中立型时滞系统的输出反馈镇定

陆俊玮, 冯春梅, 郭爱琴

(南京师范大学 电气与自动化工程学院, 江苏 南京 210042)

[摘要] 考虑中立型时滞系统的输出反馈镇定问题, 目的是设计动态输出反馈控制器使得闭环系统渐近稳定; 利用线性矩阵不等式方法, 得到了该问题有解的充分条件; 当所给出的线性矩阵不等式有解时, 给出了所期望的动态反馈控制器的显式表达式. 最后, 用一个算例表明了所提供的设计方法的有效性, 同时给出其仿真曲线.

[关键词] 中立型时滞系统, 输出镇定, 线性矩阵不等式

[中图分类号] TP271+.9 [文献标识码] A [文章编号] 1672-1292(2005)02-0021-03

Output Feedback Stabilization of Neutral Delay Systems

LU Junwei, FENG Chunmei, GUO Aiqin

(School of Electrical and Automation Engineering, Nanjing Normal University, Jiangsu Nanjing 210042, China)

Abstract This paper considers the problem of stabilization of neutral delay systems via output feedback controllers, aims to design such a dynamic output feedback controller that the resulting closed-loop system is asymptotically stable, obtains a sufficient condition for the solvability of the problem with the linear matrix inequality (LMI) approach, and gives an explicit expression of desired dynamic output feedback controllers when the given LMIs are feasible. Finally, a numerical example is provided to demonstrate the effectiveness of the proposed method, and at the same time, its simulated curve is given.

Key words neutral delay systems, output stabilization, linear matrix inequality

中立型时滞系统在电网络系统等许多工程实际系统中有着广泛的应用[1,2], 对该类系统稳定性的研究已经有许多结果, 如文献[3~5]给出了该类系统稳定的充分条件; 利用新的 Lyapunov-Krasovskii函数, 文献[6]得到了一些改进的稳定性条件, 因这些条件是用线性矩阵不等式(LMI)的形式给出的, 故其验证相对来说要容易得多. 另一方面, 文献[7]研究了不确定性中立型时滞系统的鲁棒镇定和鲁棒 H_∞控制问题; 利用 LMI方法, 给出了上述问题可解的充分条件; 分析表明, 期望的状态反馈控制器可通过求解这些给定的 LMI而得到, 同时给出了控制器的设计方法, 其数值算例表明了设计方法的有效性. 另外, H_∞滤波问题也在文献[8]中得到研究, 在给出问题可解的同时还给出 H_∞滤波器的设计算法. 但是, 对该类系统许多控制问题的结论都是在假设状态可以得到的假设下而获得的. 在实际应用中, 往往不是所有的状态都是可以得到的. 基于此种认识, 本文考虑该中立型时滞系统的输出反馈镇定问题, 目的是设计动态反馈控制器使得闭环系统渐近稳定. 利用线性矩阵不等式方法, 得到了该问题有解的充分条件, 同时给出期望的动态反馈控制器的表达式, 最后还给出仿真曲线.

1 问题描述

考虑如下的中立型时滞系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + A_1\boldsymbol{x}(t-h) + A_2\dot{\boldsymbol{x}}(t-d) + B_1\boldsymbol{u}(t) \tag{1}$$

$$\boldsymbol{y}(t) = C\boldsymbol{x}(t) + C_1\boldsymbol{x}(t-h) + B_2\boldsymbol{u}(t) \tag{2}$$

$$\boldsymbol{x}(t) = \varphi(t),\quad t\in[-\bar{h}, 0],\quad \bar{h} = \max\{h, d\} \tag{3}$$

其中, $\boldsymbol{x}(t)\in R^n$, $\boldsymbol{u}(t)\in R^m$, $\boldsymbol{y}(t)\in R^l$分别是系统的状态向量, 控制输入向量及输出向量. $\varphi(t)$ 是系统的初值函数. $h>0$, $d>0$是系统的时滞. $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}_1$,

收稿日期: 2004-06-10

作者简介: 陆俊玮(1972-), 实验师, 主要从事计算机和自动控制方面的教学与研究. E-mail: ljw@mail.nsgk.net

A_3, B_1, C, C_1, B_2 是已知的适维阵. 现考虑如下的动态反馈控制器:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A_k\hat{x}(t) + B_k y(t) \tag{4}$$

$$u(t) = C_k\hat{x}(t) \tag{5}$$

其中, $\hat{x} \in R^n$, A_k, B_k, C_k 是待求的矩阵. 将此控制器作用于系统(1)~(3)得到

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{A}_1 H\tilde{x}(t-h) + \tilde{A}_2 H\dot{\tilde{x}}(t-d) \tag{6}$$

其中

$$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} A & B_1C_k \\ B_kC & A_k + B_kB_2C_k \end{bmatrix},$$

$$\tilde{A}_1 = \begin{bmatrix} A_1 \\ B_kC_1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_2 = \begin{bmatrix} A_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H = [I, 0].$$

于是本文所考虑的问题是: 设计动态反馈控制器(4)、(5)使得闭环系统(6)渐近稳定.

2 主要结论

引理1 闭环系统(6)渐近稳定的充分条件是存在对称阵 $P > 0$, $Q_1 > 0$ 及 $Q_2 > 0$, 使得下面的矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} P\tilde{A} + \tilde{A}^{T}P + H^{T}Q_1H & P\tilde{A}_1 & P\tilde{A}_2 & \tilde{A}^{T}H^{T} \\ \tilde{A}_1^{T}P & -Q_1 & 0 & \tilde{A}_1^{T}H^{T} \\ \tilde{A}_2^{T}P & 0 & -Q_2 & \tilde{A}_2^{T}H^{T} \\ H\tilde{A} & H\tilde{A}_1 & H\tilde{A}_2 & -Q_2^{-1} \end{bmatrix} < 0 \tag{7}$$

证明 对系统(6), 取 Lyapunov 函数为

$$V(\tilde{x}(t)) = \tilde{x}(t)^{T}P\tilde{x}(t) + \int_{t-h}^{t}\tilde{x}(\tau)^{T}H^{T}Q_1H\tilde{x}(\tau)\,d\tau + \int_{t-d}^{t}\dot{\tilde{x}}(\tau)^{T}H^{T}Q_2H\dot{\tilde{x}}(\tau)\,d\tau \tag{8}$$

则:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{x}(t)) = {} & 2\tilde{x}^{T}(t)P[\tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{A}_1H\tilde{x}(t-h) + \tilde{A}_2H\dot{\tilde{x}}(t-d)] + \tilde{x}^{T}(t)H^{T}Q_1H\tilde{x}(t) \\ & - \tilde{x}^{T}(t-h)H^{T}Q_1H\tilde{x}(t-h) + \dot{\tilde{x}}^{T}(t)H^{T}Q_2H\dot{\tilde{x}}(t) - \\ & \dot{\tilde{x}}^{T}(t-d)H^{T}Q_2H\dot{\tilde{x}}(t-d) = \eta^{T}(t)\Omega\eta(t) \end{aligned}$$

其中

$$\eta(t) = \begin{bmatrix} \tilde{x}^{T}(t) & \tilde{x}^{T}(t-h)H^{T} & \dot{\tilde{x}}^{T}(t-d)H^{T} \end{bmatrix}^{T}$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} P\tilde{A} + \tilde{A}^{T}P + H^{T}Q_1H & P\tilde{A}_1 & P\tilde{A}_2 \\ \tilde{A}_1^{T}P & -Q_1 & 0 \\ \tilde{A}_2^{T}P & 0 & -Q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{A}^{T} \\ \tilde{A}_1^{T} \\ \tilde{A}_2^{T} \end{bmatrix} H^{T}Q_2H\begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{A}_1 & \tilde{A}_2 \end{bmatrix}$$

另一方面, 由 Schur 补引理及(7)可得 $\Omega < 0$, 从而由(8)得到 $\dot{V}(\tilde{x}(t)) < 0$. 由此及可知(6)渐近稳定. 证毕.

下面给出本文的主要结论.

定理1 若存在矩阵 Φ, Ψ, Γ 及 $X > 0$, $Y > 0$ 使得线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} J_1 & \Gamma & A_1 & A_2 & YA^{T} + \Phi^{T}B_1^{T} \\ \Gamma^{T} & J_2 & XA_1 + \phi C_1 & XA_2 & A^{T} \\ A_1^{T} & A_1^{T}X + C_1^{T}\phi^{T} & -Q_1 & 0 & A_1^{T} \\ A_2^{T} & A_2^{T}X & 0 & -Q_2 & A_2^{T} \\ AY + B_1\Phi & A & A_1 & A_2 & -Q_2^{-1} \end{bmatrix} < 0 \tag{9}$$

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} > 0 \tag{10}$$

对某些矩阵 $Q_2 > 0$ 成立, 其中

$J_1 = AY + YA^{T} + B_1\Phi + \Phi^{T}B_1^{T} + Q_1$,

$J_2 = XA + A^{T}X + \Psi C + C^{T}\Psi^{T}$.

则存在动态反馈控制器(4)、(5)使得闭环系统(6)渐近稳定. 此时, 所期望的反馈控制器(4)、(5)的参数可由下式给出:

$$\begin{aligned} A_K &= S^{-1}(\Gamma - A^{T} - XAY - \Psi CY - XB_1\Phi - \Psi B_2\Phi)W^{-T}, \\ B_K &= S^{-1}\Psi, \quad C_k = \Phi W^{-T} \end{aligned} \tag{11}$$

其中, 矩阵 S 及 W 满足 $XY + SW^{T} = I$.

证明 令 $\pi_1 = \begin{bmatrix} Y & I \\ W^{T} & 0 \end{bmatrix}$, $\pi_2 = \begin{bmatrix} I & X \\ 0 & S^{T} \end{bmatrix}$, $\tilde{P} = \pi_2\pi_1^{-1}$.

则可以证明 $\tilde{P} > 0$. 于是利用控制器参数(11), 不等式(9)可以写为

$$\begin{bmatrix} \tilde{P}\tilde{A} + \tilde{A}^{T}\tilde{P} + H^{T}Q_1H & \tilde{P}\tilde{A}_1 & \tilde{P}\tilde{A}_2 & \tilde{A}^{T}H^{T} \\ \tilde{A}_1^{T}\tilde{P} & -Q_1 & 0 & \tilde{A}_1^{T}H^{T} \\ \tilde{A}_2^{T}\tilde{P} & 0 & -Q_2 & \tilde{A}_2^{T}H^{T} \\ H\tilde{A} & H\tilde{A}_1 & H\tilde{A}_2 & -Q_2^{-1} \end{bmatrix} < 0$$

注意到此不等式及并利用引理1, 即可得到所得的闭环系统渐近稳定. 证毕.

3 算例

考虑具有如下参数的系统(1), (2)

$$A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0.3 \\ -0.6 & -1 & 0.5 \\ 0.1 & 0 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$A_1=\begin{bmatrix}0.2 & -0.1 & 0\\ 0 & -0.1 & 0.3\\ 0.2 & -0.1 & 0\end{bmatrix},$$

$$A_2=\begin{bmatrix}0.1 & 0 & -0.2\\ -0.2 & 0.2 & 0.3\\ 0 & 0.1 & -0.1\end{bmatrix},$$

$$B_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1.2\\ -1 & 1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}-1 & 0.3 & 0\\ 0 & 1 & 0.2\end{bmatrix},$$

$$C_1=\begin{bmatrix}0 & -0.2 & 1\\ -0.5 & 1 & -0.3\end{bmatrix},$$

$$B_2=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0.5 & 1\end{bmatrix}.$$

取

$$Q_2=\begin{bmatrix}1 & 0.1 & 0\\ 0.1 & 0.6 & 0.1\\ 0 & 0.1 & 0.5\end{bmatrix}.$$

则用 Matlab Control Toolbox 可以验证, LMIs (9) 与 (10) 有如下解

$$X=\begin{bmatrix}6.4752 & 2.5975 & -7.3316\\ 2.5975 & 4.5208 & -3.7100\\ -7.3316 & -3.7100 & 9.3530\end{bmatrix},$$

$$Y=\begin{bmatrix}11.8806 & -9.1824 & 0.2155\\ -9.1824 & 9.5739 & 1.5138\\ 0.2155 & 1.5138 & 14.1384\end{bmatrix}$$

$$\Phi=\begin{bmatrix}-2.1491 & 0.6020 & -4.2697\\ -3.3521 & 1.8602 & -7.6808\end{bmatrix},$$

$$\Psi=\begin{bmatrix}0.6230 & 0.2092\\ -2.3372 & -1.1602\\ 1.3047 & 0.1410\end{bmatrix},$$

$$\Gamma=\begin{bmatrix}0.1127 & 0.0771 & 0.2354\\ -0.5335 & -0.9903 & 0.4242\\ 0.1020 & 0.0594 & 0.0738\end{bmatrix}$$

所以, 由定理 1 知镇定问题有解; 为了求期望的动态反馈控制器, 取

$$S=\begin{bmatrix}-5 & 0 & 1\\ 1 & -3.2 & -1.5\\ 0 & -2 & -6\end{bmatrix},$$

$$W=\begin{bmatrix}8.1650 & 3.5075 & -9.6729\\ -7.4541 & -2.2706 & 8.4170\\ -13.3243 & -33.1056 & 31.7086\end{bmatrix}.$$

则此时所期望的动态反馈控制器参数可以选取为

$$A_K=\begin{bmatrix}-22.0809 & -12.7219 & -22.5938\\ 3.5252 & -2.1348 & -0.1542\\ 7.8375 & 7.1644 & 10.3853\end{bmatrix},$$

$$B_K=\begin{bmatrix}-0.2282 & -0.0742\\ 0.9019 & 0.4153\\ -0.5181 & -0.1619\end{bmatrix},$$

$$C_K=\begin{bmatrix}-12.2478 & -7.0953 & -12.6893\\ -12.6463 & -7.0029 & -12.8678\end{bmatrix}.$$

在此控制器作用下系统的动态响应曲线由图 1给出.

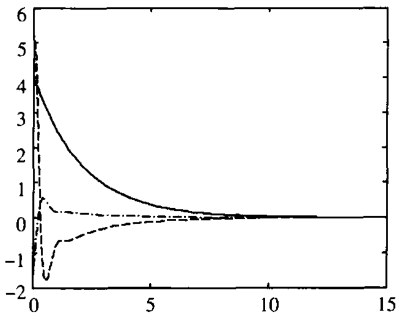

图 1 闭环系统响应曲线

4 结论

本文针对中立型时滞系统, 设计了动态反馈控制器使得闭环系统渐近稳定. 所期望的控制器可由给定的 LMI来求出, 从而解决了该类系统的输出反馈镇定问题.

[参考文献]

[1] Brayton R K. Bifurcation of periodic solutions in a nonlinear difference-differential equation of neutral type[J]. Quart Appl Math, 1966, 24: 215−224.

[2] Kolmanovskii V B, Myshkis A D. Applied Theory of Functional Differential Equations[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992.

[3] Park J H, Won S. Asymptotic stability of neutral systems with multiple delays[J]. J Optim Theory Appl, 1999, 103: 183−200.

[4] Lien C H, Yu K W, Hsieh J G. Stability conditions for a class of neutral systems with multiple time delays[J]. J Math Anal Appl, 2000, 245: 20−27.

[5] Lien C H, Chen J D. Discrete-delay-independent and discrete-delay-dependent criteria for a class of neutral systems[J]. J ASME Dyn Syst Meas Control, 2003, 125: 33−41.

[6] He Y, Wu M, She J H, *et al*. Delay-dependent robust stability criteria for uncertain neutral systems with mixed delays[J]. Systems and Control Lett, 2004, 51: 57−65.

[7] Xu S, Lam J, Yang C. Robust H_∞ control for uncertain linear neutral delay systems[J]. Optimal Control Applications and Methods, 2002, 23: 113−123.

[8] Mahmoud M. Robust Control and Filtering for Time-Delay Systems[M]. New York: Marcel Dekker, 2000.

[责任编辑: 严海琳]