基于微粒群算法的 l_p 数据拟合及其应用

徐守江, 朱庆保

(南京师范大学 数学与计算机科学学院, 江苏 南京 210097)

[摘要] 在动态测试数据处理中, 常常要进行稳健回归分析和最小最大值回归分析, 讨论了微粒群算法及其在 l_p 数据拟合中的应用. 微粒群算法通过多个粒子在解空间中根据自身的信息和群体的信息不断调整自己的位置进行寻优, 在寻优过程中粒子间不断地进行信息交流, 使得算法收敛速度很快, 特别适合用于函数优化, 从而能够在 l_p 数据拟合中得到很好的应用. 实例计算结果表明, 该方法能够更准确地进行 l_p 数据拟合, 理论上可以以任意逼近真实值, 从而减小了计算误差, 并且有更快的收敛速度, 可以快速收敛到全局最优解, 因而具有一定的理论意义和现实意义.

[关键词] 计量学, 微粒群算法, l_p 数据拟合, 数据处理

[中图分类号] TB9　[文献标识码] A　[文章编号] 1672-1292(2006)03-0062-04

Particle Swarm Optimization Based on l_p Data Fitting and Its Applications

XU Shoujiang, ZHU Qingbao

(School of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, Nanjing 210097, China)

Abstract Robust regression analysis and minimal residual error analysis are two aspects of data processing of dynamic measurement. The Particle Swarm Optimization (PSO) algorithm and its application on l_p data fitting are described. In PSO algorithm, every particle adjusts its position to find good results through its own information and particle swarm. Every particle communicates with the others in every iteration, and PSO algorithm converges quickly. PSO algorithm has some advantages in function optimization and can be applied to l_p Data Fitting. At last, examples and related results prove its validity. This method can make l_p Data Fitting very precise, and decrease the calculation error, meanwhile global optimum solution can be obtained more rapidly than genetic algorithm. This method has the theoretical and practical significances.

Key words metrology, l_p data fitting, PSO algorithm, data processing

0 引言

在数据拟合中, 为了求得回归参数的大小, 最常用的是采用最小二乘法. 这是因为回归模型在符合 Gauss-Markov假定的条件下, 采用最小二乘法估计其回归参数具有良好的统计性质. 然而实际的测试数据千差万别, 而且对测试数据进行数据拟合的目的也不同, 从而使得采用最小二乘法进行数据拟合的结果往往达不到预期的要求. 例如, 由于偶尔存在的粗大误差而出现了反常数据, 或数据的概率分布偏离正态分布, 此时采用最小二乘法的回归分析结果就将失去其良好的统计特性, 对于这种情况的一种解决办法就是采用具有稳健性能的准则函数. 这是因为二次准则函数对较大的残差产生相当大的权值, 也就是该准则函数对偶尔发生的大测量误差很敏感. 如果要在不剔除含粗大误差数据的情况下亦能得到满意的结果, 一种常用的准则函数就是采用 l_1 范数准则, 对测试数据进行 l_1 数据拟合[1-3]. 另外, 在测试数据处理中, 有时需要求得测试数据的最小残差包容区域, 此时要求拟合残差的最大值为最小, 这就是动态测试数据的最小最大残差回归分析. 其所采用的准则函数为 l_∞ 范数准则. 因此, l_p 数据拟合是现代回归分析中一个非常重要的准组成部分.

收稿日期: 2006-03-27.

作者简介: 徐守江 (1983-), 硕士研究生, 主要从事智能技术和智能控制的学习与研究. E-mail: xsj040902@163.com

通讯联系人: 朱庆保 (1955-), 教授, 硕士生导师, 主要从事智能技术和智能控制等方面的教学与研究. E-mail: zhuqingbao@njnu.edu.cn

目前已经出现了一些针对 l_1 和 l_∞ 数据拟合的算法, 如用于求解 l_1 数据拟合的线性规划法、等价权法、投影 Lagrange法等[1-3], 用于求解 l_∞ 数据拟合的上升算法、线性规划法、搜索算法、投影 Lagrange法, 以及用于 l_p 数据拟合的遗传算法[4] (Genetic Algorithm, 简称 GA) 等. 上述算法各有特点, 但由于算法的局部收敛性, 往往只能得到较优结果. 因此, 研究一种用于测试数据 l_p 数据拟合的通用算法, 显得十分必要. 微粒群优化算法 (PSO)[5,6] 是一类较新的优化算法, 具有收敛速度快、求解精度高、可调参数少、简单直观等优点, 已广泛应用于许多领域, 在连续函数优化方面有很大的优势. 本文提出了一种惯性权重线性递减的微粒群 l_p 数据拟合算法, 实例计算结果表明, 该方法能够更准确地进行 l_p 数据拟合, 可以快速收敛到全局最优解, 并且理论上可以以任意精度逼近真实值, 从而减小了计算误差, 具有一定的理论意义和现实意义.

1 问题的描述

不失一般性, 假设要拟合的动态测试数据对为 $(x_i, y_i)(i = 1, 2, \cdots, N)$, 拟合函数为 $\boldsymbol{f}(x, \Theta)$, 它是 Θ 的非线形函数, $\Theta = [\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n]^{\mathrm{T}}$ 为待求的参数向量. 定义残差向量 $\boldsymbol{e} = [e_1, e_2, \cdots, e_N]$, 其中, $e_i = y_i - \boldsymbol{f}(x_i, \Theta)$, $(i = 1, 2, \cdots, N)$, 通常 $N > n$. 要求选择 Θ 使得拟合函数 $\boldsymbol{f}(x, \Theta)$ 在某种准则函数意义下尽可能好地拟合数据.

定义准则函数为残差向量 $\boldsymbol{e}$ 的 l_p 范数, 即

$$\|\boldsymbol{e}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{N} |e_i|^p\right)^{1/p} \qquad p = 1, 2, \cdots \tag{1}$$

极小化式 (1) 求得参数 Θ, 就得到所谓的 l_p 数据拟合问题. 为了解决问题的方便, 极小化式 (1) 等价于极小化如下准则函数

$$V(\Theta) = \sum_{i=1}^{N} |e_i|^p \qquad p = 1, 2, \cdots \tag{2}$$

2 微粒群优化算法的基本原理

粒子群优化算法是由美国的 KENNEDY 和 EBERHAR 在 1995年提出的. PSO 优化算法与其它进化算法相类似, 也是将寻优的参数组合成群体, 通过对环境的适应度来将群体中的个体向好的区域移动. 与其它进化算法不同, 在描述个体时, 将其看成是 D 维寻优搜索空间的一个没有体积的微粒 (点), 结合微粒的历史最佳位置和群体历史最佳位置信息, 以一定的速度向目标值逼近. 第 i 个微粒可以表示成 D 维向量. 粒子通过不断调整自己的位置 X 来搜索新解. 每个粒子都能记住自己搜索到的最好解, 记作 P_{id}, 以及整个粒子群经历过的最好的位置, 即目前搜索到的最优解, 记作 P_{gd}. 每个粒子都有一个速度, 记作 V:

$$V' = \omega V_{id} + \eta_1 \mathrm{rand}()(P_{id} - X_{id}) + \eta_2 \mathrm{rand}()(P_{gd} - X_{id}) \tag{3}$$

式中, V_{id} 表示第 i 个粒子在第 d 维上的速度; ω 为惯性权重; η_1, η_2 为调节 P_{id} 和 P_{gd} 相对重要性的参数; rand() 为随机数生成函数; V' 表示粒子按照式 (1) 更新后的下一个时刻的速度. 这样, 可以得到粒子移动的下一个位置 X':

$$X' = X_{id} + V_{id} \tag{4}$$

从式 (1)、(2) 可以看出, 粒子的移动方向由 3部分决定, 自己原有的速度 V_{id}、粒子当前位置与自己最佳经历的距离 $(P_{id} - X_{id})$ 和群体最佳经历的距离 $(P_{gd} - X_{id})$, 并分别由权重系数 ω, η_1 和 η_2 决定其相对重要性.

3 微粒群算法在 l_p 数据拟合中的应用及实例分析

3.1 微粒群算法在 l_p 数据拟合中的应用

本文采用惯性权重 ω 线性减少的微粒群算法进行数据拟合, 具体步骤如下:

Step 1 根据测试数据给出 $\Theta = [\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n]^{\mathrm{T}}$ 的解域范围, 这可以根据经验或通过传统算法来给出;

Step 2 设置有关参数, 如种群规模 m、惯性权重 ω、加速度常数 η_1 和 η_2、迭代终止条件;

Step 3 初始化群体中的微粒, 包括微粒的初始位置 X 和初始速度 V;

Step 4　按照式(2)评价各微粒的适应度函数值 $V(\Theta)$;

Step 5　对每个微粒,将其适应度值与历史的最好位置 P_{best} 相比较,如果当前适应度值更优,则用当前适应度值更新 P_{best};

Step 6　将每个微粒的适应度值与群体经历过的历史最佳位置 g_{best} 相比较,如果当前群体中最好的适应度值较好,则将其置为新的 g_{best},同时记录其索引号;

Step 7　根据式(3)、(4)更新各微粒的速度和位置;

Step 8　计算个微粒的新的适应度函数值 $V(\Theta)$;

Step 9　如果终止条件也满足则退出,否则转到 Step5,继续下一次循环.

3.2　应用实例

为了便于比较,采用文献[4]给出实例来考察算法的有效性. 根据经验[6],微粒群算法可调参数具体设置如下:微粒数 $m = 100$, ω初始值为 0.9, ω随着迭代次数增加线性减少到 0.4,即 $\omega = 0.9 -$ 迭代次数 $\times 0.5/$最大迭代次数, $\eta_1 = \eta_2 = 2.0$,最大迭代次数为 200.

例 1　对某变压器油的粘度 y(°E)与味 x(℃)之间的关系,可用函数 $y = ax^b$ 来加以表示,所获得的测试数据如表 1所示. 根据实际情况,对测试数据进行 l_1 数据拟合比较合适. 给出 $\Theta = [a, b]^T$ 的大致范围为 $[16.0, 20.0] \times [-1.0, 0.0]$. 利用上述微粒群算法连续拟合 10次,目标函数值均为: 0.855 365,比文献[4]中的 0.855 399好. 所以本文算法的结果更为可靠和准确. 最好目标函数对应的最优 $\Theta^* = [a, b]^T = [17.672\,1, -0.612\,588]^T$.

表 1　某变压器油的测试数据

i	x_i/℃	y_i/°E	i	x_i/℃	y_i/°E
1	10	4.24	9	50	1.60
2	15	3.81	10	55	1.50
3	20	2.92	11	60	1.43
4	25	2.52	12	65	1.37
5	30	2.20	13	70	1.32
6	35	2.00	14	75	1.29
7	40	1.81	15	80	1.25
8	45	1.70			

与文献[4]中的 GA的收敛性比较如图 1、2所示. 图 1为 GA的数据拟合收敛曲线,图 2为微粒群算法的数据拟合收敛曲线. 从图 1、图 2容易看出本文算法收敛速度较快,收敛特性较好.

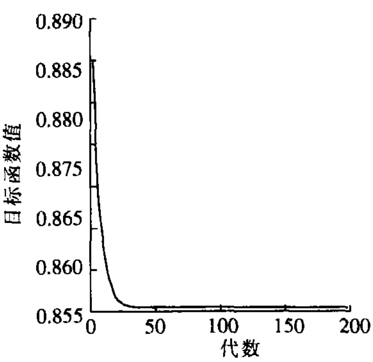

图 1　例 1的遗传算法的数据拟合收敛曲线

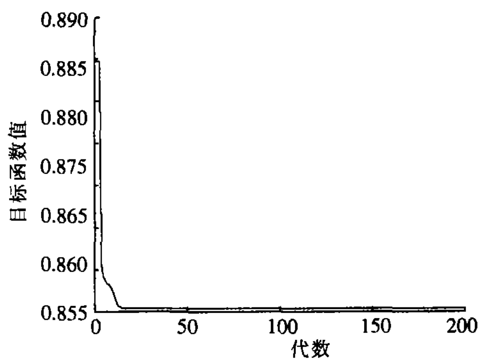

图 2　例 1的微粒群算法的数据拟合收敛曲线

例 2　按最小最大值准则来拟合模型,其所得出的残差包容区域是最小的,从此意义上说最小最大值拟合准则是最佳的. 表 2给出了某零件的圆度测试数据,评定圆度误差的回归模型为 $y = \beta_0 + \beta_1 \cos\alpha + \beta_2 \sin\alpha$. 显然 $\Theta = [\beta_0, \beta_1, \beta_2]^T$,给出其大致范围 $[-2.0, 1.0] \times [1.0, 3.0] \times [-3.0, -1.0]$. 利用微粒群算法对测试数据进行 l_2, l_{80}, l_∞ 数据拟合,连续运行 10次计算结果非常接近,对每个拟合结果随机选择一个,如下所示:

表 2　圆度测试数据

k	a_k/°	y_k/μm	k	a_k/°	y_k/μm
1	0	3.0	13	180	−1.0
2	15	2.0	14	195	−1.0
3	30	3.0	15	210	2.0
4	45	−0.8	16	225	1.0
5	60	−2.0	17	240	2.0
6	75	−2.5	18	255	1.0
7	90	−5.0	19	270	0.0
8	105	−3.8	20	285	0.5
9	120	−2.0	21	300	0.0
10	135	−2.0	22	315	0.3
11	150	−1.0	23	330	1.0
12	165	−4.2	24	345	2.0

l_2: $y = -0.312\,5 + 1.253\,77\cos\alpha - 1.829\,81\sin\alpha$,圆度误差为: 5.999 3 μm.

l_{80}: $y = -0.154\,836 + 1.829\,22\cos\alpha - 2.186$

76sinα, 圆度误差为: 5.322 47 μm.

l_∞: $y = -0.156\,733 + 1.839\,75\cos\alpha - 2.186\,53\sin\alpha$, 圆度误差为: 5.313 47 μm.

与文献[4]进行比较, l_2, l_{80} 数据拟合结果与文献[4]给出的拟合结果相当, 都达到最优解. 文献[4]中给出的 l_∞ 数据拟合得到的圆度误差为 5.313 52, 本文的 l_∞ 连续 10次数据拟合得到的圆度误差均为 5.313 47, 比文献[4]中给出的结果较优. 图 3、图 4给出了关于 l_∞ 数据拟合微粒群算法与 GA的收敛性比较示意图, 容易看出本文算法收敛速度明显优于 GA.

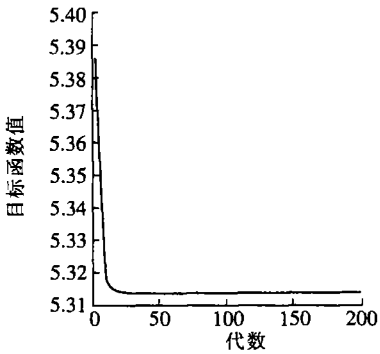

图 3　例 2 的遗传算法的数据拟合收敛曲线

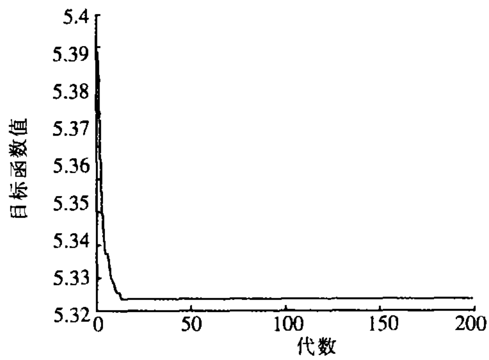

图 4　例 2 的微粒群算法的数据拟合收敛曲线

应用实例表明, 用 PSO 算法进行数据拟合, 具有更快的收敛速度, 并且拟合结果优于 GA 得到的结果.

4　结论

本文首次将微粒群算法应用到 l_p 数据拟合中, 由于微粒群算法收敛速度快, 求解精度高, 在 l_p 数据拟合的应用中, 可以快速收敛到全局最优解, 并且理论上可以以任意逼近真实值, 从而减小了计算误差. 从本文给出的实例中可以看出, 微粒群算法在 l_p 数据拟合中的求解结果和精度都优于遗传算法, 原因在于遗传算法在早期会停滞, 而微粒群算法则会迅速收敛到最优解区域. 在遗传算法的应用中, 涉及到种群数量及规模, 交叉、变异、选择等算子, 其直观没有微粒群算法容易实现, 并且对群体的操作没有微粒群算法简单. 理论上表明, 本文的算法对数据拟合具有一定程度的普遍意义.

[参考文献] (References)

[1] MURRAY W, OVERTON M L. A projected Lagrangian algorithm for nonlinear l_1 optimization[J]. SIAM J Stat Comp, 1981 (2): 207-224.

[2] 田社平, 丁国清, 颜德田. 一种用于线性参数的 l_1 数据拟合方法[J]. 自动化仪表, 2001, 22(12): 9-14.
TIAN Sheping, DING Guoqing, YAN Detian. The l_1 data fitting: a new method for linear parameters[J]. Process Automation Instrumentation, 2001, 22(12): 9-14. (in Chinese)

[3] 田社平, 颜德田, 丁国清. 一种用于非线性参数的 l_1 数据拟合方法[J]. 自动化仪表, 2003, 23(1): 11-14.
TIAN Sheping, YAN Detian, DING Guoqing. The l_1 data fitting: a new method for nonlinear parameters[J]. Process Automation Instrumentation, 2003, 23(1): 11-14. (in Chinese)

[4] 田社平, 韦红雨, 颜德田. 基于遗传算法的 l_p 数据拟合及其应用[J]. 计量学报, 2005, 3(26): 284-288.
TIAN Sheping, WEI Hongyu, YAN Detian. Genetic alogorithms based on l_p data fitting and its application[J]. Acta Metrologica Sinica, 2005, 3(26): 284-288. (in Chinese)

[5] PARSOPOULOS K E, VRAHATIS M N. Recent approach to global ontimization problems through particle swarm optimization [J]. Neural Computing, 2002, 1(2): 235-306.

[6] 曾建潮, 介婧, 崔志华. 微粒群算法[M]. 北京: 科学出版社, 2004: 20-95.
ZENG Jianchao, JIE Jing, CUI Zhihua. Particle Swarm Optimization Algorithm[M]. Beijing: Science Press, 2004: 20-95. (in Chinese)

[责任编辑: 刘　健]