

FIR 滤波器的约束最小二乘设计

孙 颖¹, 刘 清¹, 杨 涛²

(1 南京师范大学 数学与计算机科学学院, 江苏 南京 210097)

2 解放军理工大学 通信工程学院, 江苏 南京 210007)

[摘要] 低通滤波常用在图像去噪中, 抑制噪声从而改善图像质量. 在应用中图像的处理要求不能有明显的相位失真, 所以选用 FIR 滤波器, 因为它在一定的对称条件下可实现严格的线性相位. FIR 滤波器的设计最终可归结为求解一组滤波器系数, 采用最小二乘法优化这些系数. 为了对带有一些频域等式约束的 FIR 低通滤波器进行良好的设计, 在最小二乘的基础上结合拉格朗日法. 先将带约束的最小二乘转为求条件极值, 引入拉格朗日乘子法构造出拉格朗日函数, 再进行求解. 最后进行了仿真实验, 并比较了用一般遗传算法对 FIR 低通滤波器的设计. 结果证明了这种方法的有效性.

[关键词] 约束最小二乘, FIR 滤波器, 设计

[中图分类号] TN911 [文献标识码] B [文章编号] 1672-1292(2007)01-0018-04

Constrained Least Square Method Applied in FIR Filter Design

Sun Ying¹, Liu Qing¹, Yang Tao²

(1. School of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, Nanjing 210097, China)

2 Institute of Communication Engineering, PLAUST, Nanjing 210007, China)

Abstract Low pass filter is always used in restraining noises of image and improving the image qualities. In application, to ensure the linear phase of image, FIR filter is usually chosen as it can realize the strict linear phase under the conditions. Designing FIR filter actually means solving a group of fine coefficients. In this paper, constrained least square method is applied to design FIR low pass filter. In order to find good solution to FIR filter with some equation restrictions, the least square algorithm is combined with Lagrange method. First, transform the least square question into a condition-extremum question which can be solved by Lagrange method. Then construct the Lagrange function and get the solution. This method is proved efficient by simulating and comparing with the genetic algorithm.

Key words constrained least square, FIR filter design

图像处理中要求信号在传输和处理过程中不能有明显的相位失真, 而 FIR 滤波器在满足一定的对称条件下, 可以实现严格的线性相位, 因而选用 FIR 滤波器作为图像处理的滤波器. 而对用于图像处理的 FIR 滤波器的设计是一个带有约束条件的最优化问题, 即在满足一定的约束条件下, 希望所设计的 FIR 滤波器频率特性与理想的低通滤波器频率特性的误差最小. 目前, 常用的解决最优化 FIR 滤波器设计的方法有很多, 如 OPRemez 算法^[1]和遗传算法^[2-3]等. 然而这些算法都有其不足, 例如, OPRemez 算法运算量大、耗时多、硬件实现结构复杂, 且当约束条件非常多时, 它有时不能找到最优解; 遗传算法是一种随机优化算法, 具有算法简单和寻优能力强的特点, 但是它本身并不能解决带约束的优化问题, 对不满足约束条件的解只能丢弃, 这样就增加了寻优的时间和降低了优化的精度. 为此, 本文研究了一种采用具有约束的最小二乘法, 来设计带约束的 FIR 滤波器, 该方法具有算法简单及设计的 FIR 滤波器精度高等特点, 并通过实验验证该方法的有效性.

1 FIR 滤波器的数学模型

1.1 数学模型

FIR 滤波器的单位冲激响应 $h(n)$ 是有限长的 ($0 \leq n \leq N-1$), 其频率响应 $H(e^{j\omega})$ 为

收稿日期: 2006-06-05

作者简介: 孙 颖 (1981-), 女, 硕士研究生, 主要从事图像处理等方面的学习与研究. E-mail: winterbab@sohu.com

通讯联系人: 刘 清 (1962-), 博士, 副教授, 主要从事智能控制与现场总线测控系统的研究与开发. E-mail: njnjl@163.com

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\omega n}. \quad (1)$$

当 $h(n)$ 为实序列时, 可将 $H(e^{j\omega})$ 表示为:

$$H(e^{j\omega}) = \pm H(\omega) e^{j\theta(\omega)}, \quad (2)$$

其中, $H(\omega)$ 为幅度函数, 是一个实数, $\theta(\omega)$ 是相位函数.

线性相位 FIR 滤波器的冲激响应满足下式:

$$h(n) = \pm h(N-1-n).$$

因而系统函数可表示为:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} \pm h(N-1-n) z^{-n} = \sum_{m=0}^{N-1} \pm h(m) z^{-(N-1-m)} = \pm z^{-(N-1)} \sum_{m=0}^{N-1} \pm h(m) z^m,$$

即: $H(z) = \pm z^{-(N-1)} H(z^{-1})$, 可进一步写成:

$$H(z) = z^{-\frac{N-1}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \frac{z^{-n+\frac{N-1}{2}} + z^{-n-\frac{N-1}{2}}}{2}. \quad (3)$$

当 N 为奇数, $h(n)$ 为偶对称, 即 $h(n) = h(N-1-n)$. 式 (2) 与式 (3) 比较可知, 幅度函数可表示为:

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos\left[\left(\frac{N-1}{2} - n\right)\omega\right]. \quad (4)$$

$h(n)$ 关于 $\frac{N-1}{2}$ 偶对称, 而且, $\cos\left[\left(\frac{N-1}{2} - n\right)\omega\right]$ 也对 $\frac{N-1}{2}$ 偶对称, 于是式 (4) 可简写为:

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{r-1} \alpha(n) \cos n\omega \quad (5)$$

其中, $\alpha(0) = h\left(\frac{N-1}{2}\right)$, $\alpha(n) = 2h\left(\frac{N-1}{2} - n\right)$, $n = 1, 2, 3, \dots, \frac{N-1}{2}$, $r = \frac{N+1}{2}$, $\Phi(n) = [\alpha(0),$

$\alpha(1), \alpha(2), \dots, \alpha(r-1)]$ 是一组与滤波器脉冲响应相关的系数.

1.2 FIR 的设计

由上节可知 FIR 滤波器的设计归结为求一组合适的参数 $\Phi(n)$ 使得按 (5) 式求得的 $H(\omega)$ 在 $[0, \pi]$ 上与所要求的滤波器频率响应的幅度函数 $H_d(\omega)$ 的误差 $E(\omega)$ 最小. 在图像的去噪中常用图 1 的低通滤波器, 而用 $H(\omega)$ 逼近 $H_d(\omega)$ 的过程如图 2 所示.

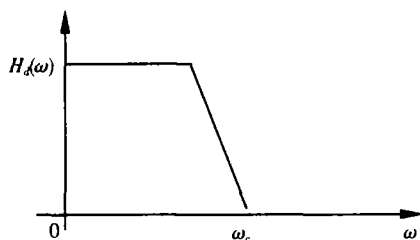


图 1 低通滤波器
Fig.1 Lowpass filter

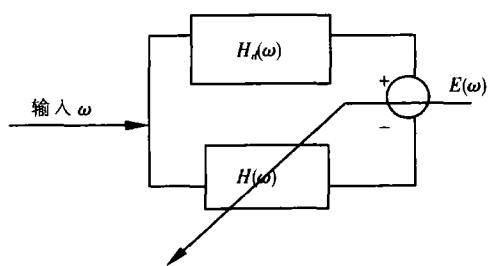


图 2 逼近方程
Fig.2 Approximation formulation

将频率分为稠密栅格, 误差函数 $E(\omega)$ 是这些栅格对应幅值与理想的幅值间的误差平方和:

$$E(\omega) = [H_d(\omega) - H(\omega)]^2 \quad \text{m in} \quad (6)$$

并且要求在滤波器频率为 0 时幅值为 1, 频率为 ω_c (截止频率) 时幅值为 0.5 这样, 对 FIR 滤波器的设计问题, 就转化为一个带约束的优化问题.

2 用约束最小二乘法求滤波器系数

FIR 滤波器的设计中, 就是要找到一组系数 $\Phi(n)$, 使得通过公式 (5) 设计出的滤波器接近理想的情况, 即公式 (6) 成立. 该优化算法可以采用最小二乘法实现^[4-5], 但是, 该优化算法存在对某些具体频率上的幅值有约束要求时就不再能得到满意的解, 因此引入带约束的最小二乘法^[6].

2.1 约束最小二乘

最小二乘常用于解决最优化问题,而当有了约束条件后,求得的解并不是最优的.要解决带约束的最优化问题,可将解决约束的方法与最小二乘法结合.约束最小二乘法就是在最小二乘的基础上结合了拉格朗日乘子法.

设一组超定矛盾方程为:

$$\mathbf{A}_{(r \times e)} \mathbf{X} = \mathbf{f} \tag{7}$$

式中 $r \geq e$, $\text{rank}(\mathbf{A}) = e$ 式 (7) 的最小二乘解为: $\mathbf{X}_{\text{LS}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{f}$, 该 \mathbf{X}_{LS} 只能使得式 (7) 的所有 r 个方程近似满足.倘若其中有 r_m 个重要方程被要求精确满足,而其余 $r_s = r - r_m$ 个次要方程可以近似满足,对于这种情况,设式 (7) 中的 r_m 个重要方程和 r_s 个次要方程分别为: $\mathbf{A}_m \mathbf{X} = \mathbf{f}_m$, $\mathbf{A}_s \mathbf{X} = \mathbf{f}_s$, 这里 $r_m \leq e$ 和 $r_s \geq e$ 式 (7) 的约束最小二乘解 \mathbf{X}_{CLS} 描述为下列条件极值问题的解:

$$\|\mathbf{A}_s \mathbf{X} - \mathbf{f}_s\| = \min \tag{8}$$

使得 $\mathbf{A}_m \mathbf{X} = \mathbf{f}_m$.

现采用拉格朗日乘子法求解式 (8) 描述的条件极值问题,为此,首先建立拉格朗日函数:

$$L = \frac{1}{2} \|\mathbf{A}_s \mathbf{X} - \mathbf{f}_s\|^2 + \sum_i \alpha_i \left(\sum_j \mathbf{A}_{m \ i \ j} \mathbf{X}_j - \mathbf{f}_{m \ i} \right),$$
 然后由 $\partial L / \partial \mathbf{X}_j = 0$ 给出
$$(\mathbf{A}_s^T \mathbf{A}_s) \mathbf{X} - \mathbf{A}_s^T \mathbf{f}_s + \mathbf{A}_m^T \boldsymbol{\alpha} = 0 \tag{9}$$

由上式知

$$\mathbf{X} = (\mathbf{A}_s^T \mathbf{A}_s)^{-1} \mathbf{A}_s^T \mathbf{f}_s - (\mathbf{A}_s^T \mathbf{A}_s)^{-1} \mathbf{A}_m^T \boldsymbol{\beta} \tag{10}$$

将式 (10) 代入约束条件 (8), 则得:

$$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{B}_2^{-1} \mathbf{A}_m \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{A}_s^T \mathbf{f}_s - \mathbf{B}_2^{-1} \mathbf{f}_m, \tag{11}$$

其中

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{A}_s^T \mathbf{A}_s, \tag{12}$$

$$\mathbf{B}_2 = \mathbf{A}_m \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{A}_m^T. \tag{13}$$

最后将式 (11) 代回式 (10) 就导出约束最小二乘法 (CLS) 的解为

$$\mathbf{X}_{\text{CLS}} = \mathbf{B}_1^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{A}_m^T \mathbf{B}_2^{-1} \mathbf{A}_m \mathbf{B}_1^{-1}) \mathbf{A}_s^T \mathbf{f}_s + \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{A}_m^T \mathbf{B}_2^{-1} \mathbf{f}_m. \tag{14}$$

那么只要 \mathbf{A}_s 和 \mathbf{A}_m 分别为列满秩和行满秩矩阵, \mathbf{B}_1^{-1} 和 \mathbf{B}_2^{-1} 就存在, 这样, 式 (14) 表达的约束最小二乘解也就存在.

2.2 FIR 滤波器设计

取定 FIR 滤波器的阶数 N , 将 ω 的取值范围 $[0, \pi]$ 分为稠密的栅格, 用 $H(\omega)$ 逼近 $H_d(\omega)$, 由式 (5) 可知, 也就是要求出 $\Phi(n)$. 用约束最小二乘法来求解 $\Phi(n)$, 式 (7) 中的系数矩阵写为:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & \cos \omega_1 & \cos 2 \omega_1 & \dots & \cos (n-1) \omega_1 & \cos n \omega_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos \omega_m & \cos 2 \omega_m & \dots & \cos (n-1) \omega_m & \cos n \omega_m \end{bmatrix}.$$

其中, $\omega_i (i = 1, \dots, m)$ 频率分为稠密栅格, 且在 $\omega_1 = 0$ 和过渡带的一半处对幅值约束, 从而可得到相应的方程, 由式 (14) 可解出 FIR 滤波器系数 $\Phi(n)$.

3 实验结果

要求设计一个低通滤波器, 幅值满足下式:

$$H_d(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in [0, 0.2\pi], \\ 0 & \omega \in [0.3\pi, \pi]. \end{cases}$$

截止频率 $\omega_c = 0.3\pi$, 要求 $H(0) = 1$, 过渡带的一半 $\omega = 0.25\pi$ 处 $H(\omega_c) = 0.5$ 用阶数 $N = 11$ 进行了设计, 表 1 列出了设计结果, 为了比较, 也用一般遗传算法^[2] 及改进的遗传算

表 1 FIR 的设计结果
Table 1 Results of FIR design

算法	$H(0)$	$H(\omega_c)$	误差	耗时 /s
约束最小二乘	1.000 0	0.500 0	35.353	0.7500
一般遗传算法	1.015 6	0.549 5	132.572	2 616.6
改进遗传算法	1.009 9	0.540 8	36.764	2 523.8

法^[3]设计同样的滤波器, 其中改进的遗传算法中采用自适应的交叉与变异概率, 运行 20 次的平均结果也列于表 1 在图 3 中是两种遗传算法得到的最好误差时的情况. 实验用 matlab 实现^[7].

由实验不难看出, 同是求最优解, 约束最小二乘法比遗传算法在约束频率处的幅值更精确, 速度更快, 更稳定, 所得的平均误差也最小.

4 结论

运用最小二乘的思想, 借助拉格朗日法解决带等式约束的 FIR 滤波器的设计, 实验结果证明了其有效性. 这种方法计算简便, 易于实现, 具有通用性, 更改优化函数可实现其它类型的优化设计. 与遗传算法相比执行速度快且结果稳定.

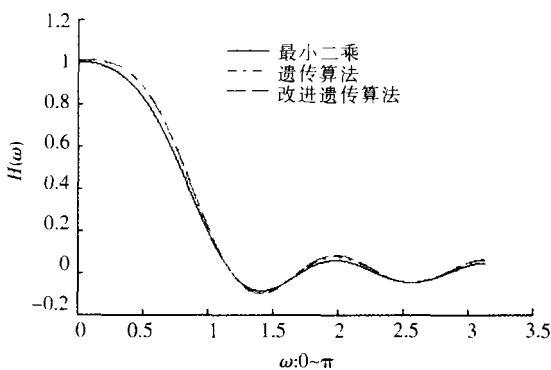


图 3 实验结果

Fig.3 Results of experiment

[参考文献] (References)

- [1] 赖晓平. FIR 滤波器约束 Minimax 设计算法 [J]. 系统工程与电子技术, 2002, 24(2): 84-88
Lai Xiaoping. Constrained Minimax design algorithm for FIR filters [J]. Systems Engineering and Electronics, 2002, 24(2): 84-88 (in Chinese)
- [2] 杨福宝. 基于遗传算法的 FIR 数字滤波器的优化设计 [J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2002, 26(4): 478-480
Yang Fubao. Optimal FIR filter design via genetic algorithm [J]. Journal of Wuhan University of Technology: Transportation Science and Engineering Edition, 2002, 26(4): 478-480 (in Chinese)
- [3] 李财莲, 刘春林, 岳振军. 基于小生境遗传算法的约束滤波器优化设计 [J]. 解放军理工大学学报: 自然科学版, 2004, 5(2): 28-32
Li Cailian, Liu Chunlin, Yue Zhengjun. Constrained optimal filters design method based on niche genetic algorithms [J]. Journal of PLA University of Science and Technology: Natural Science Edition, 2004, 5(2): 28-32 (in Chinese)
- [4] Algazi M insoo Suk V, Rin Chongsuck. Design of almost minimax FIR filters in one and two dimensions by WLS techniques [J]. Circuits and Systems IEEE Transactions on, 1986, 33(6): 590-596
- [5] Tarczynski A, Cain G D, Hamanowicz E, et al. WLS design of variable frequency response FIR filters [D]. Proceedings of 1997 IEEE International Symposium on, 1997, 4(9): 2244-2247.
- [6] 张德文, 魏阜旋. 再论约束最小二乘法 [J]. 计算力学学报, 2000, 17(4): 398-404
Zhang Dewen, Wei Fuxuan. Discuss least-squares algorithm again [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2000, 17(4): 398-404 (in Chinese)
- [7] 刘金钊. 先进 PID 控制 MATLAB 仿真 [M]. 2 版. 北京: 电子工业出版社, 2004
Liu Jinkun. Advanced PID Controller and Simulated in MATLAB [M]. 2nd ed. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2004 (in Chinese)

[责任编辑: 刘 健]