

商品购销中的浮动价格与二次需求函数模型

化存才

(云南师范大学 数学学院, 云南 昆明 650092)

[摘要] 研究了商品购销中的浮动价格和需求函数模型问题. 首先, 给出了价格上浮的充分条件和价格保持的必要条件; 基于使销售收益损失达到极小的原则, 给出一种折扣定价策略: 当需求函数的凸性较小时, 可选择使需求量达到极大值的价格作为标准销售价和一个与需求量无关的最大折扣率. 其次, 提出了一个二次需求函数模型, 从而得到了使销售量和利润都增加的标准价格; 还得到了在二次需求函数下使利润最大的价格, 它大于使销售量达到最大的价格. 最后, 通过纯净水的销售实例对结果进行了验证.

[关键词] 商品, 浮动价格, 数学模型

[中图分类号] O29 F045. 32 [文献标识码] A [文章编号] 1672-1292(2006)01-0033-05

Mathematical Models for Floating Price in Purchase and Sale of Commodity and for a Quadratic Function of Demand

HUA Cuncai

(School of Mathematics, Yunnan Normal University, Kunming 650092, China)

Abstract In this paper, mathematical models are investigated for floating price of purchase and sale of commodity and for a demanding function. At first, a sufficient condition for floating-up the price and a necessary condition for preserving the price are both given; a strategy for discounting prices is given on the basis of a principle that the loss of income for sale attains its minimal value. That is to say, both the maximal rate for discounting prices that is independent of the demanding quantity and the standard price for sale of commodity can be chosen if the convexity is small and the demanding quantity attains its maximal value. Secondly, a quadratic-function model of demand is presented. Therefore a standard price that may increase the demanding quantity and pure profits is obtained. Furthermore, a price at which the pure profit attains its maximum is also obtained. This price is larger than the price at which the demanding quantity attains its maximum. Finally, the results are verified by an example in the sale of the purified water.

Key words commodity, floating price, mathematical model

0 引言

在商品的购销中, 影响商品交易成功的因素很多, 除了商品的质量, 消费者的需求, 销售商的优质服务态度和生产企业良好的售后服务保障体系外, 商品的价格 (优惠价格) 往往是起着主导作用的因素. 比如大型超市的商品价格 (即所谓的平价), 航空的机票优惠价格等. 销售商经常推出各种不同的优惠价格让利于消费者, 以便赢得更多的消费者来购买商品, 做到薄利多销. 给予消费者优惠价格的方式通常是折扣, 折扣率的制定是折扣定价的关键. 人们通常认为, 采用折扣价格的效果是: 高折扣价带来销售量的增加, 低折扣价格则带来销售量的减少, 从而需求函数是一个单调减少的函数. 实际上, 由于缺乏数学上的分析, 故销售商在折扣定价时人为因素较大, 而制定出的高低两极的价格往往不是最优价格, 也难以得到消费者的

收稿日期: 2005-07-28
基金项目: 云南省引进高层次人才工作经费 (2003); 云南师范大学科研启动基金 (2002), 云南省“数学与应用数学”重点建设专业项目和云南省“金融数学”“十五”重点学科建设资助项目.
作者简介: 化存才 (1964-), 博士, 教授, 主要从事实际问题的数学模型的研究. E-mail: cuncai_hua@sohu.com

认可. 同时, 大多数消费者对于折扣定价机制也是知之甚少的, 他们在购买商品时常常处于被动的地位, 不知如何讨价还价. 因此商品的需求和销售并不能完全按预期的结果出现. 从社会现象方面来说, 一种商品在其供求矛盾十分突出的时候, 其销售价格往往也需要考虑适当地向上浮动, 但是这种涨价对于有些社会公共商品而言就是一个很敏感的社会问题, 比如春运中的客运价格, 生活中的水电气的价格等, 此时就必须处理好相关的社会问题. 那么, 到底应怎样去确定向上浮动的商品价格呢? 又应选择什么样的标准价格和折扣率, 它又将会带来怎样的需求函数变化呢?

至今, 仅有文献研究关于商品的最优价格和折扣定价模型问题, 比如视需求函数为价格的减函数的简单最优价格模型^[1], 供应链管理中供需双方协调以节约双方费用的优化定价模型, 以及考虑经济批量的数学折扣定价模型^[2~4]等. 这些模型都是讨论面向生产企业供货和销售商批量订货的折扣定价问题, 而较少讨论直接面对销售商和消费者之间商品购销的折扣定价模型, 特别是价格上浮的问题.

1 商品购销中的浮动价格模型

设商品的批发价为 q , 在供求正常时, 零售价格 (标准价格) 定为 $p > q$ 在零售时, 需求函数为 $\theta(p)$, 非批发成本为 C , 销售纯利润为 W , 则有:

$$W = (p - q)\theta(p) - C \quad (1)$$

考虑商品购销中供求矛盾突出时的浮动价格. 我们假设要确定的价格浮动率为 α 相应的需求量记为 θ_α , 非批发成本记为 C_α , 而产生的纯利润 W_α , 则有:

$$W_\alpha = (\alpha p - q)\theta_\alpha - C_\alpha \quad (2)$$

1.1 价格上浮和价格保持的条件

通常, 在保证商品销售利润的前提下, 在商品供大于求时, 要下调 α 使需求量增加, 做到薄利多销; 而在供小于求时, 又要上调 α 使得需求量减少, 做到少销多利, 或者采取其他相应的措施保价供应. 因此总的要求是: $\theta_\alpha > \theta$ 和 $W_\alpha \geq W$. 因此我们有: $(\alpha p - q)\theta_\alpha \geq (p - q)\theta + C_\alpha - C$.

从而有浮动率满足:

$$\alpha \geq \frac{q}{p} + \left(1 - \frac{q}{p}\right) \frac{\theta}{\theta_\alpha} + \frac{C_\alpha - C}{p\theta_\alpha} \quad (3)$$

如果在商品供求矛盾十分突出时采取的某些相应措施得当 (比如增加销售网点, 人员, 运营车辆等), 那么应有 $C_\alpha \geq C$. 于是我们得到价格上浮的充分条件和价格保持的必要条件:

当 $C_\alpha - C \geq (p - q)(\theta_\alpha - \theta)$ 时, 必有 $\alpha \geq 1$, 即价格必须上调, 上调的最小浮动率为:

$$\alpha_m = \frac{q}{p} + \left(1 - \frac{q}{p}\right) \frac{\theta}{\theta_\alpha} + \frac{C_\alpha - C}{p\theta_\alpha} \quad (4)$$

反之, 对于任何 α 都有 $C_\alpha - C \leq (p - q)(\theta_\alpha - \theta) + (\alpha - 1)\theta_\alpha$. 特别地, 要价格保持不变 ($\alpha = 1$), 必有 $C_\alpha - C \leq (p - q)(\theta_\alpha - \theta)$.

由后面关于折扣定价所带来的销售收益损失 W_L 的定义 (8) 不难对上述结论作出解释: 当成立着条件 $C_\alpha - C \geq W_L$ 时, 它表示非批发成本差超过了销售的收益损失, 这时必须上调价格; 相反, 要保持价格不变, 必须非批发成本差低于销售的收益损失.

1.2 折扣定价策略

对于价格下调的情况, 通常称为折扣定价, α 称为折扣率. 现考虑折扣定价策略问题.

注意到薄利多销的实际情况, 我们可假设 $C_\alpha = C$. 由 (3) 可知, 折扣率 α 满足:

$$1 > \alpha \geq \frac{q}{p} + \left(1 - \frac{q}{p}\right) \frac{\theta}{\theta_\alpha} \quad (5)$$

为方便起见, 我们考虑使上式取等号时的最大折扣率. 此时, 有计算公式:

$$\alpha = \frac{q}{p} + \left(1 - \frac{q}{p}\right) \frac{\theta}{\theta_\alpha} \quad (6)$$

如果选择好一个按标准价 (零售价) p 销售的最小参考销售量 θ (如 $\theta = 1$), 那么, 在消费者的需求量 θ_α 超过 θ 时, 就可以根据公式 (6) 来计算出最大的折扣率, 从而推出新的折扣定价措施.

反之, 在给定一个折扣率 α 的前提下, 也可以计算出消费者的需求量应该达到:

$$\theta_{\alpha} = \frac{p-q}{\alpha p-q} \theta \quad (7)$$

若记 $\delta = \frac{q}{p}$, $\gamma = \frac{\theta}{\theta_{\alpha}}$, 则分别称 δ 与 γ 为价格比与销售量比. 可见公式 (6) 中的折扣率同时依赖于价格

比 δ 和销售量比 γ . 实际上, 在折扣的价格下, 销售商需要多付出销售量: $\theta_{\alpha} - \theta = \frac{(1-\alpha)p}{\alpha p-q} \theta$

因而却造成了销售的收益损失:

$$W_L(p) = (p-q)(\theta_{\alpha} - \theta) = \frac{(1-\alpha)p(p-q)}{\alpha p-q} \theta \quad (8)$$

在商品的购销中, 我们自然还关心的一个重要问题是: 如何选取标准价 p 和折扣率 α , 使得销售的收益损失达到极小? 为了寻求答案, 我们通过研究式 (8) 中的 W_L 随标准价 p 变化时取极值的结果来研究. 事实上, 由于导函数:

$$\frac{dW_L}{dp} = \frac{\alpha p^2 - 2pq + q^2}{(\alpha p - q)^2} \cdot (1-\alpha)\theta(p) + \frac{(1-\alpha)p(p-q)}{\alpha p - q} \cdot \theta'(p)$$

故我们先选择使需求量 $\theta(p)$ 达到极值的价格为标准价格 p_1 : $\theta'(p_1) = 0$ 然后再选择一个折扣率 α 满足 $\alpha p_1^2 - 2p_1q + q^2 = 0$ 从而有 p_1 是 W_L 的驻点.

易知 $\alpha p = (1 + \sqrt{1-\alpha})q$ (另外一个根不合要求, 舍去), 或者 $\delta = \frac{\alpha}{1 + \sqrt{1-\alpha}}$ 故有 $\alpha - \delta =$

$\delta \sqrt{1-\alpha}$ 此时可解出折扣率 α 随价格比 δ 变化的关系为:

$$\alpha = 2\delta - \delta^2 = 1 - (1-\delta)^2 \quad (9)$$

因在一定时间内, 需求量 $\theta(p)$ 的极值点 p_1 经常发生变化, 故 δ 也随之发生变化. 又由于 $\delta < 1$, 故折扣率公式 (9) 对应于 $p > q$ 的情形, 它表示图 1 所示的抛物线的左分支. 又由

$$\left. \frac{d^2 W_L}{dp^2} \right|_{p=p_1} = \frac{2q^2}{(\alpha p_1 - q)^3} \cdot (1-\alpha)^2 \theta(p_1) + \frac{(1-\alpha)p_1(p_1-q)}{\alpha p_1 - q} \cdot \theta''(p_1)$$

知: 如果 $\theta''(p_1) > 0$ 那么 $\theta(p_1)$ 和 $W_L(p_1)$ 都是极小值, 此时 p_1 不是销售商所需要的, 必须考虑给予消费者以最大折扣价率 (9); 如果 $0 > \theta''(p_1) > -\eta$, $\theta(p_1) > 0$ 其中

$$\eta = \frac{2q^2(1-\alpha)\theta(p_1)}{p_1(p_1-q)(\alpha p_1 - q)^2} > 0$$

那么 $\theta(p_1)$ 是极大值, $W_L(p_1)$ 是极小值, 此时 p_1 和 α 都是销售商所需要的; 如果 $\theta''(p_1) < -\eta$, $\theta(p_1) > 0$ 那么 $\theta(p_1)$ 和 $W_L(p_1)$ 都是极大值, 此时 p_1 不是销售商所需要的, 也必须给予消费者以最大折扣价率 (9).

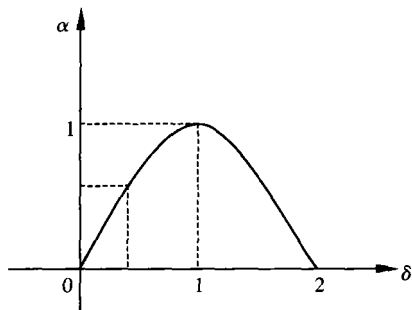


图 1 折扣率与价格比的关系

根据以上的分析, 并且注意到 $\theta''(p_1)$ 表示需求函数 $\theta(p)$ 在 p_1 附近的凸性大小, 我们综合得到以下的折扣定价策略:

存在与商品的销售量无关, 而只与价格比 δ 有关的最大折扣率计算公式 (9);

如果价格 p_1 使需求量达到极大值, 且 $\theta(p)$ 在 p_1 附近的凸性较小, 那么 p_1 和 α 都是销售商可取的标准价和最大折扣率.

上述结论 和 对于商品在其销售过程中制定折扣价格和消费者选购商品都具有重要的指导意义. 对销售商而言, 可随时根据销售的历史记录拟合出需求函数曲线 $\theta(p)$, 通过调整标准零售价格 p_1 和折扣率 α 而带来销售上的效益; 对于消费者而言, 为了节省费用, 可按 (9) 的折扣率去讨价还价.

由于有 $\alpha p = q + \sqrt{1-\alpha}q$ 故它表明折扣价格不仅保本赢利, 而且还有价格比 $\frac{\alpha p}{q} = \frac{\alpha}{1 - \sqrt{1-\alpha}}$. 折扣价格比 $\alpha p/q$ 与折扣率 α 之间的关系如图 2 所示.

2 二次需求函数模型与利润最大价

通常认为,需求函数是一个单调减函数,我们则根据前面的分析提出一个二次需求函数模型,它不再是一个单调减函数.然后,我们再进一步讨论在二次需求函数下利润的变化以及使利润最大的价格.

根据以上分析,在商品的销售中至少可以制定 3 个基本的价格:最低价 p_0 (比如接近于批发价的价格),最高价 p_M (比如新批发商品的价格,政府指导价)和标准价 p_1 (使销售量达到最大的价格),至于折扣价 αp_1 ,可由折扣率计算.实际上,由 3 个基本价格就可以完全确定一个二次需求函数.一般地,有:

$$q < p_0 < p_1 < p_M,$$

注意到还要求 p_1 是 $\theta(p)$ 的极大值点,且需求量满足:当 $p > p_1$ 时,有 $\theta'(p) < 0$ 当 $p < p_1$ 时,有 $\theta'(p) > 0$ 故得到:

$$\theta'(p) = k(p_1 - p) \tag{10}$$

其中 $k > 0$ 是待定系数.在给定 $\theta_0 = \theta(p_0)$, $\theta_M = \theta(p_M)$ 之后,积分 (10) 后便得到:

$$\theta(p) = \theta_0 + \frac{1}{2}k(2p_1 - p_0 - p)(p - p_0) \tag{11}$$

其中 $k = \frac{2(\theta_0 - \theta_M)}{(2p_1 - p_M - p_0)(p_0 - p_M)}$. 式 (11) 就是一个二次需求函数模型.可见,当 $p_1 \rightarrow \frac{p_0 + p_M}{2}$ 时,就有 $\theta(p) \rightarrow \infty$, 故此时的需求量将会增大.

下面讨论在二次需求函数模型下商品销售的利润最大价.将式 (11) 代入 (1),再由 (1) 对价格 p 求导,我们有

$$W'(p) = \theta(p) + (p - q)\theta'(p), W''(p) = k(2p_1 + q - 3p) \tag{12}$$

在 $\theta(p)$ 的极大值点 p_1 处,有

$$W'(p_1) = \theta(p_1) > 0 \tag{13}$$

因此 $W(p)$ 在 p_1 附近是单调增加的,即商品销售的纯利润在最大销售量附近是单调增加的.

又由 $W'(p) = 0$ 得到驻点:

$$p^* = \frac{2}{3}p_1 + \frac{1}{3}q + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{6\theta_0}{k} + 4p_1^2 + q^2 + 3p_0^2 - 2p_1(3p_0 + q)} \tag{14}$$

易验证,在根式里面的式子为正时, p^* 就是使利润最大的价格.

最后,由 $W'(p^*) = 0$ 得 $\theta'(p^*) = -\frac{\theta(p^*)}{p^* - q} < 0$ 再由 (10) 知,必有:

$$p^* > p_1 \tag{15}$$

说明利润最大的价格大于销售量最大的价格.

3 一个实例

由于人们对于健康的日益重视,故对纯净水的饮用消费观念已被广泛接受.目前纯净水的生产销售已成为一个较大的产业,市场需求量也在不断地上升.纯净水的销售服务是分区进行的.为了反映某区域内销售纯净水的实际上发生的不同折扣价格,以及销售量与价格之间的需求函数关系,我们调查了该区域 3 个水站的有关数据.

首先,我们考虑折扣定价问题.根据数据,五加仑规格的桶装水的实际价格有 5 个,依次为:最高价 10 元/桶,优惠价:9.1 元/桶、8.0 元/桶、7.0 元/桶,最低价:6.5 元/桶.每个水站的价格最多是 4 个.设批发成本价为 $q = 6.0$ 元/桶,按前面的分析和公式 (9),我们有:

棕树营站:取 $p_1 = 10$ 就有 $\alpha = 1 - (1 - 6/10)^2 = 0.84$ 最大折扣价为 $\alpha p_1 = 8.4$

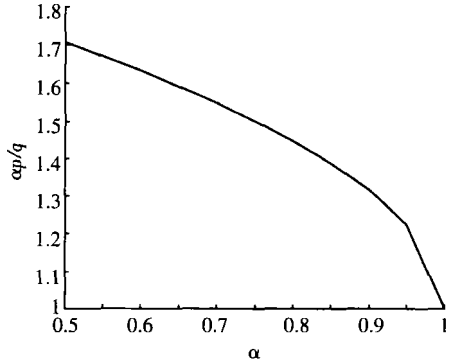


图 2 折扣价格比 $\alpha p/q$ 与折扣率 α 的关系

高新站: 取 $p_1 = 8.0$ 就有 $\alpha = 1 - (1 - 6/8)^2 = 0.9375$ 最大折扣价为 $\alpha p_1 = 7.5 > 7.0$ 说明实际上的优惠折扣价 7.0 较低.

春晖站: 取 $p_1 = 9.1$ 有 $\alpha = 1 - (1 - 6/9.1)^2 = 0.8842$ 最大折扣价为 $\alpha p_1 = 8.046$

其次, 我们考虑二次需求函数模型. 可以认为, 经过一定时间的供求平衡, 在一个区域内纯净水的销售量 (或需求量) 基本上是稳定的, 因此, 在供求关系中, 随机因素不再起主要的作用. 我们现在用二次曲线来拟合每周的平均需求函数. 具体做法是: 先将每周的需求量拟合成二次函数, 然后再将它们平均. 以 p 表示价格, θ 表示需求量, 通过 Matlab 程序计算得到的结果为:

棕树营站: $\theta = 18.6p^2 - 378.5p + 1834.6$ 实为二次函数的一部分, 如图 3 所示; 销售量最小的价格是: 10.17 元 / 桶, 它不可选为标准价格.

高新站: $\theta = -64.3p^2 + 1077.5p - 4321.2$ 如图 3 所示; 销售量最大的价格是: 8.38 元 / 桶, 它可选为标准价格, 此时最大折扣价为 7.7 元 / 桶. 可看出高新站的效益最好.

春晖站: $\theta = 41.2p^2 - 777.9p + 3686.9$ 如图 3 所示; 销售量最小的价格 9.44 元 / 桶, 它不可选为标准价格, 此时应给予消费者折扣价: 8.18 元 / 桶.

比较 3 个水站, 可以看出, 在折扣价大约为 8.0 时, 易被消费者接受. 再由二次需求函数模型的结果得知, 当取 $p_1 \approx \frac{10 + 6.5}{2} = 8.25$ 时, 需求量都会达到最大.

以上的结果与实际情况基本上符合, 说明我们所得到的结果是可靠的.

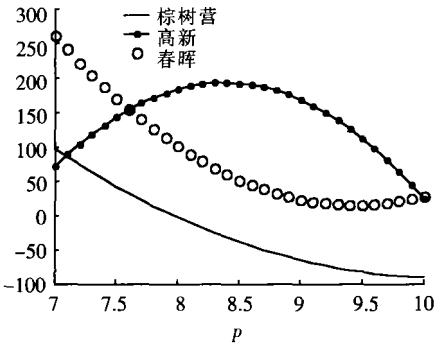


图 3 不同水站的纯净水的二次需求函数

[参考文献] (References)

[1] 姜启源. 数学模型 [M]. 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2003
JIANG Qiyuan Mathematical Model [M]. 3rd ed. Beijing: Higher-Education Press, 2003. (in Chinese)
[2] 韩晓军, 陈秋双. 供应链中的买卖协调及数量折扣定价模型 [J]. 天津纺织工学院学报, 2000, 19(6): 40-42
HAN Xiaojun, CHEN Qiushuang. Buyer-seller coordination and quantity discount pricing model in the supply-chain [J]. Journal of Tianjin Institute of Textile Science and Technology, 2000, 19(6): 40-42. (in Chinese)
[3] 马祖军. 供应链中的供需协调及数量折扣定价模型 [J]. 西南交通大学学报: 自然科学版, 2004, 39(2): 185-188
MA Zujun. Vendor-purchaser coordination and quantity discount pricing model in supply chain [J]. Journal of South West Jiaotong University: Nature Science, 2004, 39(2): 185-188. (in Chinese)
[4] 李成标. 经济批量下带有数量折扣的定价模型 [J]. 江汉石油学院学报, 1997, 19(1): 105-107.
LI Chengbiao. A quantity discount pricing model under the EOQ environment [J]. Journal of Jianghan Petroleum Institute, 1997, 19(1): 105-107. (in Chinese)

[责任编辑: 刘 健]