

电磁场有限元分析的快速数值方法研究

赵 阳¹, UDPA Lalita², UDPA Satish²

(1 南京师范大学 电气与自动化工程学院, 江苏 南京 210042)

2 美国密西根州立大学 电气与计算机工程系, Michigan 48824 USA)

[摘要] 有限元理论及技术对于求解大规模有限元方程至关重要的快速算法研究尚存许多问题. 提出了一种目标区域定位算法并与波阵法联合使用的新数值技术, 分析了新算法的原理及其在非线性条件下的应用. 阐述了在磁矢量 (MVP) 有限元中的实现, 最后给出计算实例. 结果表明, 采用新方法可以节约大量计算机资源, 是一种鲁棒性较好的数值技术, 对大规模电磁场数值计算也有良好的应用前景.

[关键词] 电磁场, 有限元, 数值方法

[中图分类号] TM 154.1 [文献标识码] A [文章编号] 1672-1292(2006)04-0001-04

Study on Fast Numerical Method for Electromagnetic Finite Element Analysis

ZHAO Yang¹, UDPA Lalita², UDPA Satish²

(1. School of Electrical and Automation Engineering, Nanjing Normal University, Nanjing 210042, China)

2. Department of Electrical and Computer Engineering, Michigan State University, East Lansing 48824, USA)

Abstract Finite element method (FEM) is powerful for numerical analysis and has been widely and successfully used in numerical electromagnetic analysis. On the other hand, the solver development which is also very important in solving large-scale FEM equations still seems not as well researched as that of model development. In this paper, an numerical technique of target region locating (TRL) is presented and applied in finite element method for 3D electromagnetic modeling. The principle of new solver and its availability for non-linear use are demonstrated, showing that it can be easily used with efficiency. Also the implementation in FEM based on magnetic vector potential is introduced. Finally, a numerical examples of 3D magnetostatic modeling is given with the comparison of computer resource used between new solver and commercial software, seeing that a huge computer resource can be saved by employing new solver. Besides that, this method can also be extended to other quasi-static applications.

Key words electromagnetic field, finite element method, numerical technique

0 引言

迄今为止, 有限元理论及技术在电磁应用方面已愈加成熟并取得许多研究成果. 例如, 在包含或不包含激励源的磁场分析中^[1], 磁标量位和磁矢量位的问题已获得很好解决, 此外基于有限元的一系列数学模型研究也成果显然. 然而, 对于求解大规模有限元方程至关重要的快速算法研究, 尚存许多问题. 这可能是由于高性能的计算机或是性能优越的 PC 的出现造成的, 也可能是该快速算法对计算结果的作用不大, 从而与模型研究相比, 该快速算法经常被忽略. 但在电磁有限元中, 快速算法与模型研究是同等重要的, 因为它不仅影响计算结果, 对计算效率的影响更加显著.

众所周知, 有限元在进行三维电磁场分析时将产生大规模线性矩阵方程. 当今求解这些大规模线性矩

收稿日期: 2006-04-18

基金项目: 江苏省自然科学基金资助项目 (BK2003099)、中国博士后科学基金资助项目 (2004036147) 和教育部留学回国人员基金资助项目 (教外司留 [2003] 406 号).

作者简介: 赵 阳 (1966-), 博士, 教授, 主要从事电磁兼容方面的教学与研究. E-mail: zhaoyang2@njnu.edu.cn

阵的数值算法通常可以分为两类:一类是直接算法,另一类是迭代算法.迭代法以占用较小的存储空间和易于计算机实现的优点而著称,但它有一个突出的问题,有时会由于鲁棒性问题而陷入一种难以控制的迭代过程中.而直接法正好相反,它没有这种突出问题,如果可以忽略计算机在数值上的误差,该方法就可以在理论上获得精确解.但与迭代法相比,直接法需要大量的存储空间.最近,一种基于个人计算机有限元分析的商用软件 FEMLAB^[12]已经在各种电磁场问题分析方面获得了成功应用并得到推广,然而在本文研究中发现,若采用 FEMLAB 直接算法,将由于 FEMLAB 软件巨大的存储空间要求而无法完成大规模电磁场计算工作.为此,本文提出了一种基于波阵原理^[3,4]的目标区域定位快速方法.

1 新算法分析

波阵法是一种特殊的线性方程组直接求解法.由于一般的 Gauss 直接法需要对所有节点变量都存储在总刚度矩阵中,该刚度矩阵需要大量的存储空间和可观计算工作量,因此对于大规模有限元计算特别是三维电磁场分析来说,该方法并不是一种有效的方程求解方法.但对于波阵法,采用了一种被定义为波阵矩阵的动态刚度矩阵来取代总体刚度矩阵.当一单元矩阵经过处理并加载至这种波阵矩阵的同时,需要判断哪些单元节点变量在单元加载过程中可以被消除,或者说判断它们在该波阵矩阵中是否已达到最后停留阶段,然后根据判断结果将它们从波阵中消去并存储消元方程系数.这是因为此时这些消元变量在波阵中将不再被处理且对于后面将要输入的新单元节点变量也没有任何贡献.通过这种方式,当新单元被装载到波阵而旧单元变量同时被消元出波阵时,有限元过程中将仅仅只有有限的节点变量存留在波阵矩阵内.由于该现象看起来像一个波形的运动过程,因此该方法被称之为波阵法,波阵矩阵的维数被定义为波阵宽,波宽在方程处理过程中依据单元变化是可变的.

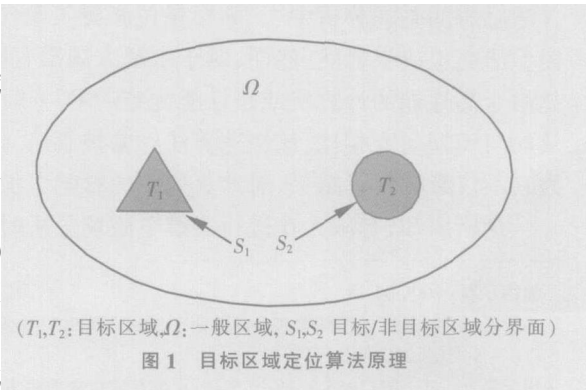
虽然波阵法不需要存储总体矩阵方程,但它仍需要存储所有变量的消元系数,这对于一个大规模系统如三维电磁场分析来说仍然需要巨大的存储空间.基于这种原因,本文提出了与波阵法配合应用的目标区域定位算法,分析如下:

由于在场分析中通常只有那些很小部分、被称之为目标区域或求解域的场域需要知道其场分布,并且对于整个场空间而言该区域一般只占很小比例,譬如 5%,因此实际上仅需求解那些在目标区域内的变量而没有必要求解其它所有区域变量.这实际隐含了如下事实,即在改进的波阵法中,只需存储目标区域内的变量消元系数而放弃那些非目标区域内的变量系数.因此数值计算开始前,有必要事先确定或定位所有的目标区域并将其包含的单元重新编号,使其单元矩阵在加载到波阵中时尽量晚一些而确保那些非目标区域的单元矩阵加载到波阵时尽量早一些.随后在计算中,非目标区域单元将先获得处理并从波阵中消去,且不用对它们的消元系数进行存储;而目标区域单元将最后输入,它们的消元系数存储在一个一维数组中,而后通过回代法进行求解.因此采用 TRL 技术不仅避免了存储所有消元系数以节省了巨大存储空,并且使得波阵带宽(或波宽)维持在一个很小长度.这可以解释为,一方面目标区域单元在最后才被载入波阵中,因而在波阵矩阵中将不再被那些广泛分布的非求解域单元所包围或混合在一起;另一方面在有限元单元矩阵方程加载过程中已经规定,任何求解域单元都不能被消元直至所有的求解域单元均被输入到波阵中,因此到最后只有那些求解域中的节点变量留在波阵中,届时才能被消元处理并存储它们的消元系数,从而使得求解区域变量在波阵中不会停留很长时间并且在波阵中也不会占用任何额外的空间,因此波阵宽将保持很小.

下面将给出与波阵法协同使用的目标区域定位算子分析.如图 1 所示,假定 T_1, T_2 是目标区域, Ω 是常规区域或非目标区域, S_1, S_2 是目标区域与非目标区域 ($T_1, T_2/\Omega$) 的交界面.然后首先将一般区域单元 Ω 装载到波阵矩阵中,则波阵方程为

$$[K_{\Omega \Omega}] \cdot [X_{\Omega}] = [F_{\Omega}] \tag{1}$$

在单元载入波阵时,一般区域中的单元节点变量同时被消去,因为它们在波阵中属于最后一次出现且再无用处,只有那些交界面上的变量 S_1, S_2 被保留在波阵中.因此



式 (1) 变为

$$\begin{bmatrix} K_{S_1 S_1} & K_{S_1 S_2} \\ K_{S_2 S_1} & K_{S_2 S_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_{S_1} \\ X_{S_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{S_1} \\ F_{S_2} \end{bmatrix} \quad (2)$$

此时将新的目标区域单元 T_1, T_2 继续加载至波阵中, 则式 (2) 转化为

$$\begin{bmatrix} K_{T_1 T_1} & K_{T_1 T_2} \\ K_{T_2 T_1} & K_{T_2 T_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_{T_1} \\ X_{T_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{T_1} \\ F_{T_2} \end{bmatrix} \quad (3)$$

这里交界面上的变量 S_1, S_2 已经被包含在目标区域变量 T_1, T_2 中, 所以在式 (3) 中没有写出. 接下来将式 (3) 改写为

$$[K_{T,T}] \cdot [X_T] = [F_T] \quad (4)$$

式中, T 为目标区域总变量. 至此可以清楚地看到最终只有方程 (4) 需要通过回代进行求解, 而待解的未知变量个数减小到 n_T , 远远小于非目标区域变量个数 n_Ω . 因此 TRL 算法带来的结果是, 它显著节约了用来存储消元系数的内存空间, 例如其所需内存也许仅有甚至不到常规波阵法所需内存的 1%, 由此也极大节约了 CPU 时间.

当场域中还存在非线性材料譬如静磁场建模中存在磁导率为 μ_r 的非线性磁材料时, 通常这将是一个非常耗时的过程, 并且在数值方案中也是一个非常复杂和麻烦的问题, 因为它将需要大量的迭代时间使得迭代解逼近精确解. 不过对于非线性情况目标区域定位 (TRL) 算法仍然适用, 它不仅保持了占用较小存储空间的优点, 更重要的是, 在每一次迭代求解中它可以节约计算时间, 所以 TRL 算法可以显著节约总计算时间. 如果将非线性区域看作为一个额外的目标区域, 在每次迭代计算中将非线性区域变量与目标区域变量结合在一起求解, 就可以轻易实现 TRL 算法在非线性中的应用. 最终, 通过判断下面的收敛性条件是否满足而获得收敛解:

$$\sum_{k=1}^M \left| \frac{\mu_k^{(n)} - \mu_k^{(n-1)}}{\mu_k^{(n-1)}} \right| \rightarrow \varepsilon \quad (5)$$

式中, M 为非线性磁导率材料的子区域个数.

在新算法的有限元实现过程中, 针对含有激励源的三维静磁场有限元分析可采用磁矢量位函数 A 作为求解变量^[5], 且 $B = \nabla \times A$, 则场控制方程为

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times A = J_s \quad (6)$$

利用 Galerkin's 加权余量法, 得有限元公式为

$$\int_\Omega [N] \cdot \nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times A d\Omega = \int_\Omega [N] \cdot J_s d\Omega \quad (7)$$

对照式 (7), 单元矩阵方程为 $[K_{ij}]_e \cdot [A]_e = [F]_e$. 这是一个 24×24 维数的矩阵方程, 在基于磁矢量位函数的有限元分析中目标区域定位算法通过前述方法可以轻易实现.

2 数值结果与结论

文中给出了一个采用目标区域定位算法与波阵法共同配合的三维静磁场有限元算例, 用以验证本文算法的精度和有效性. 算例如下: 一相对磁导率为 $\mu_r = 10$ 的立方铁心置于一同轴立方线圈所产生的磁场中, 设线圈电流密度为 1 A/mm^2 , 铁心尺寸轴线距边沿 0.05 m , 高 0.2 m , 线圈内边距轴线 0.06 m , 外边距轴线 0.08 m , 高 0.15 m , 如图 2 所示.

为比较新算法 (目标区域定位算法即 TRL 算法) 和商用有限元软件 FEMLAB 两种方法的计算结果, 本文分别采用新算法和 FEMLAB 计算了位于铁心中心

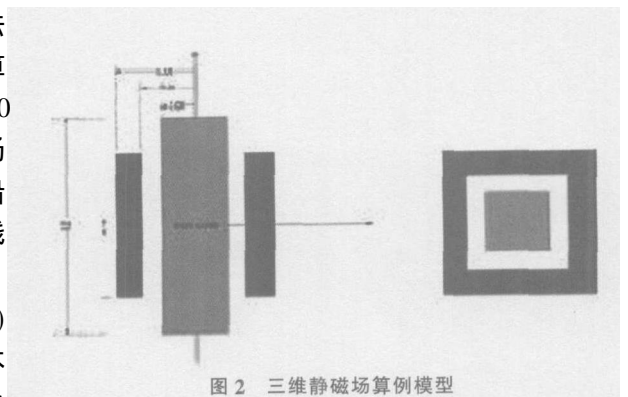


图 2 三维静磁场算例模型

处沿 Z 轴线上的磁通密度的 z 分量, 结果比较如表 1 所示. 计算中目标区域定位算子与波阵法结合使用并优化波阵技术, 同时采用基于磁矢量位 (MVP) 的有限元公式, 而 FEM LAB 则选取了直接法实现方程求解. 结果显示两种方法计算结果彼此接近, 而这些结果也与文献 [6] 中一个相似模型的解析解相吻合, 且计算误差落在可允许范围内, 因此证明了文中 TRL 算子的正确性.

表 1 分别采用目标区域定位方法和 FEM LAB 商用软件的算例计算结果比较 (轴向磁场 B_z/T)

| 计算点 Z 坐标 /cm | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
|--------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| FEM LAB 计算结果 | 0. 073 | 0. 071 | 0. 067 | 0. 055 | 0. 036 | 0. 019 | 0. 012 |
| 新算法 计算结果 | 0. 068 | 0. 063 | 0. 058 | 0. 047 | 0. 032 | 0. 019 | 0. 010 |

另一方面, 还对两种方法所耗用的计算机资源结果进行了比较. 在达到相同的计算精度下, TRL 算法与商用软件 FEM LAB 的数据对比结果如下: 有限单元剖分数 TRL 只占 FEM LAB 的 10%, 总变量个数占 28%, 实际求解变量个数仅占 0. 2%, 而计算机内存占用 TRL 仅仅只有 FEM LAB 的 0. 09%, CPU 时间则为 1. 7%. 结果表明, 采用新算法可以极大节省计算机资源, 这是因为采用该算法使得求解的未知单元数目大大减少, 并使得波阵宽始终控制在一个比较小的范围, 从而大大减少计算量. 实际上对于 TRL 算子, 最大方程求解个数就等于最大波阵宽, 而研究表明单元总变量个数与波阵宽并没有直接的联系. 如本算例中发现, 即使当变量总数达到 10 584 时最大波宽并没有太大的变化, 仍然约为变量总数的 6. 9%, 因此本算法也具有很强的鲁棒性. 此外, 新算法除可用于三维静磁场有限元, 亦可适用于非线性以及其它电磁场准静态分析, 对大规模电磁场数值计算有良好应用前景.

[参考文献] (References)

[1] UDPA S. EM methods for evaluation of prosthetic heart valves[J]. J of App Phys 2002 10(91): 7 769– 7 773.
[2] COMSOL AB Inc. FEM LAB[®]: User' s Guide[Z]. COMSOL AB Inc. 2004.
[3] RONS B M. A frontal solution program for finite element analysis[J]. Int J of Numerical Method Eng 1970(2): 5– 32.
[4] YOU Q. Application of substructure method for large matrix[J]. IEEE Trans on Mag 1988, 1(24): 326– 329.
[5] AHAMADIM A. Coupled vector scalar potential method for 3D magnetostatic field computation using hexahedral finite element[J]. IEEE Trans on MAG, 1996, 5(32): 4 347– 4 349.
[6] MAGELE C H, STOGNER H, PREIS K. Comparison of different finite element formulations for 3D magnetostatic problems [J]. IEEE Trans on MAG, 1988, 1(24): 31– 37.

[责任编辑: 严海琳]