

非结构网格特定条件下热传导的数值计算

黄庆宏¹, 张 敏², 刘 晶²

(1. 南京师范大学 动力工程学院, 江苏 南京 210097)

2. 南京理工大学 动力工程学院, 江苏 南京 210094)

[摘要] 用基元有限容积方法, 在非结构化网格中离散和求解热传导方程, 二阶迎风格式和全程隐式迭代求解稳态导热问题. 在验证求解方法的算例中, 结构化和非结构化网格同时采用, 并且提供了 3 种非结构化网格(三角形网格、四边形网格和混合网格)的计算结果, 同时用精确解与得到的数值解相比较. 虽然两种网格形式都能得到满意的精确度结果, 但对于非正交的非结构化网格, 二次扩散项对提高精度是十分重要的.

[关键词] 非结构网格, 结构网格, 热传导

[中图分类号] TK 124 [文献标识码] A [文章编号] 1672-1292(2006)03-0026-04

Conduction Heat Transfer Calculations under Special Conditions with Unstructured Grids

HUANG Qinghong¹, ZHANG Min², LU Jing²

(1. School of Power Engineering, Nanjing Normal University, Nanjing 210097, China)

2. School of Power Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

Abstract Conduction heat transfer problems are solved with a cell-based finite volume method (FVM). The second upwind scheme and whole processing implicit iteration way are used. The solutions are obtained by using structured grids and unstructured grids that include three kinds of meshes (triangular, quadrilateral and hybrid). Some results are compared with the exact solutions. Although both structured and unstructured meshes produce accurate solutions, structured grid solutions are more accurate than the triangular unstructured grid and are the same accurate as similar quadrilateral unstructured grid in rectangular region.

Key words structured grids/meshes, unstructured grids/meshes, conduction heat transfer

在过去三四十年中, 对复杂扩散问题数值求解的研究有了长足的进步和发展. 其中有限容积法和有限元法被研究者广泛采用. 起初这两种方法主要应用在正交结构化网格, 如笛卡尔直角坐标、柱坐标和极坐标系中^[1]. 后来它们被扩展应用到复杂几何形状的适体网格之中^[2]. 现在这些数值计算方法在非结构化网格中得到很好的应用^[3-5].

非结构化网格是近年来被广泛应用于数值计算的一种网格结构. 它不但对几何边界具有很强的适应性, 而且对局部网格的分解和组合, 以及程序的扩展都具有较好的灵活性和简练性. 本文的目的就是在结构化和非结构化网格中, 对标量扩散方程的数值解和精确解进行比较分析, 以展现这些方法的优越之处.

1 控制方程和边界条件

稳态的扩散方程或导热方程, 对一个标量物理变量 ϕ 可写成:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + S_\phi = 0 \quad (1)$$

式中, S_ϕ 是单位体积中的净源项, Γ 是对应于变量 ϕ 的扩散系数.

收稿日期: 2005-11-20

作者简介: 黄庆宏(1957-), 副教授, 主要从事火力发电与数字仿真等方面的教学与研究. E-mail: huangqinghong@njnu.edu.cn

2 离散方程

对在笛卡尔、圆柱和适体坐标系中的结构化网格离散方程, 不再赘述. 在此仅对非结构化网格的离散方程进行讨论. 控制方程 (1) 可以写成:

$$D + S = 0 \quad (2)$$

在一个控制容积 P 中, 积分上式有,

$$\sum_{i=1}^{nb} D_i + S_P \Delta V_P = 0 \quad (3)$$

式中, D_i 是扩散项, 可以表示为基本扩散项 $D_{b,i}$ 和二次扩散项 $D_{s,i}$ 之和:

$$D_i = D_{b,i} + D_{s,i} \quad (4)$$

它们的物理意义分别是某一交界面上的法向扩散项和切向扩散项,

$$D_{b,i} = \Gamma_i (\nabla \phi)_{ave,i} \cdot \hat{e}_{s,i} \frac{\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{A}_i}{\mathbf{A}_i \cdot \hat{e}_{s,i}} \quad (5)$$

$$D_{s,i} = \frac{\Gamma_i}{ds_i} \left[(\nabla \phi)_{ave,i} \cdot \mathbf{A}_i - (\nabla \phi)_{ave,i} \cdot \hat{e}_{s,i} \frac{\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{A}_i}{\mathbf{A}_i \cdot \hat{e}_{s,i}} \right] ds_i \quad (6)$$

因此对于控制元 P , 离散方程可写成:

$$\sum_{i=1}^{nb} B_i (\phi_i - \phi_P) + \sum_{i=1}^{nb} D_{s,i} + S_P \Delta V_P = 0 \quad (7)$$

最后简化 (7) 式得:

$$a_P \phi_P = \sum_{i=1}^{nb} a_i \phi_i + b, \quad a_i = B_i = \frac{\Gamma_i}{ds_i} \frac{\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{A}_i}{\mathbf{A}_i \cdot \hat{e}_{s,i}}, \quad b = \sum_{i=1}^{nb} D_{s,i} + S_P \Delta V_P, \quad a_P = \sum_{i=1}^{nb} B_i \quad (8)$$

关于 $\frac{\Gamma_i}{ds_i}$ 的计算, 见文献 [5]. 以下讨论 $(\nabla \phi)_{ave,i}$ 的计算方法. 对于区域内部的单元和边界上的单元, $(\nabla \phi)_{ave,i}$ 的计算方法是不同的, 此处分两部分来阐述. 如图 1 所示的内部单元, 界面 i 上 $(\nabla \phi)_{ave,i}$ 的计算式为:

$$(\nabla \phi)_{ave,i} = \frac{(\nabla \phi)_P + (\nabla \phi)_E}{2} \quad (9)$$

式中, $(\nabla \phi)_P$ 和 $(\nabla \phi)_E$ 为单元的梯度. 对单元 P , 单元的梯度可由离散定理得到:

$$(\nabla \phi)_P = \frac{1}{\Delta V_P} \sum_{k=1}^{nf} \phi_k \mathbf{A}_i \quad (10)$$

式中, nf 为单元 P 的面数. ϕ_i 是面 i 上 ϕ 的平均值, 界面上 ϕ 的平均值的计算采用了重构梯度 (Reconstruction Gradient) 形成的高阶插值, 即采用了一种与单元形状无关的梯度 $(\nabla \phi)_{\epsilon,P}$, 从而把界面插值写成为:

$$\phi_{i,P} = \phi_P + (\nabla \phi)_{\epsilon,P} \cdot d\mathbf{r}_i \quad (11)$$

其中 $d\mathbf{r}_i$ 为从上游单元中心到界面 i 中心的距离矢量, 重构梯度计算式如下,

$$(\nabla \phi)_{\epsilon,P} = \frac{\alpha}{\Delta V_P} \sum_{k=1}^{nf} \phi_k \mathbf{A}_i \quad (12)$$

界面值 ϕ_i 由该单元及相邻单元节点的 ϕ 值取平均值而得, ΔV_P 为该单元的体积, α 为保证重构不至于引起局部极值的一个系数 ($0 \leq \alpha \leq 1$). 以 P 单元为例, 确定 α 值的原则为: 由式 $\phi_{i,P} = \phi_P + (\nabla \phi)_{\epsilon,P} \cdot d\mathbf{r}_i$ 计算得出 P 单元 3 个界面上的 ϕ 值, 其应处于 P 点及 3 个邻点中 ϕ 值的极大值与极小值之间. 对界面 i 有:

$$\alpha_i = \begin{cases} \min \left[1, \frac{\phi_{i,P}^{\max} - \phi_P}{\phi_{i,P} - \phi_P} \right] & \phi_{i,P} > \phi_P \\ \min \left[1, \frac{\phi_{i,P}^{\min} - \phi_P}{\phi_{i,P} - \phi_P} \right] & \phi_{i,P} < \phi_P \\ 1 & \phi_{i,P} = \phi_P \end{cases} \quad (13)$$

$$\phi_{i,P}^{\max} = \max(\phi_P, \phi_E), \quad \phi_{i,P}^{\min} = \min(\phi_P, \phi_E) \quad (14)$$

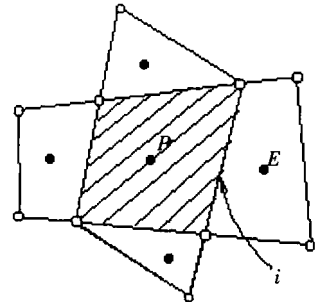


图 1 P 和 E 之间的界面 i

对单元 P 有,

$$\alpha_P = \min (\text{all} \alpha_i)$$

(15)

图 2 给出了典型的边界单元, 界面 1 与物理边界 B 重合. 对于这种情况有:

$$(\nabla \phi)_{\text{ave } 1} = (\nabla \phi)_P$$

(16)

对于单元的温度梯度 $(\nabla \phi)_P$ 可用下式计算:

$$(\nabla \phi)_P = \frac{1}{\Delta V_P} \sum_{k=1}^3 \phi_k A_k$$

(17)

界面上的平均 ϕ 值由下式计算:

$$\phi_1 = \phi_B, \quad \phi_2 = \frac{\phi_{iP} + \phi_{iN}}{2}, \quad \phi_3 = \frac{\phi_{iP} + \phi_{iS}}{2}$$

(18)

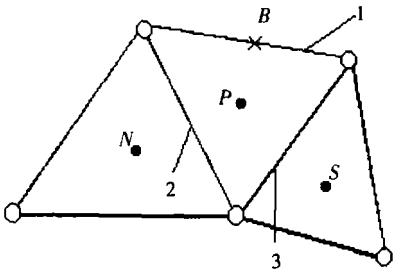


图 2 边界单元

3 算例

3.1 复合边界条件下的热传导

图 3 给出了这个问题的几何描述. 顶边和左边界为绝热, 底边温度 T_1 已知, 右边界为第三类边界条件. 常物性、无内热源的控制方程及边界条件如下式:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) = 0$$

(19)

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} = 0 \quad \left(\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{h}{k} (T - T_\infty) \right)_{x=a} = 0$$

(20)

$$T_{y=0} = T_1, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=b} = 0 \quad T_1 = 1, \quad T_\infty = 0 \quad k = 1, \quad h = 3$$

(21)

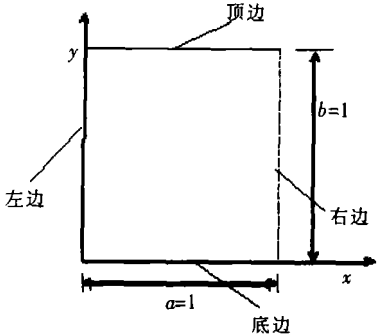


图 3 几何形状

此问题的精确解^[6]是:

$$\theta(x, y) = \frac{T(x, y) - T_\infty}{T_1 - T_\infty} = H \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a[\lambda_n^2 + H^2] + H} \frac{\cosh[\lambda_n(b-y)] \cos[\lambda_n x]}{\cosh[\lambda_n b] \cos[\lambda_n a]}$$

(22)

其中, λ_n 是超越方程 (27) 的解:

$$\lambda_n \tan(\lambda_n a) = H \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

(23)

式中, $H = h/k = 3$ 并取超越方程的前 15 个根来计算精确解. 在图 4 中, 给出 3 种计算网格, 它们分别是非结构化的四边形网格、三角形网格和混合网格. 图 5 为温度分布, 这里采用了 400 个控制元. 图中实线代表精确解, 虚线表示数值解. 从图中显然能看出四边形网格有更高的精确度, 而三角形网格有较大的误差. 这是因为对于求解域, 四边形是正交网格, 它的二次扩散项为零; 而三角形网格是非正交网格, 需要计算二次扩散项, 并且这种计算存在误差. 如果用式 (28) 来计算平均误差, 并把结果列入表 1 会证明以上观察结果:

表 1 算例的平均误差 %

算例	四边形网格	三角形网格	混合网格
算例 1	0.09	0.58	0.58
算例 2	0.18	3.10	4.40

$$\text{Error} = E = \frac{1}{N_{\max}} \sum_{i=1}^{N_{\max}} \frac{|\theta_{\text{num}} - \theta_{\text{exact}}|_i}{\theta_{\text{max}} - \theta_{\text{min}}} \times 100\%$$

(24)

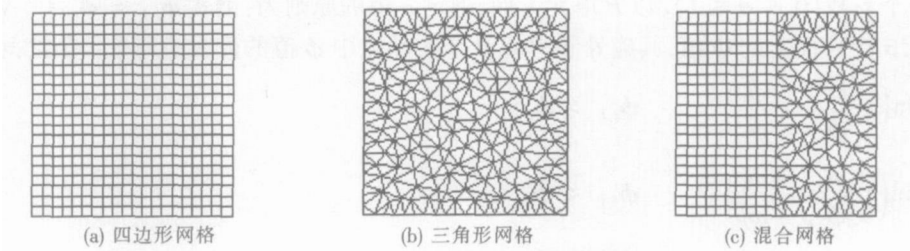
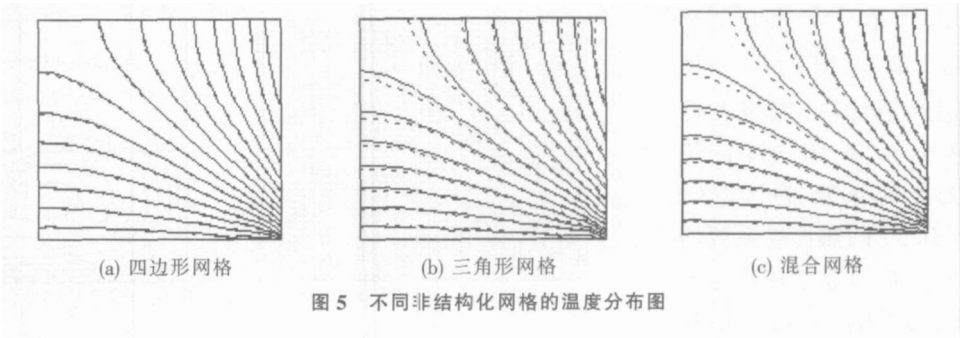


图 4 3 种不同的非结构化网格示意图



3.2 特殊边界条件的传热

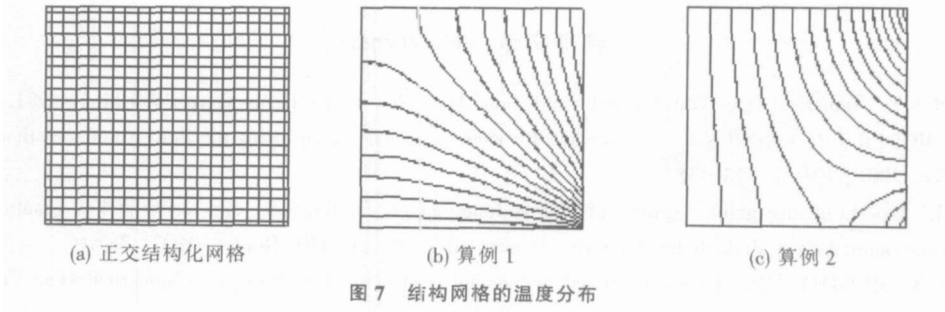
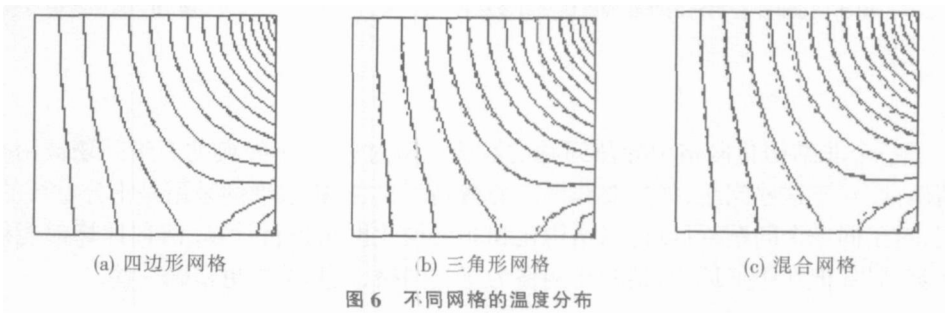
问题如 3 所表示, 右边界的温度 T_2 是 y 的函数, 左边界为定温 T_1 , 上边界和下边界为绝热. 没有内热源, 物性为常数. 控制方程与式 (22) 相同, 各参数选择如下:

$$T_{x=0} = T_1, \quad T_{x=a} = T_2, \quad \left[\frac{\partial T}{\partial y} \right]_{y=0, y=b} = 0 \quad T_1 = 0 \quad T_2 = Ay = 5y \tag{25}$$

这个问题的精确解^[7] 是:

$$T(x, y) = \frac{Aby}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2Ab[\cos(n\pi) - 1]}{n^2 \pi^2} \frac{\sinh[n\pi x/b] \cos[n\pi y/b]}{\sinh[an\pi/b]} \tag{26}$$

图 6 给出了 400 个控制元的温度分布图. 误差分析同上算例, 误差结果如表 1 所示. 可以得到与第一个问题相同的结论. 图 7 为当控制元为 400 个的结构化网格温度分布图. 比较结构化网格和非结构化网格的温度分布, 可以看出, 在相同数量的控制元下, 在矩形域中, 结构化网格得到的结果更为精确.



3.3 不连续区域的热传导

图 3 所示的单位边长的区域中, 四边保持恒定温度 T_1 , 控制方程如下:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + S = 0 \tag{27}$$

其中,

$$k = \begin{cases} 3.0 + T & x > 0.5, y > 0.5 \\ 1.0 & \text{其他} \end{cases} \tag{28}$$
$$S = \begin{cases} 200 - 4.0 \times 10^{-2} T^3 & y < 0.5 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

图 8 为 40×40 的正交网格及其温度分布. 可以看出, 热传导系数大的区域 ($x > 0.5$ 且 $y > 0.5$), 温度

梯度较小. 将 40×40 正交网格的计算结果作为参考解, 使用 1 600 个控制元的非结构网格计算, 网格及计算结果如图 9 所示. 图 10 为不同热传导系数下的温度分布. 将区域 ($x > 0.5$ 且 $y > 0.5$) 的热传导系数增加到 $k = 1000 + T$, 以显示热传导系数对导热问题的影响, 并可以得到导热系数大的区域温度梯度小的结论.

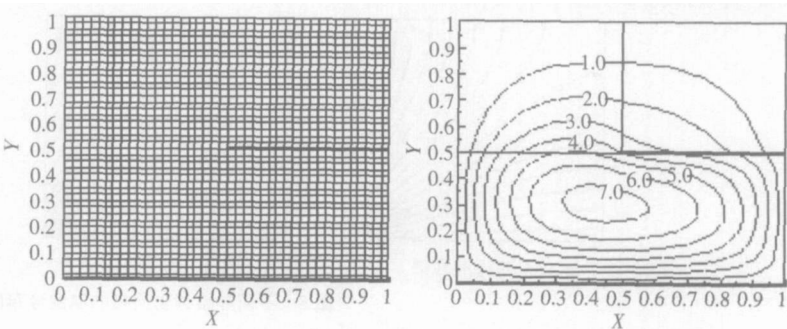


图 8 40×40 个控制元的正交结构化网格及其温度分布

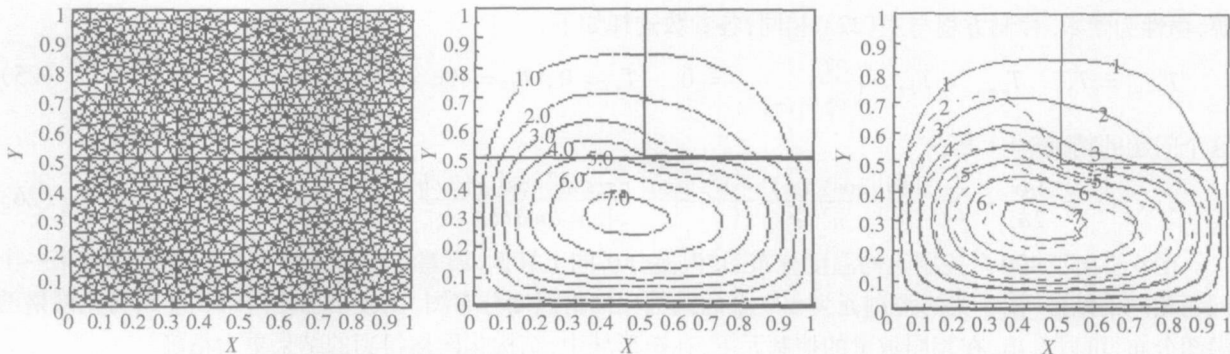


图 9 1600 个控制元的非结构网格及温度分布

图 10 不同热传导系数的温度分布

4 结论

本文给出了一个非结构化网格中导热问题的数值求解过程. 3 个经典的二维问题被用来检验此过程的正确性和精确性. 对于这些问题, 如果要获得高的精确度, 二次扩散项的采用是十分重要的. 从得出的结果还可以看到, 对于同一个问题, 可以运用结构化和非结构化网格进行计算. 两种计算都能得与精确解基本相一致的计算结果. 但在矩形域中, 结构化网格为正交网格, 故其结果更精确一些.

[参考文献] (References)

[1] PATANKAR S V. Numerical Heat Transfer and Fluid Flow [M]. New York : Hemisphere Publishing , 1981.

[2] CHAI J C, MODER J P, KARKIK C. A procedure for view factor calculation using the finite-volume method [J]. Numerical Heat Transfer, 2001, 40B (1): 23-35

[3] BARTH T J. Aspects of unstructured grids and finite-volume solvers for the euler and navier-stokes equations [R]. Special Course on Unstructured Grid Methods for Advection Dominated Flows AGARD Report 1992, 787.

[4] MATHUR S R, MURTHY J Y. A pressure-based method for unstructured meshes [J]. Numerical Heat Transfer 1997, 31 (2): 195-215.

[5] ZHANG M. Modeling of radiative heat transfer and diffusion processes using unstructured grid [D]. Tennessee Technological University, 2000

[6] 奥齐斯克 M N. 热传导 [M]. 俞昌铭 译. 北京: 高等教育出版社, 1984

OZISK, M N. Heat Conduction [M]. Yu Changning Translate Beijing High Education Press, 1984 (in Chinese)

[7] 南京工学院数学教研组. 数学物理方程和特殊函数 [M]. 北京: 人民教育出版社, 1982

Nanjing Engineering College Mathematics Teaching and Research Group. Equations of Mathematical Physics and Special Functions [M]. Beijing People Education Press, 1982 (in Chinese)

[责任编辑: 刘 健]