第 5卷第 3期 南京师范大学学报 (工程技术版) Vol. 5 No. 3
2005年 9月 JOURNAL OF NANJING NORMAL UNIVERSITY (ENGINEERING AND TECHNOLOGY) Sep, 2005

四次 NURBS表示对称圆弧曲线的实用方法

李 军

(湖北民族学院 信息工程学院, 湖北 恩施 445000)

[摘要] 研究了用四次 NURBS表示标准解析形状中最简单也最有代表性的圆锥曲线——对称圆弧的问题, 给出了一种实用的四次 NURBS表示对称圆弧曲线的方法, 该方法用 5个控制顶点的 NURBS曲线来表示一象限的对称圆弧, 使参数 $u=1/2$的值为圆弧的中心点, 同时满足控制顶点和权因子在圆弧中心点处是对称的. 该方法给出的控制顶点和权因子的计算结果, 符合对圆弧 NURBS表示的要求, 不必进行推导计算, 便于工程应用中推广使用.

[关键词] 圆弧曲线, NURBS, 控制顶点, 权因子

[中图分类号] TP391, [文献标识码] A, [文章编号] 1672-1292(2005)03-0058-03

Some Practical Approaches of Representing Symmetric Circular Arcs With Biquadratic Nurbs

LI Jun

(School of Information Engineering, Hubei Institute for Nationalities, Hubei Enshi 445000, China)

Abstract This paper mainly studies how to use biquadratic NURBS to represent symmetric circular arcs, the simplest and the most representative conic curve and gives a practical approach of representing symmetric circular arcs with biquadratic NURBS, in which a quadrant of symmetric circular arcs are represented by a segment of NURBS curve determined by five control points, the of value is made as the circular arcs central point, and at the same time the demand is met that the control points and weights are symmetry in the circular arcs central point. The calculated results of control points and weights given by the method meets the demands of circular arcs NURBS representation and need no calculating. The method is convenient to be generalized in engineering application.

Key words circular arcs curve, NURBS, control points, weights

0 引言

NURBS(Non-uniform Rational B- Spline)在工程中已得到广泛的应用, 已成为计算机辅助几何设计领域的曲线和曲面的标准描述方式. 它把标准的二次曲线和自由曲线统一起来, 克服了 Bezier B样条方法的不足, 同时权因子和非均匀节点矢量使得能够对曲线/曲面的形状进行更加有效的控制[1].

本文主要研究用四次 NURBS表示标准解析形状中最简单也最有代表性的圆锥曲线——对称圆弧的问题. 文献[2]中给出了二次 NURBS曲线表示圆弧的必要条件, 文献[3, 4]讨论了三次有理 Bezier曲线表示圆弧的方法, 文献[5]讨论了三次 NURBS表示圆弧曲线的实用方法, 文献[6]讨论了三次 NURBS表示对称圆弧的问题. 在实际工程应用中, 需要次数更高、光滑度更好的 NURBS参数曲线. 本文给出了四次 NURBS表示的对称圆弧曲线, 能使参数 $u=1/2$的值为圆弧中心点, 同时满足控制顶点和权因子在圆弧中心点处是对称的. 文中给出的控制顶点和权因子的计算结果, 符合对圆弧 NURBS表示的要求, 不必进行推导计算, 便于在工程应用中推广使用.

1 NURBS曲线

NURBS曲线是由分段有理样条多项式基函数定义的(以 k次曲线为例), 表示为:

收稿日期: 2004-04-20
基金项目: 湖北省教育厅重点资助项目(2003A008).
作者简介: 李军(1972-), 讲师, 主要从事计算机图形学、计算机辅助设计等方面的教学与研究. E-mail: lijun72213@163.com

$$C(u) = \frac{\sum_{i=0}^{n} N_{i,k}(u)\omega_i P_i}{\sum_{i=0}^{n} N_{i,k}(u)\omega_i} \quad (i = 0, 1, \cdots, n) \tag{1}$$

式中, ω_i 为权因子, P_i 为控制点, $N_{i,k}(u)$ 是 k次 B样条基函数.

2　四次 NURBS表示对称圆弧曲线的实用方法

本文是用四次 NURBS曲线表示一象限的对称圆弧. 设圆的方程是 $x^2 + y^2 = 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. 如图 1所示, 设二次 NURBS曲线的控制顶点坐标为 $P_0(1, 0)$, $P_1(1, 1)$, $P_2(0, 1)$, 选取 P_0, P_2点分别为控制多边形的起止点, 权因子 $\omega_i > 0$, $i = 0, 1, 2$, 节点矢量取 $\boldsymbol{U} = \{0, 0, 0, 1, 1, 1\}$. 则由(1)式得到一般二次 NURBS曲线的参数方程.

要使上面参数方程表示为圆的方程 $x^2 + y^2 = 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, 其必要条件为[2]:

$$2\omega_1^2 = \omega_0\omega_2 \tag{2}$$

如果我们沿 u向进行均匀采样, 假定 $u_i = i/(2n)$, 其中 $0 \leqslant i \leqslant 2n$. 要获得一个均匀圆的点列, 则需要选择 $\omega_0 = \omega_2$, 由(4)式得 $\omega_0 = \sqrt{2}\omega_1$, 则圆的参数方程由(3)式可表示为:

$$(x(u), y(u)) = \frac{(\sqrt{2}(1-u)^2 + 2u(1-u),\ 2u(1-u) + \sqrt{2}u^2)}{\sqrt{2}(1-u)^2 + 2u(1-u) + \sqrt{2}u^2} \quad u \in [0, 1] \tag{3}$$

方程(5)所表示的圆在中点 $u = 1/2$时是对称的.

如图 2所示, 设三次 NURBS曲线的控制顶点坐标为 $P_0(1, 0)$, $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(y_1, x_1)$, $P_3(0, 1)$, 选取 P_0, P_3点分别为控制多边形的起止点, 权因子 $\omega_i > 0$, $i = 0, 1, 2, 3$, 节点矢量取 $\boldsymbol{U} = \{0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1\}$. 则由(1)式得到一般三次 NURBS曲线的参数方程.

要使参数方程表示为圆的方程 $x^2 + y^2 = 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, 其必要条件为[6]:

$$\omega_0\omega_2 = 3(\sqrt{2} - 1)\omega_1^2 \quad \omega_1\omega_3 = 3(\sqrt{2} - 1)\omega_2^2 \tag{4}$$

如果我们沿 u向进行均匀采样, 假定 $u_i = i/(2n)$, 其中 $0 \leqslant i \leqslant 2n$. 要获得一个均匀圆的点列, 则需要选择 $\omega_0 = \omega_3$, $\omega_1 = \omega_2$, 由(7)式得 $\omega_0 = 3(\sqrt{2} - 1)\omega_1$, 则圆的参数方程表示为:

$$(x(u), y(u)) = \frac{((\sqrt{2}-1)(1-u)^3 + (1-u)^2u + (2-\sqrt{2})(1-u)u^2,\ (2-\sqrt{2})(1-u)^2u + (1-u)u^2 + (\sqrt{2}-1)u^3)}{(\sqrt{2}-1)(1-u)^3 + (1-u)^2u + (1-u)u^2 + (\sqrt{2}-1)u^3} \tag{5}$$

方程(5)所表示的圆在中点 $u = 1/2$时是对称的.

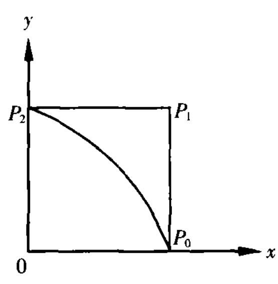

图 1　二次 NURBS 对称圆弧

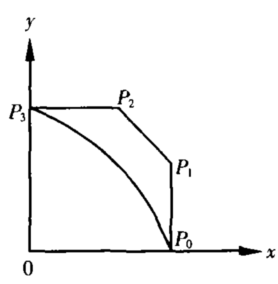

图 2　三次 NURBS 对称圆弧

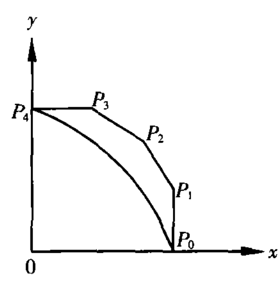

图 3　四次 NURBS 对称圆弧

在实际工程应用需要次数更高、光滑度更好的 NURBS参数曲线, 为得到高次 NURBS参数曲线在中点 $u = 1/2$时是对称的圆弧, 且沿 u向进行均匀采样, 并获得一个均匀圆的采样点列, 我们采用四次 NURBS曲线参数方程来表示, 其中控制顶点和权因子也是关于中点对称的. 如图 3所示, 设四次 NURBS曲线的控制顶点坐标为 $P_0(1, 0)$, $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$, $P_4(0, 1)$, 选取 P_0, P_4点分别为控制多边形的起止点, 权因子 $\omega_i > 0$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$, 节点矢量取 $U = \{0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1\}$.

2.1　求控制顶点 $\boldsymbol{P}_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_1)$, $\boldsymbol{P}_2(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_2)$, $\boldsymbol{P}_3(\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{y}_3)$ 的坐标值

根据已知条件, 有 $x_1 = y_3$, $y_1 = x_3$, $x_2 = y_2$, $\omega_0 = \omega_4$, $\omega_1 = \omega_3$, 则由(9)式得:

$$\begin{cases} x(u)=\dfrac{(1-u)^4\omega_0+4(1-u)^3u\omega_1x_1+6(1-u)^2u^2\omega_2x_2+4(1-u)u^3\omega_1y_1}{(1-u)^4\omega_0+4(1-u)^3u\omega_1+6(1-u)^2u^2\omega_2+4(1-u)u^3\omega_1+u^4\omega_0} \\ y(u)=\dfrac{4(1-u)^3u\omega_1y_1+6(1-u)^2u^2\omega_2x_2+4(1-u)u^3\omega_1x_1+u^4\omega_0}{(1-u)^4\omega_0+4(1-u)^3u\omega_1+6(1-u)^2u^2\omega_2+4(1-u)u^3\omega_1+u^4\omega_0} \end{cases} \tag{6}$$

由线段 $P_0P_1=P_1P_2=P_2P_3=P_3P_4=y_1$, $x_1=1$, 且圆弧为一个均匀的采样序列, 在中点 $u=1/2$ 是对称的圆弧, 则有 $\angle P_0P_1P_2=\angle P_1P_2P_3=\angle P_2P_3P_4=150°$, 线段 $P_1P_3=\sqrt{2}(1-y_1)$, 得:

$$\sin(\angle P_1P_2P_3/2)=\frac{(P_1P_3/2)}{P_1P_2}=\frac{\sqrt{2}(1-y_1)}{2y_1} \tag{7}$$

将已知条件代入(11)式得: $y_1=(\sqrt{3}-1)/\sqrt{3}$

又由线段

$$BC=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=y_1 \tag{8}$$

将已知条件 $x_1=1$, $x_2=y_2$ 代入(12)式得: $x_2=y_2=(\sqrt{3}+1)/(2\sqrt{3})$.

则控制顶点 P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 的坐标值分别为:

$P_0(1,0)$, $P_1(1,(\sqrt{3}-1)/\sqrt{3})$,

$P_2((\sqrt{3}+1)/2\sqrt{3},(\sqrt{3}+1)/2\sqrt{3})$,

$P_3((\sqrt{3}-1)/\sqrt{3},1)$, $P_4(0,1)$.

2.2 求权因子 ω_0, ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 的值

将(10)式代入圆的方程 $x^2+y^2=1$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$ 得:

$$\begin{aligned} &M_0(1-u)^7u+M_1(1-u)^6u^2+\\ &\qquad M_2(1-u)^5u^3+M_3(1-u)^4u^4+\\ &\qquad M_4(1-u)^3u^5+M_5(1-u)^2u^6+\\ &\qquad M_6(1-u)u^7=0 \end{aligned} \tag{9}$$

其中:

$M_0=8\omega_0\omega_1(x_1-1)$,

$M_1=16\omega_1^2x_1^2+12\omega_0\omega_2x_2+16\omega_1^2y_1^2-16\omega_1^2-12\omega_0\omega_2$,

$M_2=8\omega_0\omega_1y_1+48\omega_1\omega_2x_1x_2+48\omega_1\omega_2x_2y_1-8\omega_0\omega_1-48\omega_1\omega_2$

$M_3=72\omega_2^2x_2^2+64\omega_1^2x_1y_1-36\omega_2^2-32\omega_1^2-2\omega_0^2$

$M_4=48\omega_1\omega_2x_2y_1+8\omega_0\omega_1y_1+48\omega_1\omega_2x_1x_2-8\omega_0\omega_1-48\omega_1\omega_2$

$M_5=16\omega_1^2y_1^2+12\omega_0\omega_2x_2+16\omega_1^2x_1^2-16\omega_1^2-12\omega_0\omega_2$

$M_6=8\omega_0\omega_1(x_1-1)$

由Bernstein基函数的线性无关性, 有 $M_0=M_1=M_2=M_3=M_4=M_5=M_6=0$ 则有:

$$\begin{cases} 4\omega_1^2x_1^2+3\omega_0\omega_2x_2+4\omega_1^2y_1^2-4\omega_1^2-3\omega_0\omega_2=0 \\ \omega_0y_1+6\omega_2x_1x_2+6\omega_2x_2y_1-\omega_0-6\omega_2=0 \\ 36\omega_2^2x_2^2+32\omega_1^2x_1y_1-18\omega_2^2-16\omega_1^2-\omega_0^2=0 \end{cases} \tag{10}$$

又由NURBS参数曲线在中点 $u=1/2$ 时是对称的圆弧, 则有 $x(1/2)=\sqrt{2}/2$, 代入(10)式得:

$$\begin{aligned} &(1-\sqrt{2})\omega_0+4(x_1+y_1-\sqrt{2})\omega_1+\\ &\qquad 3(2x_2-\sqrt{2})\omega_2=0 \end{aligned} \tag{11}$$

将 $x_1=1$, $y_1=(\sqrt{3}-1)/\sqrt{3}$, $x_2=(\sqrt{3}+1)/(2\sqrt{3})$ 代入(14)、(15)式得:

$$\omega_1=\frac{3\sqrt{2}}{4}\omega_2 \qquad \omega_0=(3-\sqrt{3})\omega_2$$

在图3中取 $\omega_2=4$, 则权因子 ω_0, ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 的值为 $\omega_0=\omega_4=4(3-\sqrt{3})$, $\omega_1=\omega_3=3\sqrt{2}$.

3 结论

在工程应用NURBS时, 常常会遇到将自由曲线和圆弧统一起来的情况. 本文给出了一象限对称圆弧的四次NURBS表示的方法, 得到了控制顶点和权因子的计算结果. 利用该方法可以推广到任意角度的对称圆弧的四次NURBS表示, 为工程应用NURBS表示对称圆弧曲线提供极大的方便.

[参考文献]

[1] Piegl L. On NURBS: a surver[J]. IEEE Computer Graphics and Applications, 1991, 11(1): 5-71.

[2] David F. An Introduction to NURBS with Historical Perspective[M]. San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers, 2001. 155-158

[3] Piegl L, Tiller W. Curve and surface constructions using rational B-splines[J]. CAD, 1987, 19(9): 485-497.

[4] Piegl L, Tiller W. A menagerie of rational B-splines circles[J]. IEEE CG and A, 1989, 9(5): 48-56

[5] 李强, 席光. NURBS表示圆弧曲线的实用方法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 1999, 11(5): 467-469.

[6] 范劲松, 安军. 用三次NURBS表示圆弧与整圆的算法研究[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 1997, 9(5): 391-395.

[责任编辑: 刘健]