist Sect Forschungsz Graz, 1978, 103: 1-22.
- [2] ADIGA C, BALAKRISHNAN R, SO W. The skew energy of a digraph[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2010, 432: 1825-1835.
- [3] LIU J X, LI X L. Hermitian-adjacency matrices and Hermitian energies of mixed graphs[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2015, 466: 182-207.
- [4] LIU S J, LI T R, ZHU J, et al. Network energy: a new energy of a graph[C]//2019 IEEE 14th International Conference on Intelligent Systems and Knowledge Engineering (ISKE2019). Dalian, China; IEEE, 2019.
- [5] LIU S J, LI T R, ZHANG X B, et al. On network energy of oriented graphs[C]//Proceedings of the 14th International FLINS Conference on Robotics and Artificial Intelligence/IEEE 15th International Conference on Intelligent Systems and Knowledge Engineering (FLINS 2020/ISKE 2020). Cologne, Germany; World Scientific, 2020.
- [6] 刘胜久,李天瑞,谢鹏,等. 网络能量在混合图中的研究与应用[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2021, 48(6): 105-111.

- [7] 倪伟平. 最大度是 6 且不含有弦的小圈的可平面图边染色[J]. 南京师大学报(自然科学版), 2011, 34(3): 19-24.
- [8] 唐保祥, 任韩. 几类图完美匹配的数目[J]. 南京师大学报(自然科学版), 2010, 33(3): 1-6.
- [9] 陈轩泽, 霍静, 费峰, 等. 基于 PCA 与 ArcGIS 网络分析的图书馆阅览室管理系统[J]. 南京师范大学学报(工程技术版), 2012, 12(2): 57-63.
- [10] 李林, 封志明, 赵品彰, 等. 一种基于散射参数测试的人工电源网络校准方法[J]. 南京师范大学学报(工程技术版), 2011, 11(2): 4-8.
- [11] 张先迪, 李正良. 图论及其应用[M]. 北京: 高等教育出版社, 2005.
- [12] ERDŐS P, RENYI A. On random graphs I[J]. *Publicationes Mathematicae*, 1959(6): 290-297.
- [13] WATTS D J, STROGATZ S H. Collective dynamics of 'small-world' networks[J]. *Nature*, 1998, 393(6684): 440-442.
- [14] NEWMAN M E J, WATTS D J. Renormalization group analysis of the small-world network model[J]. *Physics Letter A*, 1999, 293(4/5/6): 341-346.
- [15] BARABÁSI A L, ALBERT R. Emergence of scaling in random networks[J]. *Science*, 1999, 286: 509-512.
- [16] 刘胜久, 李天瑞, 珠杰, 等. 具有双峰效应特性的复杂网络模型研究[J]. *复杂系统与复杂性科学*, 2017, 14(1): 46-51, 102.
- [17] 刘胜久, 李天瑞, 洪西进, 等. 基于矩阵运算的复杂网络构建方法[J]. *中国科学(信息科学)*, 2017, 46(5): 610-626.
- [18] 朱大智, 吴俊, 谭跃进, 等. 度秩函数——一个新的复杂网络统计特征[J]. *复杂系统与复杂性科学*, 2006, 3(4): 28-34.
- [19] WEI D J, LIU Q, ZHANG H X, et al. Box-covering algorithm for fractal dimension of weighted networks[J]. *Scientific Reports*, 2013, 3: 3049.
- [20] LIU J L, YU Z G, ANH V. Topological properties and fractal analysis of a recurrence network constructed from fractional Brownian motions[J]. *Physical Review, E. Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 2014, 89(3): 032814.
- [21] 刘胜久, 李天瑞, 刘小伟. 网络维数: 一种度量复杂网络的新方法[J]. *计算机科学*, 2019, 46(1): 51-56.
- [22] LUCE R D, PERRY A D. A method of matrix analysis of group structure[J]. *Psychometrika*, 1949, 14(2): 95-116.

[责任编辑: 严海琳]

(上接第 55 页)

- [39] WANG X, GIRSHICK R, GUPTA A, et al. Non-local neural networks[C]//Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Salt Lake City, UT, USA, 2018.
- [40] HOWARD A G, ZHU M L, CHEN B, et al. MobileNets: Efficient convolutional neural networks for mobile vision applications[J]. arXiv Preprint arXiv:1704.04861, 2017.
- [41] GALLUP D, FRAHM J M, MORDOHAI P, et al. Real-time plane-sweeping stereo with multiple sweeping directions[C]//2007 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Minneapolis, Minnesota, USA, 2007.
- [42] XU N, PRICE B, COHEN S, et al. Deep image matting[C]//Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Honolulu, HI, USA, 2017.
- [43] JENSEN R, DAHL A, VOGIATZIS G, et al. Large scale multi-view stereopsis evaluation[C]//Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Columbus, OH, USA, 2014.
- [44] TOLA E, STRECHA C, FUA P. Efficient large-scale multi-view stereo for ultra high-resolution image sets[J]. *Machine Vision and Applications*, 2012, 23(5): 903-920.
- [45] CAMPBELL N D F, VOGIATZIS G, HERNÁNDEZ C, et al. Using multiple hypotheses to improve depth-maps for multi-view stereo[C]//European Conference on Computer Vision. Marseille, France, 2008: 766-779.
- [46] GALLIANI S, LASINGER K, SCHINDLER K. Gipuma: Massively parallel multi-view stereo reconstruction[J]. *Publikationen der Deutschen Gesellschaft für Photogrammetrie, Fernerkundung und Geoinformation*, 2016, 25: 361-369.
- [47] FURUKAWA Y, PONCE J. Accurate, dense, and robust multiview stereopsis[J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2009, 32(8): 1362-1376.

[责任编辑: 陈 庆]