

商品价格的需求概率和需求风险模型

化存才

(云南师范大学 数学学院, 云南 昆明 650092)

[摘要] 从商品的需求因素出发研究商品价格的概率和风险模型. 首先, 给出商品价格的需求概率分布和需求概率最大定价公式, 证明了需求量最大的价格就是需求概率最大价格, 它低于利润最大价格. 需求最大价促成了价格和消费的从众性, 可理解为商品的平价. 其次, 借助于金融数学中风险的度量, 通过推广方差的定义, 得到了价格变量的需求风险函数; 在比较 5 种特殊价格的需求风险之后, 得出: 期望价格的风险最小, 需求概率最大价格和利润最大价格风险次之, 最高价和最低价的风险最大; 再次, 讨论了浮动(折扣)价格的需求概率和需求风险, 给出由于调价而产生的需求风险增加或者降低的条件. 最后, 通过 2006 年昆明市春运浮动价格乘客选择意向调查结果进行了验证.

[关键词] 商品, 需求概率, 需求风险, 数学模型

[中图分类号] O29 F045.32 [文献标识码] A [文章编号] 1672-1292(2006)03-0070-05

Probability and Risk Models of Demand and for the Price of Commodity

HUA Cuncai

(School of Mathematics Yunnan Normal University, Kunming 650092, China)

Abstract Probability and risk models for the price of commodity are studied from the demanding factor. Firstly, the probability distribution of demand and formula of the price are given with maximal probability of demand. It is proved that the price at which the demand is maximal is that of maximal probability of demand, and that it is lower than the one with maximal profit. The price with maximal demand causes popularity of price and consumption and can be understood as public price of commodity. Secondly, recurring to the measurement of risk in financial mathematics and extending the definition of the variance, a risk function of demand is obtained for the price variable. Furthermore, after comparing the risks of demand for five special prices, it is concluded that the risks are ordered in turn from minimum to maximum for the expectation price, the price with maximal probability of demand and the price with maximal profit, and the lowest and the highest prices. Thirdly, the probability and risks of demand for floating or discounting prices are discussed. Conditions are given for increasing and lowering the risks of demand due to adjusting the prices. Finally, the results are verified by investigating the favor of choices of passengers for the floating prices during the period of spring transportation in Kunming City.

Key words commodity, probability of demand, risk of demand, mathematical models

0 引言

在商品的购销中, 商品的价格往往起着主导作用. 商品的价格能否被消费者所接受是事先不能完全确定的, 由此带来了销售量的随机性, 这表明商品的价格以一定的概率产生相应需求量. 因此不同的价格将导致不同的需求概率, 从而也就必须要承担由于定价而引起的风险. 如航空机票的每种优惠价格都会带来相应需求量的随机变化, 因而直接导致销售收益的好坏. 另一方面, 一种商品在其供求矛盾突出的时候, 其销售价格往往也需要考虑适当地向上浮动, 但这种涨价对有些公共商品而言就会成为很敏感的社会问题, 且会带来需求量的显著变化. 比如春运中的客运票价, 生活中的水、电、气的价格等, 此时就需要协调好相关的社会问题. 近年来, 我国采取“价格听证会”的法律形式处理许多公共商品的定价问题, 这在一定程

收稿日期: 2006-04-04

基金项目: 云南省引进高层次人才工作经费资助项目和云南省“数学与应用数学”重点建设专业资助项目.

作者简介: 化存才(1964-), 博士, 教授, 主要从事数学模型方面的教学与研究. E-mail: Cuncai-hua@sohu.com

度上阻止了垄断价格^[1-2]. 以立法形式确定的商品价格, 从维护公共利益出发, 兼顾了经济和社会效益, 有一定的公正性, 能得到社会上多数人的认可. 从数学上来解释, 就是只接受一种合法制定的价格, 即该价格的需求概率为 100%, 以这种价格交易商品是没有需求风险的.

至今已有较多文献研究关于商品的最优价格和折扣定价模型问题, 比如需求函数为价格的减函数的简单最优价格模型^[3], 供应链管理中供需双方协调以节约双方费用的优化定价模型, 考虑经济批量的折扣定价模型等^[4-7]. 这些模型都是讨论面向生产企业供货和销售商批量订货的折扣定价问题, 较少讨论面对销售商和消费者之间的商品定价模型. 文献[8]归纳讨论了随机需求条件下现有的各种机票定价方法. 文献[9]研究了企业价格风险的种类(市场价格、汇率、利率)及其影响和度量, 文献[10]讨论了企业价格(高价、低价)的策略及其风险与对策. 正如文献[9, 10]所述, 引起价格风险的因素是较多的, 有市场价格、汇率、利率、需求、政治、竞争等. 然而, 文献[9, 10]都不是从数学上去分析价格的风险. 最近, 文献[11]给出了商品价格上涨和保持的条件, 提出一种价格折扣策略和二次需求函数模型.

本文主要从商品的需求因素出发去研究商品价格的概率和风险模型.

1 商品购销中价格的需求概率分布和需求概率最大价格

假设销售商可制定出从小到大的 $M + 1$ 个商品价格 p_0, p_1, \dots, p_M , 在一定的时间内, 销售商按这些价格销售时得到的销售量依次为: $n(p_0), n(p_1), \dots, n(p_M)$. 记 $N = n(p_0) + n(p_1) + \dots + n(p_M)$, 以 p 表示在供求关系正常时商品的销售价格, $Pr(p = p_i)$ 表示以价格 p_i 销售商品的概率, 则 p 是一随机变量. 因为每种价格对应的销售量(需求量)反映了消费者对这种价格的认可程度, 所以由概率的频率定义, $\frac{n(p_i)}{N}$ 刻画了商品能够按照价格 p_i 交易的需求概率, 于是有 p 服从表 1 所示的需求概率分布. 由此, 可按照需求概率最大的原则去选择下一次商品的价格为:

表 1 价格 p 的离散型需求概率分布

p	p_0	p_1	p_2	\dots	p_M
Pr	$\frac{n(p_0)}{N}$	$\frac{n(p_1)}{N}$	$\frac{n(p_2)}{N}$	\dots	$\frac{n(p_M)}{N}$

$$p_{i_0} = \max_k p_{i_k}, \quad \text{如果 } Pr(p = p_{i_k}) = \max_{0 \leq k \leq M} \{Pr(p = p_i)\}. \tag{1}$$

定义 1 称由公式 (1) 所给出的商品销售价格 p_{i_0} 为需求概率最大价格.

不难得出, 以立法形式固定的商品价格的概率分布是单点分布.

定理 1 需求量达到最大的价格是需求概率最大的价格 p_{i_0} , 且 $p_{i_0} \leq p^*$, 其中 p^* 是利润最大价.

证明 设 $\theta(p)$ 是销售量随价格变化的需求函数, 它可以由价格 p_0, p_1, \dots, p_M 与销售量 $n(p_0), n(p_1), \dots, n(p_M)$ 通过数据拟合得到. 记 $\bar{\theta} = \max_{p_0 \leq p \leq p_M} \{\theta(p)\}$ 为 $\theta(p)$ 的最大值, 则由 $\theta(p)$ 的连续性和不等式 $\frac{n(p_i)}{N} \leq \frac{n(p_{i_0})}{N}$, 有: $\bar{\theta} \approx n(p_{i_0}) \approx \theta(p_{i_0}) = \lim_{p \rightarrow p_{i_0}} \theta(p)$, 再由需求概率最大的定价公式 (1), 可得最大需求概率为:

$$\frac{\bar{\theta}}{N} \approx \frac{n(p_{i_0})}{N} = Pr\{p = p_{i_0}\}. \tag{2}$$

这表明, 需求量达到最大的价格可以选择为需求概率最大的价格 p_{i_0} .

为证第 2 个结论, 设商品的批发价为 q 非批发成本为 C , 则销售的纯利润 W 为 $W(p) = (p - q)\theta(p) - C$, 其中价格 $p > q$ 由需求最大价 p_{i_0} 和利润最大价 p^* 的定义知 $W(p^*) \geq W(p_{i_0})$, $\theta(p^*) \leq \theta(p_{i_0})$, 从而得到 $p^* \geq p_{i_0}$. 定理 1 证毕.

定理 1 提供了利润最大化的一种调价方法: 利润最大价 p^* 应高于需求最大价 p_{i_0} . 在现实生活中, 人们普遍接受了平价商品的购销方式, 故平价商品可以带来需求量的最大化, 同时也就促成了价格和消费的从众性. 因此, 需求最大价可以理解为商品的平价, 正如大型超市中的商品价格.

2 价格的需求风险定义与 5 种特殊价格的需求风险比较

在本节中, 先定义价格变量的需求风险函数, 然后比较 5 种特殊销售价格(最低价 p_0 , 需求最大价 p_{i_0} ,

期望价格 \bar{p} 、利润最大价 p^* 和最高价 p_M) 的需求风险.

按照数学期望的定义, 以 \bar{p} 表示商品的期望价格, 则有

$$\bar{p} = E p = \sum_{i=0}^M p_i P r(p = p_i). \tag{3}$$

在金融数学中, 随机变量的方差可作为风险的古典度量^[10]. 现在, 将随机价格 p 的方差写作 $D_{\bar{p}} p = E(p - \bar{p})^2$, 以它表示期望价格的风险. 为了度量价格 p_i 的风险, 将方差定义进行推广, 引入:

定义 2 设价格 p 的需求概率分布如表 1 所述, ξ 表示价格变量, 定义 ξ 的风险函数为:

$$f(\xi) = D_{\xi} p = E(p - \xi)^2 = D_{\bar{p}} p + (\xi - \bar{p})^2. \tag{4}$$

可见, 风险函数 $f(\xi) = E p^2 - 2 \xi \bar{p} + \xi^2$ 是价格变量 ξ 的二次函数. 由极值条件和

$$f'(\xi) = 2(\xi - \bar{p}), \quad f''(\xi) = 2 > 0 \tag{5}$$

知 \bar{p} 是 $f(\xi)$ 的最小值, 因此期望价格 \bar{p} 的需求风险是最小的, 因此有:

定理 2 期望价格 \bar{p} 的需求风险是所有价格中最小的.

定理 3 最低价 p_0 , 需求最大价 p_{i_0} , 利润最大价 p^* 和最高价 p_M 的需求风险满足:

$$f(p_{i_0}) \leq \min\{f(p_0), f(p_M)\}; \quad f(p^*) \leq \min\{f(p_0), f(p_M)\} \tag{6}$$

证明 由 (5) 知, 当 $\xi > \bar{p}$ 时, $f(\xi)$ 单调增加; 当 $\xi < \bar{p}$ 时, $f(\xi)$ 单调减少. 有:

$$\begin{aligned} f(p_{i_0}) &\leq f(p^*) \leq f(p_M), \text{ 当 } p_M \geq p^* \geq p_{i_0} \geq \bar{p} \text{ 时} \\ f(p^*) &\leq f(p_{i_0}) \leq f(p_0), \text{ 当 } p_0 \leq p_{i_0} \leq p^* \leq \bar{p} \text{ 时} \end{aligned} \tag{7}$$

从而就有式 (6) 成立. 证毕.

根据定理 2 和 3 就 5 种特殊价格的需求风险而言, 以期望价格 \bar{p} 最低, 需求最大价 p_{i_0} 和利润最大价 p^* 次之, 最低价 p_0 和最高价 p_M 为最大.

一般地, 对于任意两种价格 p_i 与 p_j , 只要 $p_j \geq p_i$, 就有 $D_{p_j} p - D_{p_i} p = (p_j - p_i)[p_i + p_j - 2\bar{p}]$.

定理 4 当 $\frac{p_i + p_j}{2} \geq \bar{p}$ 时, 有 $D_{p_j} p \geq D_{p_i} p$, 故价格 p_j 的需求风险较大; 而当 $\frac{p_i + p_j}{2} \leq \bar{p}$ 时, 有 $D_{p_j} p \leq D_{p_i} p$, 故价格 p_j 的需求风险较小.

3 浮动(折扣)价格的需求概率和需求风险

设 α 是在需求概率最大价格 $p = p_{i_0}$ 的基础上给定的浮动(折扣)率, 则浮动(折扣)价格为 αp_{i_0} . 如果有 j_0 使得 $\alpha p_{i_0} = p_{j_0}$, 那么浮动(折扣)价格的需求概率为:

$$P r\{p = \alpha p_{i_0}\} = P r\{p = p_{j_0}\} = \frac{n(p_{j_0})}{N}. \tag{8}$$

因为 $\frac{n(p_{j_0})}{N} \leq \frac{n(p_{i_0})}{N}$, 所以有: $P r\{p = \alpha p_{i_0}\} \leq P r\{p = p_{i_0}\}$, 这表明在选择需求概率最大的价格 $p = p_{i_0}$ 时, 商品的销售正旺, 不应考虑调价. 如果确要考虑调价, 那么就必然要承担相应的需求风险.

定理 5 当 $p_{i_0} \leq \bar{p}$ 时, 上调 $\alpha \geq \frac{2\bar{p}}{p_{i_0}} - 1 \geq 1$ 将会增加需求风险; 当 $p_{i_0} \geq \bar{p}$ 时, 下调 $0 < \alpha \leq \frac{2\bar{p}}{p_{i_0}} - 1 \leq 1$ 也将会增加需求风险; 当取 $\alpha = \frac{2\bar{p}}{p_{i_0}}$ 时, 浮动(或折扣)价格都将会降低需求风险.

证明 因需求风险之差为:

$$g(\alpha) = D_{\alpha p_{i_0}} p - D_{p_{i_0}} p = (\alpha - 1)p_{i_0}[(1 + \alpha)p_{i_0} - 2\bar{p}] \tag{9}$$

故当 $p_{i_0} \leq \bar{p}$ 时, 只要上调 $\alpha \geq \frac{2\bar{p}}{p_{i_0}} - 1 \geq 1$, 就有 $D_{\alpha p_{i_0}} p \geq D_{p_{i_0}} p$, 亦即向上浮动价格就会增加需求风险. 当 $p_{i_0} \geq \bar{p}$ 时, 只要下调 $0 < \alpha \leq \frac{2\bar{p}}{p_{i_0}} - 1 \leq 1$, 就有 $D_{\alpha p_{i_0}} p \geq D_{p_{i_0}} p$, 亦即折扣定价也会增加需求风险. 当取 $\alpha = \frac{2\bar{p}}{p_{i_0}}$ 时, 有 $D_{\alpha p_{i_0}} p \leq D_{p_{i_0}} p$, 亦即浮动(或折扣)价格都将会降低需求风险. 定理 5 证毕.

4 在春运浮动价格中的应用

在本节中, 作为模拟应用分析, 我们研究春运价格浮动率的需求概率分布和需求风险.

2006年春节前, 我们组织人力分别到昆明市东部客运站、昆明火车站和昆明机场面对乘客 (有工人、农民、商务人员、知识分子、解放军、学生、公务员、记者和工作人员) 直接进行了调查. 通过在每个站随机询问 400多名乘客对于价格浮动率的选择意向, 将所记录的结果按表 1和风险函数公式 (4)进行了统计计算, 分别得到了如下的春运期间价格浮动率的乘客选择意向概率分布 (如表 2 4 6所示) 和每一种浮动率的乘客选择意向风险 (如表 3 5 7所示, 其中下划线部分表示期望浮动率及其风险).

表 2 春运火车票价浮动率的乘客选择意向概率分布

浮动率	1.0	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30	1.35	1.40	1.45	1.50	3.0
概率 (%)	33.66	4.7	7.67	4.21	9.9	0.99	1.49	1.24	3.47	4.21	15.84	12.62

表 3 春运火车票价浮动率的乘客选择意向风险

浮动率	1.0	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30	1.35	1.40	<u>1.412</u>	1.45	1.50	3.0
风险 (%)	56.8	52.9	49.5	46.7	44.3	42.4	41.1	40.4	39.83	<u>39.81</u>	39.96	40.59	292

从表 2看出, 在铁路运力有限的条件下, 有 33.66% 的多数火车乘客并不希望火车票价上浮, 有 15.84% 的乘客可以考虑选择票价上浮 50%, 而有 12.62% 的乘客因为购票难而考虑选择高价票, 因此最大的需求火车票是原价票 ($\alpha_{i_0} = 1.0$). 从表 3看出, 在火车票价上浮的条件下, 估计铁路客运部门在选择高价票 (浮动率约为 3倍) 出售时风险将会最大 (风险为 2.92 会出现只有少数人购票的现象), 其次是原价票 (风险为 0.568 会出现排长队拥挤购买的现象), 再次是上浮 5% 的票 (风险为 0.529), 而在选择期望浮动率 ($\bar{\alpha} = 1.412$) 票价出售时风险是最小的 (风险为 0.398 1 会出现购票次序井然的现象). 根据定理 5 以 $\alpha_{i_0} = 1.0$ 为基准, 将浮动率上调到 $\alpha = \frac{2\bar{\alpha}}{\alpha_{i_0}} - 1 = 1.824$ 时, 风险将大大增加, 而上调到 $\alpha = \frac{\bar{\alpha}}{\alpha_{i_0}} = 1.412$ 时, 风险将降低. 据此, 可以建议铁路客运部门在春运期间同时出售多种不同的浮动价格以缓解购票难和购票次序不正常的现象.

表 4 春运汽车票价浮动率的乘客选择意向概率分布

浮动率	1.0	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30	1.35	1.40	1.45	1.50
概率 (%)	5.59	8.39	15.91	7.96	26.24	7.097	14.41	1.94	4.30	1.94	6.24

表 5 春运汽车票价浮动率的乘客选择意向风险

浮动率	1.0	1.05	1.10	1.15	1.20	<u>1.209</u>	1.25	1.30	1.35	1.40	1.45	1.50
风险 (%)	6.03	4.18	2.84	1.996	1.65	<u>1.64</u>	1.81	2.46	4.06	5.28	7.43	10.09

从表 4看出, 在公路运力有限的条件下, 有 26.24% 的多数汽车乘客可选择汽车票价上浮 20%, 有 14.41% 的乘客可选择汽车票价上浮 30%, 有 15.91% 的乘客可以考虑选择票价上浮 10%, 因此公路客运的最大需求票是上浮 20% 的汽车票. 从表 5看出, 在汽车票价上浮的条件下, 估计公路客运部门在选择上浮 50% 的票价出售时风险将会最大 (为 0.109), 其次是选择上浮 45% 的票价 (为 0.074 3), 再次是原价票 (为 0.060 3), 而在选择期望浮动率 (为 1.209) 的票价出售时风险是最小的 (为 0.016 4). 根据定理 5 以 $\alpha_{i_0} = 1.2$ 为基准, 将浮动率上调到 $\alpha = 1.216 8$ 时, 风险将增加, 而上调到 $\alpha = 1.208 4$ 时, 风险又将降低.

表 6 春运机票价格浮动率的乘客选择意向概率分布

浮动率	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85
概率 (%)	0.78	0.89	5.94	4.06	11.67	4.78	10.56	5.22	14.28	8.06	14.39	2.78
浮动率	0.90	0.95	1.0	1.05	1.10	1.15						
概率 (%)	4.00	5.22	4.89	1.44	0.94	0.11						

表 7 春运机票价格浮动率的乘客选择意向风险

浮动率	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	<u>0.69</u>	0.70	0.75	0.80
风险 (%)	14.83	14.75	11.6	8.95	6.81	5.16	4.01	3.36	<u>3.21</u>	3.217	3.57	4.42
浮动率	0.85	0.90	0.95	1.0	1.05	1.10	1.15					
风险 (%)	5.78	7.63	9.98	12.83	16.19	20.04	24.39					

从表 6 看出,在航空运力有限的条件下,有 14.39% 的乘客可选择机票折扣率为 0.8 有 14.28% 的乘客可选择机票折扣率为 0.7 有 11.61% 的乘客可以选择折扣率为 0.5 因此最大需求机票是 8 折机票.从表 7 看出,在春运机票价格上浮的条件下,估计航空公司在选择上浮 15% 的机票出售的风险将是最大的(风险为 24.39%),其次是上浮 10% 的机票(风险为 20.04%),再次是上浮 5% 的机票(风险为 16.19%),而在选择期望折扣率(0.69)的机票价售票时风险是最小的(风险为 3.21%,机票将会售完).根据定理 5 以 $\alpha_{i_0} = 0.8$ 为基准,将浮动率下调到 $\alpha = 0.576$ 时,风险将增加,而上调到 $\alpha = 0.688$ 时,风险又将降低.

[参考文献] (References)

- [1] 谭湘渝. 价格听证会实施的经济学分析与绩效评价 [J]. 商业研究, 2004, 285(1): 71-73
TAN Xiangyu. Economical analysis and judgment of achievements and effects for practice of conference on price's hearing of witnesses [J]. Commercial Study, 285(1): 71-73 (in Chinese)
- [2] 叶必丰. 价格听证中的信息不对称及其解决思路 [J]. 上海交通大学学报: 哲学社会科学版, 2004, 12(3): 29-32
YE Bifeng. Asymmetry of information and its solving way for price's hearing of witnesses [J]. Journal of Shanghai Jiaotong University: Philosophy and Social Science Edition, 2004, 12(3): 29-32 (in Chinese)
- [3] 姜启源, 谢金星, 叶俊. 数学模型 [M]. 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2003
JIANG Qiyuan, XIE Jinxing, YE Jun. Mathematical Models [M]. 3rd Edition. Beijing: Higher Education Press, 2003 (in Chinese)
- [4] 韩晓军, 陈秋双. 供应链中的买卖协调及数量折扣定价模型 [J]. 天津纺织工学院学报, 2000, 19(6): 40-42
HAN Xiaojun, CHEN Qiushuang. Buyer-seller coordination and quantity discount pricing model in the supply-chain [J]. Journal of Tianjin Institute of Textile Science and Technology, 2000, 19(6): 40-42 (in Chinese)
- [5] 马祖军. 供应链中的供需协调及数量折扣定价模型 [J]. 西南交通大学学报, 2004, 39(2): 185-188
MA Zujun. Vendor-purchaser coordination and quantity discount pricing model in supply chain [J]. Journal of Southwest Jiaotong University, 2004, 39(2): 185-188 (in Chinese)
- [6] 李成标. 经济批量下带有数量折扣的定价模型 [J]. 江汉石油学院学报, 1997, 19(1): 105-107
LI Chengbiao. A quantity discount pricing model under the EOQ environment [J]. Journal of Jianghan Petrol Institute, 1997, 19(1): 105-107 (in Chinese)
- [7] 许洪, 胡运权. 随机需求状态下的机票产品定价模型及其应用 [J]. 中国软科学, 2003, 2(4): 158-160
XU Hong, HU Yunquan. Pricing model and application of product of airplane's ticket under random demand [J]. China Soft Science, 2003, 2(4): 158-160 (in Chinese)
- [8] 鲍新中, 于冀蓉. 企业的价格风险及其度量 [J]. 上海会计, 2002, 3(1): 7-8
BAO Xinzhong, YU Jirong. Risks and measurement of prices in enterprise [J]. Shanghai Accountant, 2002, 3(1): 7-8 (in Chinese)
- [9] 金丹, 洪元义. 价格风险——新世纪的徘徊 [J]. 科技进步与政策, 2003, 2(增刊): 110-111.
JIN Dan, HONG Yuanyi. Risks of price——new century's hesitate [J]. Advancement and Policy of Science and Technology, 2003, 2 (supplement): 110-111. (in Chinese)
- [10] 李向科, 戚发全. 金融数学 [M]. 北京: 中国人民大学出版社, 2004
LIXiangke, QIFaqun. Finance Mathematics [M]. Beijing: Press of Chinese People's University, 2004 (in Chinese)
- [11] 化存才. 商品购销中的浮动价格和二次需求函数模型 [J]. 南京师范大学学报: 工程技术版, 2006, 6(1): 33-38
HUA Cuncai. Mathematical models for floating price of purchase and sale of commodity and a quadratic function of demand [J]. Journal of Nanjing Normal University: Engineering and Technology, 2006, 6(1): 33-38 (in Chinese)

[责任编辑: 刘健]