

对称平板介质波导不连续性散射特性的边界元分析

周平, 颜彪

(南京航空航天大学电子工程系, 南京, 210016)

[摘要] 应用边界元法结合分析方法分析了对称平板介质波导不连续性结构的散射特性, 对包含不连续性的内部区域用边界元法进行了分析, 对连接均匀波导和不连续处边界上的场采用了分析方法. 为了验证该方法的正确性, 编制了一个计算机程序, 对两个算例进行了计算, 结果与已有文献值一致.

[关键词] 边界元法; 平板介质波导; 散射系数

[中图分类号] TN814+.5; [文献标识码] A; [文章编号] 1008-1925(2001)02-0018-06

0 引言

平板介质波导的不连续性结构在各种光波和毫米波器件中有着十分重要的作用, 对这些不连续性问题的研究对工程设计具有重要的指导意义. 事实上, 这个问题一直是微波电路设计者们理论和实验研究的重要课题之一. 文献[1~6]分别用有限元、有限元——边界元耦合法对平板介质波导的不连续性结构进行了分析, 由于有限元法是对整个场域进行剖分, 所以节点比较多, 在求解最后的矩阵方程时, 要求计算机的内存较大, 计算时花费的机时也是惊人的. 近20多年来发展起来的边界元法已在电磁场和微波技术领域获得了广泛的应用. 由于边界元法是基于积分方程法, 它只需对所求区域的边界进行剖分插值, 因而可以使求解的问题降低一维, 最后的矩阵方程较小, 它与对整个区域进行分割的有限元法相比, 具有输入数据少、计算时间短等优点, 便于微机应用, 特别适合于无限域问题. 本文用边界元法对对称平板介质波导的不连续性问题进行了分析, 编制了一个通用的计算机程序, 对两个典型的对称平板介质波导进行了计算, 所得结果与已有文献吻合, 证明了本文方法的正确性.

1 理论分析

图1表示任意一个对称的平面介质波导的一半, 边界 $\Gamma_3^{(1)}$ 为对称面, $\Gamma_3^{(2)}$ 位于无限远处, 边界 $\Gamma_1^{(1)} + \Gamma_4^{(1)} + \Gamma_2^{(1)} + \Gamma_3^{(1)}$ 包围的区域 Ω 包含有不连续性, 区域 Ω 由 $\Gamma_1^{(2)} + \Gamma_3^{(2)} + \Gamma_2^{(2)} + \Gamma_4^{(2)}$ 包围. 图中 d_i, n_{ij} ($i = 1, 2, j = 1, 2$) 分别表示第 i 个平板波导的厚度与折射率.

假设电磁波沿 x 方向传输, 场和平板波导的折射率与 z 无关, 则介质平板中的波导模是TE模和TM模, 由麦克斯韦方程式可以得到下面的基本方程^[5]

* 收稿日期: 2000-11-17

基金项目: 江苏省教委自然科学基金资助(99KJD-140005)

作者简介: 周平, 1965-, 淮阴师范学院副教授, 南京航空航天大学电子工程系博士研究生, 主要从事电磁场数值计算以及微波无源部件CAD等研究工作.

$$\frac{1}{p} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right] + k_0^2 q \varphi = 0 \quad (1)$$

式中: $\varphi = E_z$, $p = 1$, $q = n^2$, TE 模;

$\varphi = H_z$, $p = n^2$, $q = 1$, TM 模.

$k_0 = 2\pi/\lambda$, E_z 与 H_z 分别为电场和磁场的

z 分量, λ 是自由空间中平面波波长.

1.1 二次元的边界元法

先讨论图 2 所示边界 Γ 包围的二维区

域. 假设场量 φ 满足下面的 Helmholtz 方程:

$$\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right] + k^2 \varphi = 0 \quad (2)$$

利用基本解 φ 和格林函数^[7], 由(2) 式可得:

$$\varphi + \int_{\Gamma} \Psi^* \varphi d\Gamma = \int_{\Gamma} \varphi \Psi d\Gamma \quad (3)$$

其中

$$\varphi = \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(kr) \quad (4)$$

$$\Psi^* = \frac{j}{4} H_1^{(2)}(kr) \cos \alpha \quad (5)$$

式中: φ 为节点 i 处的 φ 值; Ψ 与 Ψ^* 分别为 φ 与 φ 的外法向导数; $H_0^{(2)}$, $H_1^{(2)}$ 分别为 0 阶和 1 阶第二类 Hankel 函数; α 为矢量 r 与法向单位矢量 n 的夹角.

将节点 i 移到边界 Γ 上, 这时将出现 $r = 0$ 的奇异点, 选择积分路径 Γ_Δ 围绕节点 i , 见图 2, 利用柯西积分主值定律, 得:

$$c_i \varphi + \int_{\Gamma} \varphi \Psi^* d\Gamma = \int_{\Gamma} \varphi \Psi d\Gamma \quad (6)$$

式中: $c_i = 1 - \frac{\theta}{2\pi}$ 对于光滑边界 $c_i = \frac{1}{2}$.

将边界 Γ 划分为许多二次元素, 对于其中的任意一个单元 e , φ, Ψ 可表示为:

$$\varphi = [N]^T [\varphi]_e \quad (7)$$

$$\Psi = [N]^T [\Psi]_e \quad (8)$$

式中: $[N]$ 为形状函数, T 表示矩阵的转置.

将(7), (8) 式代入(6) 式, 并对所有单元求和, 可得到下面的矩阵:

$$[H][\varphi] = [G][\Psi] \quad (9)$$

1.2 对称平板介质波导散射特性的边界元法分析

1.2.1 边界元法分析区域 Ω_1 、 Ω_2

在边界 Γ_1 、 Γ_2 、 Γ_3 上定义函数 Ψ 为下列形式:

$$\Psi = -\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \text{on } \Gamma_1^{(i)} \quad i = 1, 2 \quad (10)$$

$$\Psi = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \text{on } \Gamma_2^{(i)} \quad i = 1, 2 \quad (11)$$

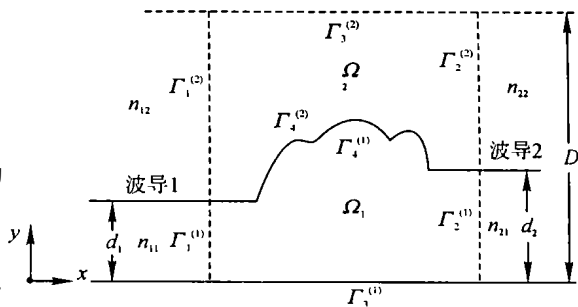


图 1 任意对称平板介质波导

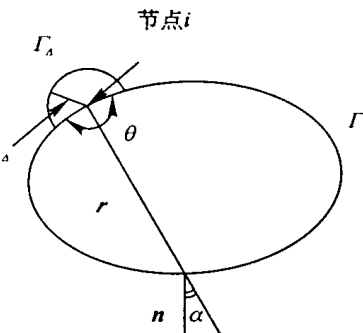


图 2 边界 Γ 包围的二维区域

$$\Psi = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad \text{on } \Gamma_3^{(2)} \quad (12)$$

$$\Psi = -\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad \text{on } \Gamma_3^{(1)} \quad (13)$$

由于边界 $\Gamma_3^{(2)}$ 在无穷远处, 由辐射条件可知:

$$\begin{cases} \varphi = 0 \\ \Psi = 0 \end{cases} \quad \text{on } \Gamma_3^{(2)} \quad (14)$$

将包围区域 Ω_1, Ω_2 的所有边界分割为若干个二次元, 假设包围 Ω_1, Ω_2 两个区域的节点数分别为 N_1, N_2 , 则对区域 Ω 应用边界元法得:

$$\begin{bmatrix} H_1^{(1)} & H_4^{(1)} & H_2^{(1)} & H_3^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1^{(1)} \\ \varphi_4^{(1)} \\ \varphi_2^{(1)} \\ \varphi_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1^{(1)} & G_4^{(1)} & G_2^{(1)} & G_3^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_1^{(1)} \\ \Psi_4^{(1)} \\ \Psi_2^{(1)} \\ \Psi_3^{(1)} \end{bmatrix} \quad (15)$$

对区域 Ω_2 由(9) 式得:

$$\begin{bmatrix} H_1^{(2)} & H_4^{(2)} & H_2^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1^{(2)} \\ \varphi_4^{(2)} \\ \varphi_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1^{(2)} & G_4^{(2)} & G_2^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_1^{(2)} \\ \Psi_4^{(2)} \\ \Psi_2^{(2)} \end{bmatrix} \quad (16)$$

(15)、(16) 两式中的 $\varphi_i^{(j)}, \Psi_i^{(j)}$ 分别对应于边界 $\Gamma_i^{(j)}$ 上节点处 φ 与 Ψ 值组成的矩阵。

上面两式可以综合成下列矩阵:

$$\begin{bmatrix} H_1^{(1)} & H_4^{(1)} & H_2^{(1)} & H_3^{(1)} & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & H_1^{(2)} & H_4^{(2)} & H_2^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1^{(1)} \\ \varphi_4^{(1)} \\ \varphi_2^{(1)} \\ \varphi_3^{(1)} \\ \varphi_1^{(2)} \\ \varphi_4^{(2)} \\ \varphi_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1^{(1)} & G_4^{(1)} & G_2^{(1)} & G_3^{(1)} & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & G_1^{(2)} & G_4^{(2)} & G_2^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_1^{(1)} \\ \Psi_4^{(1)} \\ \Psi_2^{(1)} \\ \Psi_3^{(1)} \\ \Psi_1^{(2)} \\ \Psi_4^{(2)} \\ \Psi_2^{(2)} \end{bmatrix} \quad (17)$$

(17) 式中 $[0]$ 表示 0 矩阵, 显然上式所确定的方程有 $N_1 + N_2$ 个, 但未知数却有 $2(N_1 + N_2)$ 个, 所以从(17) 式中不可以唯一确定边界上各个节点处的 φ 与 Ψ 值。

1. 2. 2 分析方法

假设单位场量以基模 ($m=0$) 从左边的波导 1 端入射, 则在边界 Γ_i ($i=1, 2$) 上场量为^[5]

$$\{\varphi_i\} = \delta_n \{f\}_1 + [z]_i \{\Psi\}_i \quad (18)$$

其中

$$\{f\}_1 = 2 \exp(1 - j\beta_{10}x_1) \{f_0\}_1 \quad (19)$$

$$[z]_i = \sum_{m=0}^{M_i-1} \frac{1}{j\beta_m \lambda} \{f_m\}_i \{g_m\}_i^T + \int_0 \frac{1}{j\beta_i(\rho) \lambda} \{f(\rho)\}_i \{g(\rho)\}_i^T d\rho \quad (20)$$

$$\{g_m\}_i = \int_e e^{g_m(y)} \{N\}_i dy \quad (21)$$

$$\{g(\rho)\}_i = \int_e g_i(\rho, y) \{N\}_i dy \quad (22)$$

这里 δ_1 为 Kronecker 符号, M_i 是波导 i 的导波模数, $\{N\}_i$ 为形状函数, T 表示矩阵的转置, $f_{im}(y), g_{im}(y), f_i(\rho, y), g_i(\rho, y), \beta_{im}$ 和 $\beta_i(\rho)$ 的形式文献[5] 已给出. 从式(18) 可以看出, 边界 Γ_1, Γ_2 上的 φ 可以用 Ψ 表示, 这样 Γ_1, Γ_2 上的未知数就减少了一半.

利用边界条件

$$\varphi^{(1)} = \varphi^{(2)} = \varphi \quad (23)$$

$$\Psi_4^{(1)} = -\Psi_4^{(2)} = \Psi_4 \quad \text{对 TE 模} \quad (24)$$

$$\frac{\Psi_4^{(1)}}{n_{11}} = -\frac{\Psi_4^{(2)}}{n_{12}} = \Psi_4 \quad \text{对 TM 模} \quad (25)$$

$$\Psi_3^{(1)} = [0] \quad (26)$$

利用(23) – (25) 式, 边界 Γ_4 上的未知数也缩减一半. 如果综合考虑(17), (18), (23) ~ (26) 式, 则可以得到下面的矩阵方程(27) 式. 显然, 它是 N 个方程, N 个未知数, 因而可以唯一确定各个边界节点上的 φ 与 Ψ 值.

$$\begin{bmatrix} H^{(1)}_1 H^{(1)}_4 & H^{(1)}_2 & H^{(1)}_3 & -G^{(1)}_1 & -G^{(1)}_4 & -G^{(1)}_2 & -G^{(1)}_3 & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & H^{(2)}_1 & H^{(2)}_4 & H^{(2)}_2 & -G^{(2)}_1 & -G^{(2)}_4 & -G^{(2)}_2 \\ [1] & [0] & [0] & [0] & -[Z]_1 & [0] & [0] & [1] & [0] & [0] & -[Z]_1 & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [1] & [0] & [0] & [0] & -[Z]_2 & [0] & [0] & [1] & [0] & [0] & -[Z]_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi^{(1)} \\ \varphi \\ \varphi^{(1)} \\ \varphi^{(1)} \\ \Psi_1^{(1)} \\ \Psi_4 \\ \Psi_2^{(1)} \\ 0 \\ \varphi^{(2)} \\ \varphi \\ \varphi^{(2)} \\ \Psi_1^{(2)} \\ -\Psi_4 \\ \Psi_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0] \\ [0] \\ \{f\}_1 \\ [0] \end{bmatrix} \quad (27)$$

解方程(27) 式, 可以求出所有边界上的 φ, Ψ 值, 从而可以求得平板介质波导第 m 个模式的归一化反射功率和传输功率^[5]

$$R_m^2 = \frac{\beta_{1m}}{\beta_{10}} \left| \delta_{m0} \exp(-j\beta_{10}x_1) + \frac{1}{j\beta_{1m}\lambda} \{g_m\}_1^T \{\Psi\}_1 \right|^2 \quad (28)$$

$$T_m^2 = \frac{\beta_{2m}}{\beta_{10}} \left| \frac{1}{j\beta_{2m}\lambda} \{g_m\}_2^T \{\Psi\}_2 \right|^2 \quad (29)$$

2 计算实例

为了验证本文方法的正确性和程序的可靠性, 我们对图 3(a) 所示的对称单阶梯平板波导

进行了数值计算,因为这种结构的平板波导不少学者已用不同的方法研究过,比较成熟,用它
可以检验程序以及本文方法的可靠性.图 3(b) 给出了以主模 TE_0 从左端入射时, $n_1 = \sqrt{5}$, n_2
 $= 1$, $k_0 d_2 = 2.0$, 阶梯左边主模反射系数 R_0 , 右端主模传输系数 T_0 的幅值随 d_1/d_2 的变化情
 况.可见本文结果与文[5] 吻合较好.在计算时,由于单阶梯平板波导的对称性,我们仅研究截
 面的一半即可.另外在前面的讨论中我们提到,从理论上讲边界 $\Gamma_3^{(2)}$ 应位于无限远处,但在实
 际计算时,只要取 $D = 6 - 7\lambda$ 时,计算结果很快收敛.

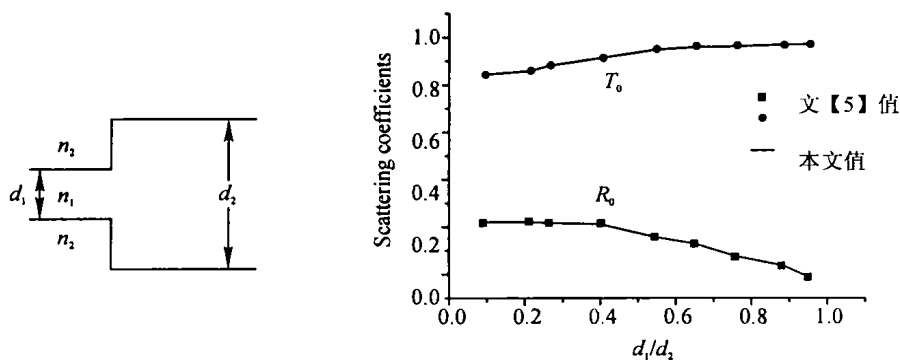


图 3 (a) 对称单阶梯平板波导

图 3 (b) 散射参数随 d_1/d_2 的变化情况

然后,我们又对图 4(a) 所示的对称平板肋波导进行了计算.图 4(b) 给出了以主模 TE_0 从
 左端入射, $n_1 = 2.24$, $n_2 = 1$, $k_0 d = 0.2$, $a = d$ 时肋波导主模反射系数 R_0 及主模传输系数 T_0
 的幅值随 b/d 的变化情况.可见本文结果与文[1] 吻合较好,再一次证明了本文方法的正确性.

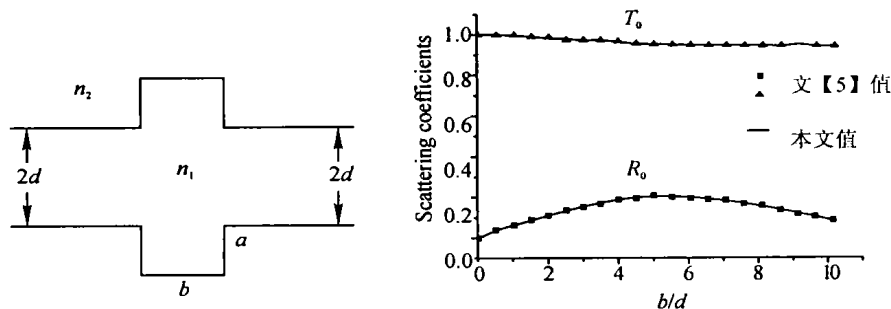


图 4 (a) 对称平板肋波导

图 4 (b) 散射参数随 b/d 的变化情况

3 结束语

本文用边界元法分析了对称平板介质波导不连续性结构的散射特性,并分别对对称单阶
 梯平板波导和肋波导进行了计算,结果与已有文献吻合,证明了本文方法的正确性.由于边界
 元法只需对所求区域的边界剖分,它与对整个场域剖分的有限元法^[1] 相比,节点数少很多,大
 大节省了计算机的内存和机时,因而是一种分析波导不连续性问题有效方法.

[参考文献]

- [1] M Suzuki, M Koshiba. Finite-element analysis of discontinuity problems in a planar dielectric waveguide[J] . Radio Sci, 1982, 17: 85 ~ 91
- [2] M Koshiba, K Ooishi, T Miki, et al. Finite-element analysis of discontinuities in a dielectric slab waveguide bounded by parallel plates[J] . Electron Lett, 1982, 18: 33 ~ 37
- [3] M Koshiba, T Miki, K Ooishi, et al. On finite-element solutions of the discontinuity problems in a bounded dielectric slab waveguide[J] . Trans. IECE Jpn, 1983, E66: 250 ~ 254
- [4] K Hirayama, M Koshiba. Numerical analysis of arbitrarily shaped discontinuities between planar dielectric waveguides with different thicknesses[J] . IEEE Trans, 1990, MTT-38(3) : 260 ~ 264
- [5] K Hirayama, M Koshiba. Analysis of discontinuities in an open dielectric slab waveguide by combination of finite and boundary elements[J] . IEEE Trans, 1998, MTT-37(4) : 761 ~ 768.
- [6] K Hirayama, M Koshiba. Analysis of discontinuities in an asymmetric dielectric slab waveguide by combination finite and boundary elements[J] . IEEE Trans, 1992, MTT-40(4) : 686 ~ 691
- [7] Shin kagami, T chiro Fukai. Application of boundary- element method to electromagnetic field problems[J] . IEEE Trans, 1984, MTT-32: 455 ~ 461

Analysis of Scattering Character of Discontinuities in A Symmetric Planar Dielectric Waveguide by Boundary-element Method

Zhou Ping, Yan Biao

(Department of Electrical Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing, 210016, PRC)

Abstract: A combination of the boundary- element method and analytical method is used for analysis of scattering character in a symmetric planar discontinuities dielectric waveguide in this paper. The boundary- element approach is used for the interior region enclosing the waveguide discontinuities, while the analytical approach is utilized for the fields on boundary which connect uniform waveguide to discontinuities. To show the validity of this approach, a computer program is designed and two cases are calculated, the results agree well with the reference data.

Key words: Boundary-element method, Planar dielectric waveguide, Scattering coefficient

[责任编辑: 严海琳]