

基于 Mathematica 程序的 阶梯三角波频谱分析新方法

尹继武, 龙姝明

(陕西理工学院 物理系, 陕西 汉中 723001)

[摘要] 提出了一种利用 Mathematica 程序对包含多个有限间断点的分段连续周期信号进行频谱分析的普遍性新方法, 理论出发点是频谱分析的傅里叶级数展开法, 其主要特点是利用 Mathematica 软件强大的函数运算功能, 具体解决了对阶梯波作频谱分析这个理论方法上可行, 但实际计算手段无法给出结论的困难. 并用此方法首次对数模转换器合成的阶梯三角波的频谱进行了严密的分析. 给出了能够完成频谱分析, 作出波形图 and 对应频谱图的 Mathematica 程序, 研究表明: 阶梯三角波的频谱结构由三角波每个周期中的阶梯数 $2k$ 决定.

[关键词] Mathematica 程序, 频谱, 阶梯三角波, 谐波

[中图分类号] TN911 **[文献标识码]** A **[文章编号]** 1672-1292(2006)01-0024-04

A New Way to Analyze The Frequency Spectrum of Ladder Triangular Waves Based on the Mathematica Program

YN Ji wu, LONG Shu ming

(Department of Physics, Shaanxi University of Technology, Hanzhong 723001, China)

Abstract: The paper put forward a new general way to analyze the frequency spectrum of periodic signal based on the Mathematica program. Its theoretical principle is Fourier series method of development. The computing difficulty to analyze the frequency spectrum of the ladder wave is solved by the aid of the Mathematica program. The frequency spectrum of the ladder triangular wave is analyzed in this way. The Mathematica program is recommended to do it. As a result, the frequency spectrum structure of the ladder triangular wave is decided by the number $2k$ of the ladder in a cycle of triangular wave.

Key words: Mathematica program, frequency spectrum, ladder triangular waves, harmonic waves

0 引言

在利用数模转换器合成信号时, 数模转换器直接输出的是特定转换频率的阶梯状信号. 阶梯波含有大量谐波成份, 对其频谱结构进行深入分析, 为利用数模转换器合成信号提供了可靠的理论依据, 对于相关的滤波器设计、输出信号的失真度分析都有重要指导意义. 但是, 用传统的分析计算方法对合成阶梯波作频谱分析虽然理论上是可行的, 但实际计算量极大, 导致对这类信号作频谱分析变得非常困难, 作者尚未检索到相关的研究文献. 现利用功能强大的 Mathematica 软件编写程序, 实现了对阶梯三角波频谱结构的深入分析. 该方法不仅适用于阶梯三角波, 实际上也给出了一种利用计算机进行频谱分析的普遍性方法.

1 频谱分析方法

数模转换器合成三角波信号时, 受 CPU 或单片机控制的数字量都必须经过数据锁存器^[1,2]后才进行数模转换, 由此合成的信号实际上是一个包含多个有限间断点的分段连续函数, 不能使用离散信号的傅里

收稿日期: 2005-07-10.

基金项目: 陕西理工学院教改资助项目 (YJG0421).

作者简介: 尹继武 (1967-), 副教授, 主要从事电子技术的教学与研究. E-mail: yjw23456@163.com

叶分析,应该用连续周期信号傅里叶变换作频谱分析^[3].需要指出,对此信号作频谱分析不能使用电子线路模拟设计软件 Pspice,因为 Pspice 软件使用的是离散傅里叶分析^[4].

设数模转换器转换频率为 f_s , 合成阶梯三角波频率为 f (周期为 T), 振幅为 1 V , 根据采样定理, 应满足 $f_s \geq 2f$, 但在利用数模转换器合成输出信号时, 为减小失真, 通常^[5]取 $f_s = (3 \sim 5)f$, 令

$$2k = f_s / f,$$

那么, $2k$ 为每个三角波周期中数模转换器的转换次数, k 取整数. 相应地, 阶梯三角波的一个周期将是由 $2k$ 个等宽台阶组成的. 画出 $k = 6$ 时的一个周期理想三角波和对应阶梯三角波的波形如图 1 所示, 阶梯三角波第 i 段台阶的电压值为:

$$u_i = \begin{cases} -\frac{2i-k}{k} & (i = -k, -k+1, \dots, -1, 0) \\ \frac{2i-k}{k} & (i = 1, 2, \dots, k-1, k), \end{cases} \quad (2)$$

该信号既是频率为 f 的周期信号, 又是由转换频率为 f_s 的台阶构成的信号, 其频谱将包含 f 的高次谐波.

由于图 1 所示阶梯三角波信号为无直流分量的偶函数, 对其作傅里叶级数展开可表示为:

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \cos\left(\frac{2n}{T}t\right), \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (3)$$

展开系数 u_n 为:

$$u_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t) \cos\left(\frac{2n}{T}t\right) dt = \frac{4}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t) \cos\left(\frac{2n}{T}t\right) dt = \frac{4}{T} \left(\int_{-\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{4k}} \cos\left(\frac{2n}{T}t\right) dt + \sum_{i=-k+1}^{-1} \frac{-\frac{T}{2k}i - \frac{T}{4k}}{k} \cos\left(\frac{2n}{T}t\right) dt - \int_{-\frac{T}{4k}}^{\frac{T}{4k}} \cos\left(\frac{2n}{T}t\right) dt \right), \quad (4)$$

展开系数 u_n 的模即为谐波振幅 U_n , 系数 u_n 的正负反映了对应谐波的初相位.

由 (4) 式, 只要选择三角波每个周期中数模转换器的转换次数 $2k$, 总可以算出该阶梯信号的展开系数 u_n , 但传统方法的计算工作量极大. 不过, 利用运算功能强大的 Mathematica 软件^[6], 就可化难为易. 作者编写了能够自动进行频谱分析的 Mathematica 程序段如下, 它能计算出任意 n 次谐波的振幅 U_n , 并自动作出波形图 and 对应频谱图.

```
Clear[triangular, ladder, T, k, m, t, u, n, p, st];
```

```
T = 1; k = 6; m = 43;
```

```
triangular = 2Power[-1, Round[2t/T - 0.5]] (2t/T - 0.5 - Round[2t/T - 0.5]);
```

```
ladder = (2/k) Round[(k/2) (triangular + 1)] - 1;
```

```
Plot[{triangular, ladder}, {t, -0.5T, 0.5T}, PlotRange -> All, PlotPoints -> 500];
```

```
u[n_] = 4 (Integrate[Cos[2n/T t], {t, -T/2, -T/2 + T/4k}] -
```

```
Sum[2i+k/k Integrate[Cos[2n/T t], {t, T/2k i - T/4k, T/2k i + T/4k}], {i, -k+1, -1}] -
```

```
Integrate[Cos[2n/T t], {t, -T/4k, 0}]/T;
```

```
pst = 1; A = Table[{n, u[n]}, {n, pst+2, m}]/Chop;
```

```
If[Dimensions[A] == 1, AAA = Table[A[[j]], {j, 1, Length[A]}];
```

```
A = AAA; Clear[AAA];
```

```
If[Part[A, 1, 1] != 0, A = Prepend[A, {0, 0}];
```

```
DN = Dimensions[A]; LN = DN[[1]];
```

```
specline = Table[{AbsoluteThickness[1], RGBColor[1, 0, 0], Line[{Part[A, j, 1], Part[A, j, 2]}, {Part[A, j, 1], 0}]}], {j, 1, LN}];
```

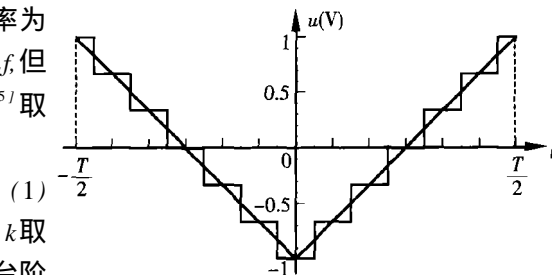


图 1 阶梯三角波($k=6$)

```
specpoint = Table[ { AbsolutePointSize[ 5 ], RGBColor[ 0, 0, 1 ], Point[ { Part[A, j, 1 ], Part[A, j, 2 ] } ] }, { j, 1, LN } ];
Show[ Graphics[ { specline, specpoint }, Axes -> True, PlotRange -> All ];
Clear[ DN, LN, specline, specpoint, A ];
```

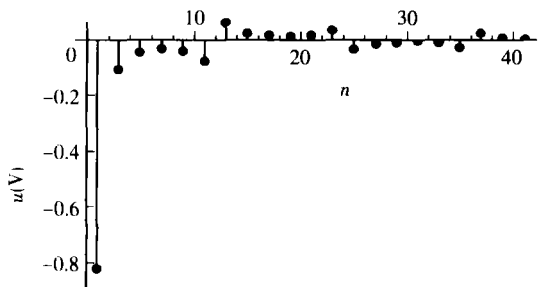


图 2 阶梯三角波的频谱(k=6,含基波)

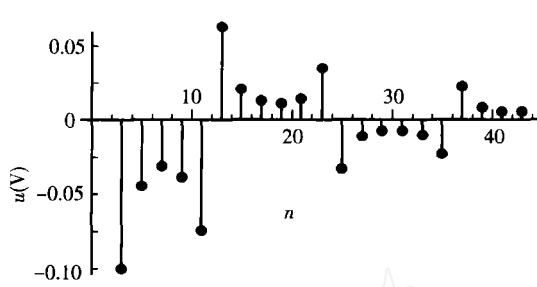


图 3 阶梯三角波的频谱(k=6,无基波)

其中, T 为三角波周期 /s, $2k$ 为三角波每个周期中的台阶数; n 为谐波次数; m 为频谱图中需要画出的最高谐波次数. 该程序段中, 取 $T=1$ s, $k=6$; $m=43$ (T, k, m 可自定).

2 阶梯三角波的频谱结构

经上述分析计算发现, 阶梯三角波的频谱结构具有以下特点:

- (1) 一个周期由 $2k$ 个台阶组成的阶梯三角波, 其频谱只包含基波 f 及其奇次谐波 nf 成份 (n 为奇数). 基波幅值最大, 无偶次谐波.
- (2) 以 $k=6$ 为例, 包含基波频率 f 的频谱图如图 2 所示. 为了看清楚谐波频谱结构, 图 3 给出了不包含基波的频谱图. 两图中只给出 $n=43$ 次以内的谐波频谱, 基波谱线位于 $n=1$ 处. 该频谱图中, 幅值的正负反映初相位, 初相位为 π 的谐波谱线在横轴下方, 初相位为 0 的谐波谱线在横轴上方.
- (3) 为了使用时查找数据方便, 作者利用 Mathematica 程序进行计算, 给出了由阶梯三角波每个周期中的台阶数 $2k$ 所决定的阶梯波的谐波幅值, 如表 1 所示 (幅值单位为 V, 以理想三角波的振幅为 1 V 计算, n 为谐波次数. 幅值的正负反映初相位, 如前所述).

表 1 每个周期由 $2k$ 个台阶组成的阶梯三角波的基波和部分谐波幅值 u_n

k	n									
	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
3	- 0.828 8	- 0.141	- 0.170	0.121	0.047	0.077	- 0.065	- 0.028	- 0.050	0.045
4	- 0.831 8	- 0.115	- 0.069	- 0.119	0.092	0.031	0.027	0.055	- 0.049	- 0.018
5	- 0.824 1	- 0.105	- 0.051	- 0.045	- 0.092	0.075	0.024	0.017	0.019	0.043
6	- 0.819 9	- 0.100	- 0.044	- 0.031	- 0.033	- 0.075	0.063	0.020	0.013	0.012
7	- 0.817 4	- 0.097	- 0.040	- 0.026	- 0.022	- 0.027	- 0.063	0.054	0.017	0.011
8	- 0.815 8	- 0.095	- 0.038	- 0.023	- 0.018	- 0.017	- 0.022	- 0.054	0.048	0.015
9	- 0.814 7	- 0.094	- 0.037	- 0.022	- 0.016	- 0.014	- 0.014	- 0.019	- 0.048	0.043
10	- 0.813 9	- 0.093	- 0.036	- 0.020	- 0.014	- 0.012	- 0.011	- 0.012	- 0.016	- 0.043
20	- 0.811 4	- 0.091	- 0.033	- 0.017	- 0.011	- 0.008	- 0.006	- 0.005	- 0.004	- 0.003
50	- 0.810 7	- 0.090	- 0.033	- 0.017	- 0.010	- 0.007	- 0.005	- 0.004	- 0.003	- 0.002
100	- 0.810 6	- 0.090	- 0.032	- 0.017	- 0.010	- 0.007	- 0.005	- 0.004	- 0.003	- 0.002

Mathematica 软件数值分析的精度极高, 可任意指定分析结果的有效数位, 表 1 的分析采用的是 Mathematica 软件默认的有效数位 (16 位), 因版面布局所限, 对分析结果作了四舍五入处理, 表 1 中基波幅值保留到 0.1 mV 量级, 绝对误差为 ± 0.05 mV; 谐波幅值只保留到 1 mV 量级, 绝对误差为 ± 0.5 mV.

- (4) 通过对 k 取不同值分析发现, 频谱图中各频率成份的初相位总是每 k 条谱线一组, 相邻各组谱线对应频率成份的初相位相反. 以 $k=6$ 时的频谱图 2 为例, $n=1, 3, 5, 7, 9, 11$ 对应的 6 条谱线初相位为 π , 而 $n=13, 15, 17, 19, 21, 23$ 对应的 6 条谱线初相位为 0 .
- (5) 从频谱图总体上看, 阶梯三角波各组谱线幅值随谐波次数升高而呈波浪式减小. 与图 1 所示理想三角波的频谱作对比分析发现, 理想三角波同样只包含奇次谐波, 但理想三角波的所有谐波相位相同, 且随着谐波次数升高, 其谐波幅值呈单调减小.

3 结论

3.1 频谱分析的普遍性方法

本文给出的频谱分析方法的理论出发点是频谱分析的傅里叶级数展开法,主要特点是,将 Mathematica软件强大的函数运算功能和计算机强大的数值运算能力相结合,具体解决了对阶梯波作频谱分析这个理论方法上可行,但实际手段上无法给出结论的困难.值得指出,与各种电子线路模拟软件中的仿真分析方法完全不同,本文的方法首次对这类信号的频谱进行了严密的理论分析,分析方法具有普遍性.

3.2 基于 Mathematica程序的阶梯信号频谱分析的基本步骤

写出待分析阶梯信号的分段数学表达式,如本文的(2)式; 写出傅里叶级数展开系数表达式,如本文的(4)式; 套用本文给出的用于频谱分析的 Mathematica程序段.这样,就可得到待分析阶梯信号的任意 n 次谐波的振幅 U_n ,并自动作出波形图 and 对应频谱图.

[参考文献] (References)

- [1] 余锡存,曹国华. 单片机原理及接口技术 [M]. 西安:西安电子科技大学出版社,2000: 139~ 140.
YU Xicun, CAO Guohua Principles and Interfacing Technique of Single-Chip Computer[M]. Xi'an: Xidian University Press, 2000: 139~ 140. (in Chinese)
- [2] 易仲芳. 80X86微型计算机原理及应用 [M]. 北京:电子工业出版社,1995: 304~ 305.
YI Zhongfang Principles and Applications of 80X86 Microcomputer[M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 1995: 304~ 305. (in Chinese)
- [3] 李行一,蔡忠见,彭海鹰. 数字信号处理 [M]. 重庆:重庆大学出版社,2002: 38~ 39.
LI Xingyi, CAI Zhongjian, PENG Haiying Digital Signal Processing[M]. Chongqing: Chongqing University Press, 2002: 38~ 39. (in Chinese)
- [4] 贾新章. OrCAD/Pspice 9实用教程 [M]. 西安:西安电子科技大学出版社,2000: 103.
JIA Xinzhang OrCAD/Pspice 9 Practical Course[M]. Xi'an: Xidian University Press, 2000: 103. (in Chinese)
- [5] 杨振江. A/D、D/A转换器接口技术与实用线路 [M]. 西安:西安电子科技大学出版社,1996
YANG Zhenjiang A/D、D/A Converter Interface Technology and Circuits[M]. Xi'an: Xidian University Press, 1996 (in Chinese)
- [6] 龙姝明,朱杰武,孙彦清,等. 数学物理方法 and Mathematica [M]. 西安:陕西人民教育出版社,2002: 64~ 67.
LONG Shuming, ZHU Jiewu, SUN Yanqing, et al Mathematical Physics Method and Mathematica [M]. Xi'an: Shaanxi People's Education Press, 2002: 64~ 67. (in Chinese)

[责任编辑:刘 健]