

# 混沌系统的周期反馈控制与动态控制方法研究

张敏锐, 王海军, 颜森林

(南京晓庄学院 物理系, 江苏 南京 210017)

[摘要] 分析 Lorenz 系统的非线性动力学行为的稳定特性, 提出一个强度周期反馈控制器, 采用周期反馈控制方法对 Lorenz 系统的混沌行为进行了控制, 并对混沌控制过程进行了理论分析与数值仿真, 该方法能把 Lorenz 混沌系统控制到某一平衡态或某一周期态上. 通过实时改变控制参数, 研究了几个典型物理状态变化现象, 丰富了 Lorenz 混沌系统的应用方法.

[关键词] 混沌, 平衡态, 极限环, 控制

[中图分类号] TP273+.5, [文献标识码] B, [文章编号] 1672-1292-(2004)04-0016-04

## 0 引言

非线性现象广泛存在于现实世界中, 在一定条件下, 非线性将导致混沌. 混沌现象表面上呈现无规律特性, 但其背后隐藏着有序的本质特点也逐渐被人们所发现<sup>[1]</sup>. 许多混沌系统对模拟现实世界的不可预测现象非常有用. 近年来, 混沌现象在保密通信中显示了良好的应用前景. 但是混沌现象在许多情况下也有其不稳定的因素, 人们总是期望找到一些方法来控制混沌, 使其实现对混沌系统中某个不稳定周期轨道的稳定控制或使其保持在某个希望的平衡态上<sup>[2]</sup>. 20 世纪 90 年代, OGY<sup>[3]</sup> 方法提出后, 混沌控制方法迅速发展, 以后, 相继提出了自适应控制方法、非线性反馈等方法. 由于 Lorenz 混沌系统是混沌系统的典型模型, 同时, Lorenz 混沌系统的一维控制方法又非常难以控制混沌, 所以本文以 Lorenz 混沌系统为例, 提出周期反馈控制 Lorenz 混沌的方法, 使其保持在某个平衡态上, 或希望的

振荡周期上. 不需要改变系统的参数, 就可使该混沌系统变为多用途系统. 本文还通过实时改变调制参数, 进行了混沌动态控制的研究<sup>[4]</sup>, 分析了混沌状态转换的特点, 发现了一些有趣的物理状态变化现象.

## 1 Lorenz 系统的混沌行为

1963 年美国气象学家洛伦兹(Lorenz)研究大气对流, 提出了著名的 Lorenz<sup>[5]</sup> 方程:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = Rx - y - xz \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} \quad (1)$$

式中,  $x$  正比于对流运动的强度,  $y$  正比于水平方向温度变化,  $z$  正比于垂直方向温度变化;  $\sigma$ 、 $b$  和  $R$  分别为系统参数. 数值结果表明: 当  $\sigma = 16.0$ ,  $b = 4.0$ ,  $R = 45.92$  时, Lorenz 系统处于混沌状态(如图 1 所示), 它有两个不动点, 轨线围绕两个不动点随机跳动, 形成螺旋状, 而且对初值非常敏感.

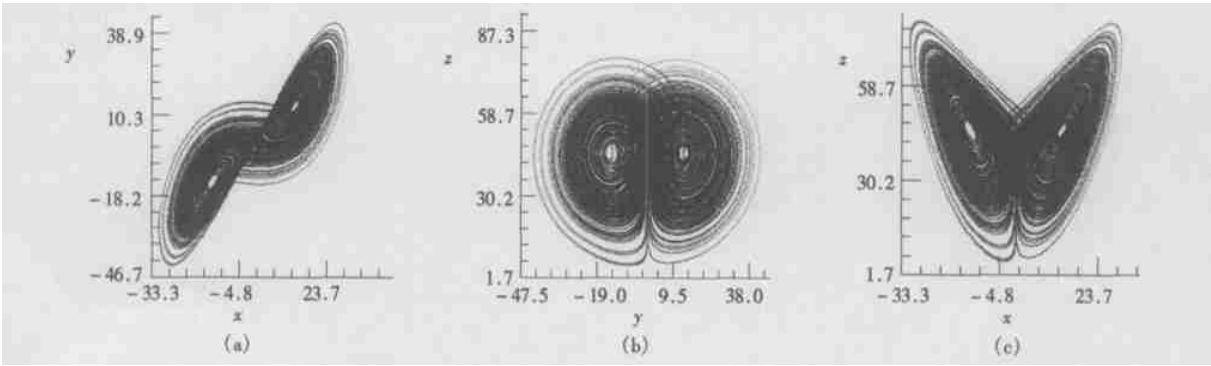


图 1 奇怪吸引子

混沌的一个判据就是运动对初值的敏感性, 也称为运动的指数型局部不稳定性. 李雅普诺夫指数

(LCE)就细致地描述了动力系统的这种指数型局部不稳定性. 其定义如下: 某动力系统的运动用  $m$

维相空间中的一条轨道  $x(t)$ ,  $x \in R^m$  来描述. 令  $x(t) + \delta x(t)$  任一相邻的运动轨道, 则轨道  $x(t)$  的李雅普诺夫指数为:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t - t_0} \ln \left( \lim_{|\delta x(t_0)| \rightarrow 0} \frac{|\delta x(t)|}{|\delta x(t_0)|} \right) \quad (2)$$

对于三维系统对应的 3 个李雅普诺夫指数, 若  $(-, -, -)$  代表轨道在每一个方向上都是收缩的, 及对应不动点, 系统将趋于平衡态; 若  $(0, -, -)$  代表极限环周期吸引子, 其中“0”表示沿极限环方向的轨道长度不辐射也不收敛, “- , -”表示沿其它两个横截极限环的方向轨道应收敛到极限环上, 系统将趋于周期态; 若  $(+, 0, -)$  代表奇怪吸引子, “+”表示敏感初条件的伸长性质, “0”表示沿流的方向不辐射, “-”表示吸引子的折叠性, 表明系统将处于混沌态. 上述 Lorenz 系统中对应的 3 个 LCE 为  $(2.16, 0.00, -32.4)$ .

2 混沌系统的周期反馈控制模型

为了丰富和发展 Lorenz 混沌系统的应用方法, 现在设计出一个强度周期反馈控制器, 使  $x$  自由

$$\begin{vmatrix} -\sigma + 2\pi\omega_k \cos(2\pi\omega_k) - \lambda & \sigma & 0 \\ R - z & -1 - \lambda & -x \\ y & x & -b - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

$$\text{即: } \lambda^3 + [b + 1 + \sigma - 2\pi\omega_k \cos(2\pi\omega_k)] \lambda^2 + \{b + [\sigma - 2\pi\omega_k \cos(2\pi\omega_k)](b - 1) + x^2 - (R - z)\sigma\} \lambda + \{\omega_k y + [\sigma - 2\pi\omega_k \cos(2\pi\omega_k)]b + x^2[\sigma - 2\pi\omega_k \cos(2\pi\omega_k)] - (R - z)b\sigma\} = 0 \quad (5)$$

其 3 个本征值  $\lambda_1$ 、 $\lambda_2$ 、 $\lambda_3$  的正负与  $\omega$ 、 $k$  的取值有关. 如果  $\lambda_1$ 、 $\lambda_2$ 、 $\lambda_3$  均为负, 则该点为稳定平衡点, 如果有一个值大于 0, 则该点为不稳定平衡点.

当  $\omega$ 、 $k$  取不同值时, 系统将趋于不同状态, 3 个平衡态的稳定性也将随  $\omega$ 、 $k$  的值不同而改变, 从控制开始到稳定状态的驰豫时间  $t_u$  也不同, 系统将会出现稳定的极限环、平衡点以及系统从一种状态变到另一种状态. 这样就实现了对方程(1)系统的控制. 必须指出, 初值将影响系统的吸引域、极限环的位置和平衡点. 如果控制参数发生变化, 那么系统的 LCE 和平衡态也要发生变化, 系统状态也必然随之作相应的变化和调整.

3 数值结果

3.1 控制到平衡态上

数值模拟结果如图 2 所示, 在系统运行前 20 s 让  $k = 0$ , 此时系统无控制, 到 20 s 时开始实施控制. 当  $\omega = 20$ ,  $k = 6.5$  时, 系统很快趋于右上稳定点, 系统状态最终被“吸引”到右上稳定点上. 这样就实现了对方程(1)系统的控制. 可以看到在图 2

度产生一个周期反馈的控制项  $k \sin(2\pi\omega_k)$ , 这样得到一个受控制的 Lorenz 系统, 其受控制的 Lorenz 系统方程如下:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) + k \sin(2\pi\omega_k) \\ \dot{y} = Rx - y - xz \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} \quad (3)$$

式中,  $\sigma = 16.0$ ,  $b = 4.0$ ,  $R = 45.92$ ,  $k \sin(2\pi\omega_k)$  为周期反馈控制项,  $k$  为反馈控制参数,  $\omega$  为反馈控制频率.

先求该系统的平衡点. 令(3)式左边  $\dot{x} = 0$ ,  $\dot{y} = 0$ ,  $\dot{z} = 0$  则有 3 个平衡点  $O(x, y, z) = (0, 0, 0)$ ;  $C_1(x, y, z) = (F_1(\omega, k), F_2(\omega, k), F_3(\omega, k))$ ;  $C_2(x, y, z) = (-F_1(\omega, k), -F_2(\omega, k), F_3(\omega, k))$ , 其中  $F_1(\omega, k)$ ,  $F_2(\omega, k)$ ,  $F_3(\omega, k)$  是关于  $\omega$ 、 $k$  的函数, 其值随  $\omega$ 、 $k$  的取值不同而变.

下面分析平衡点的稳定性: 将  $O(x, y, z)$ 、 $C_1(x, y, z)$ 、 $C_2(x, y, z)$  3 个平衡点分别代入(3)式的雅可比矩阵特征多项式:

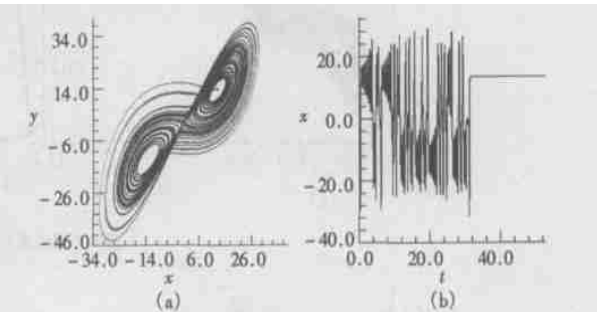


图 2 混沌态被控制到一个稳定点

(a) 中, 系统从起点  $(-0.6078, 0.1135, 20.6074)$  以螺旋状态轨迹顺时针方向环绕进入稳定点的吸引域, 最终变化到稳定点  $(13.424, 13.385, 44.92)$  上. 从图 2(b) 中可以看到, 从控制开始到稳定状态所需驰豫时间约  $t_u = 11.4$  s, 系统最终进入全局渐近稳定状态, 数值计算出 LCE 谱为  $(-3.59, -3.59, -1186.75)$ , 其最大 LCE 也是负值, 这进一步表明控制后的系统进入了稳定状态. 另外我们还计算出在该参数下平衡点  $(13.424, 13.385, 44.92)$  的稳定性, 其  $\lambda_1 = -826.4000$ ,  $\lambda_2 = -0.0249 - 0.1347i$ ,  $\lambda_3 = -0.0249 + 0.1347i$ . 其实部均为负值, 说明该

点为稳定平衡点.

当  $\omega=20, k=6.4$  时系统将被控制到另一个平衡点, 数值模拟结果如图 3 所示, 系统很快趋于左下稳定点  $(-13.424, -13.385, 44.922)$ , 这样就实现了对方程(1)系统的控制. 由图 3(b) 看到, 控制的弛豫时间约  $t_u=5.8\text{ s}$ , 系统最终进入全局渐近稳定状态, 而 LCE 谱为  $(-3.59, -3.59, -1169.33)$ , 其最大 LCE 是负值, 表明系统被控制到稳定状态. 另外我们还计算出在该参数下平衡点  $(-13.424, -13.385, 44.92)$  的稳定性, 其  $\lambda_1=-813.9300, \lambda_2=-0.0249-0.1347i, \lambda_3=-0.0249+0.1347i$ . 其实部均为负值, 说明该点为稳定平衡点.

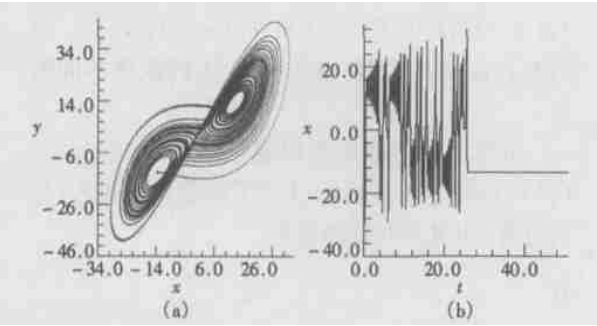


图 3 混沌态被控制到另一个稳定点

3.2 控制到周期态上

这里也是让系统到 20 s 时开始实施控制. 当  $\omega=5.6, k=6.4$  时, 从图 4 可以看到, 系统将出现了稳定的极限环. 从图 4(a) 可以看到, 系统从起点  $(-0.6078, 0.1135, 20.6074)$  出发, 经过一个大的弧线轨迹顺时针方向环绕稳定到以  $(13.349, 13.409, 44.915)$  为中心的极限环上, 其经过多次振荡才被控制到周期态. 从图 4(b) 可以看到, 从控制开始到稳定状态的弛豫时间约  $t_u=5.4\text{ s}$ , 最终稳定在周期态上, 数值计算出其 LCE 谱为  $(0.00, -3.97, -167.79)$ . 由于最大 LCE 为 0, 表明控制后的系统进入稳定周期态上.

而当  $\omega=5.3, k=6.4$  时, 系统将被控制到另一个周期态上. 如图 5 所示, 系统将出现稳定的极限环. 从图 5(a) 可以看到, 系统从起点  $(-0.6078, 0.1135, 20.6074)$  出发, 经过一个大的弧线轨迹顺时针方向环绕稳定到以  $(-13.349, -13.405, 44.916)$  为中心的极限环上, 其经过多次振荡. 从图 5(b) 可以看到, 从控制开始到稳定状态的弛豫时间约  $t_u=18.3\text{ s}$ , 最终稳定在周期态上. 其 LCE 谱为  $(0.00, -4.02, -158.55)$ , 最大 LCE 为 0, 表明控制后的系统进入了稳定周期态上.

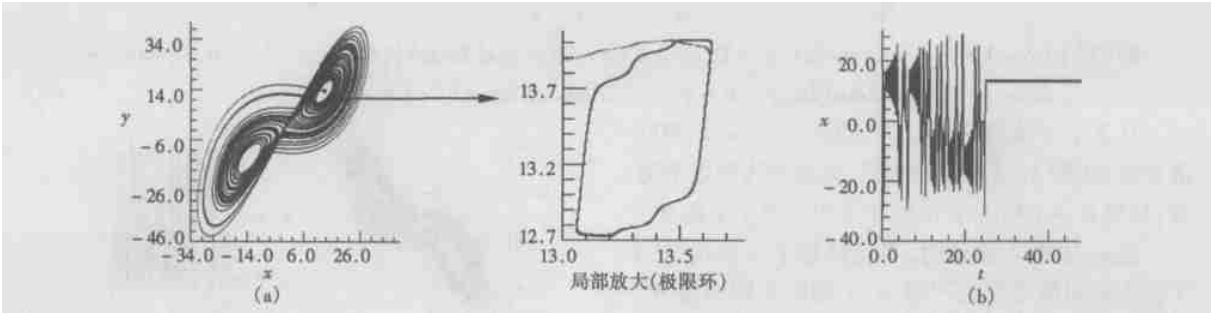


图 4 混沌态被控制到周期态

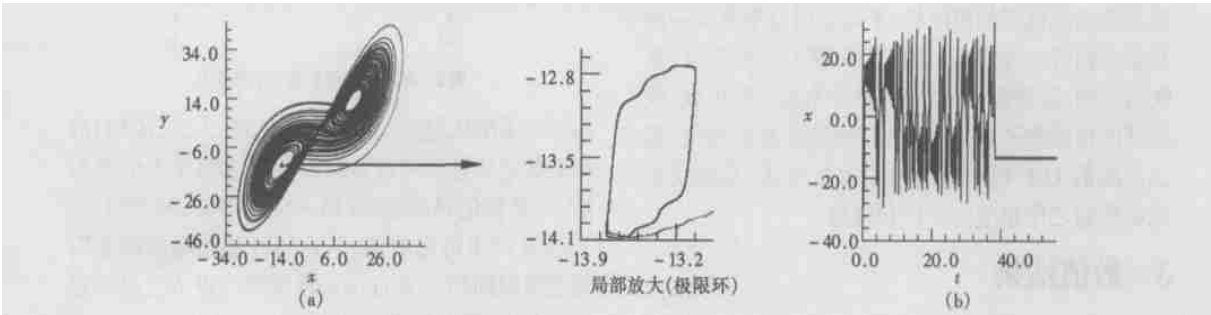


图 5 混沌态被控制到另一个周期态

3.3 混沌状态的动态控制

图 6 到图 8 为几种典型的物理状态变化的数值模拟结果. 它们分别都是在 20 s 和 40 s 时调整控制参数  $k$  和  $\omega$ , 从而实施动态控制. 图 6 为 20 s 时, 从

$k=0, \omega=20$  变到  $k=6.4, \omega=20$  时, 混沌态被控制到稳定点上. 图 6 中, 系统首先从起点  $(-0.6078, 0.1135, 20.6074)$  螺旋变化到稳定点  $(-13.424, -13.385, 44.922)$  上, 并稳定在该点上. 由于在 40 s

时  $k$  突然从 6.4 变化到 0.9,  $\omega$  从 20 变化到 5, “强迫”系统进入稳定的极限环上, 并最终稳定在该环上, 其极限环轴半径明显比图 4 的极限环轴半径小, 稳定态快速地稳定在极限环上, 弛豫时间约为 0.2 s. 图 7 为  $k=0$ ,  $\omega=20$  变化到  $k=8.9$ ,  $\omega=20$  时, 混沌态被控制到稳定的极限环上. 在 40 s 时  $k$  和  $\omega$  分别突然从 (8.9, 20) 变化到 (20, 5) 时, 系统由极限环快速地稳定在平衡态上, 控制弛豫时间约为 0.2 s. 图 8 为混沌态到混沌态的转换变化, 它是在 20 s 时,  $k$  从 0 切换到 9.7,  $\omega=20$  混沌态 (LCE: 2.16, 0.00, -32.4) 弛豫一段时间进入另一个混沌态 (LCE: 74.9114, -3.2704, -290.714). 从图 8 可知混沌态在被动态变化控制以后, 它们的相空间轨迹和时变轨迹完全不一样. 事实上, 控制参数可以在较大的范围实时调节变化, 使 Lorenz 混沌系统以适应不同方向应用的需要.

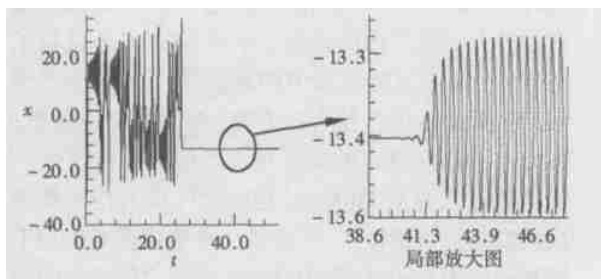


图 6 混沌态被控制到稳定态再被控制到周期态

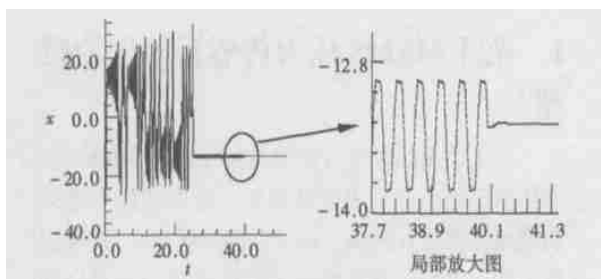


图 7 混沌态被控制到周期态再被控制到稳定态

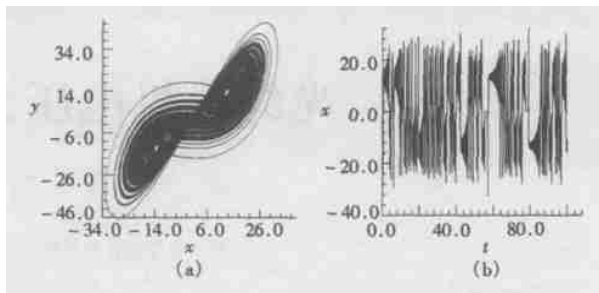


图 8 由一种混沌态控制到另一种混沌态

## 4 结语

本文提出的混沌周期反馈控制的方法, 可以有效地控制 Lorenz 混沌系统. 该方法简便实用, 不需要改变系统的结构和参数, 就可以控制系统混沌态, 这一点对该系统的实际应用很有价值. 同时, 通过改变控制参数, 研究了混沌状态转换变化的动态特点, 其物理现象还有待于进一步的研究.

## [参考文献]

- [1] Hao B L. Chaos II [M]. Singapore: World Scientific, 1990.
- [2] Gonzalez J, Femat R, Alvarez Ramirez J, *et al.* A Discrete Approach to the Control and Synchronization of a Class of Chaotic Oscillators [J]. IEEE Trans On Circuits And Syst I, 1999, 46: 1139 - 1144.
- [3] Ott E, Grebogi C, Yorke J A. Controlling Chaos [J]. Phys Rev Lett, 1990, 64: 1196 - 1199.
- [4] 颜森林, 伍仕宝, 逢焕刚, 等. 混沌系统的注入反馈控制与动态控制方法研究 [J]. 物理学报, 2001, 50(3): 428 - 434.
- [5] Lorenz E N. Deterministic Non-periodic Flow [J]. J Atmos Sci, 1963, 20: 130 - 141.

# Studies on Period-feedback and Dynamic Controls of Chaotic Systems

ZHANG Minrui, WANG Haijun, YAN Serlin

(Department of Physics, Nanjing Xiaozhuang College, Nanjing 210017, China)

**Abstract:** The nonlinear dynamics characteristics and stability of the Lorenz system are analyzed by adopting nonlinear control theory. A method for designing the strength-period-feedback controller is put forward. The chaotic behaviors of the Lorenz system are controlled by chaotic control methods which are called period feedback control. Theories of these methods are analyzed and simulated numerically. By using the method, the chaotic systems can be controlled in some equilibrium states or some vibrational cyclical states. With the change of control parameters, the typical variation of physical state is studied to expand the applications of Lorenz chaotic systems.

**Key words:** chaos, equilibrium state, limit cycle, control

[责任编辑: 蔡]