

复合球体非稳态导热的理论解及实例分析

张 奕^{1,2}, 王子介¹, 张小松², 王 朋¹, 戴征舒¹

(1. 南京师范大学 动力工程学院, 江苏 南京 210042 2. 东南大学 动力工程系, 江苏 南京 210096)

[摘要] 针对二层复合球体在第三类边界条件下的导热微分方程进行了分析求解. 以法国 Cristopia 公司的 C-00 型蓄冷冰球为例, 对温度函数进行求解, 分析了温度函数中特征值、指数值的变化规律. 当水分别处于固态和液态时, 画出了 3 个典型时刻冰和水的温度曲线. 结果表明, 在相同的表面传热条件下, 冰和水的最外层几乎同时达到 0℃. 冰内温度变化比水内变化更剧烈, 水开始结冰比冰开始融化需要更长的时间. 提供的理论解可用于对相关导热问题的求解, 以及为近似解或数值解的准确性提供检验标准.

[关键词] 复合球体, 储能球体, 非稳态导热, 温度函数, 温度曲线

[中图分类号] TQ021.3 **[文献标识码]** A **[文章编号]** 1672-1292(2007)01-0037-04

Analytical Solution for the Heat Conduction Problem in a Compound Sphere and its Applications to an Incapsulated PCM

Zhang Yi^{1,2}, Wang Zijie¹, Zhang Xiaosong², Wang Peng¹, Dai Zhengshu¹

(1. School of Power Engineering, Nanjing Normal University, Nanjing 210042, China)

(2. Department of Power Engineering, Southeast University, Nanjing 210096, China)

Abstract The transient energy equation of a hollow sphere filled with phase change material (PCM) used to store thermal energy is analytically resolved under the third boundary condition with no phase change taking place. The temperature function is resolved with a typical ice cool storage sphere, and some characteristics of the eigenvalue and the value of the index function are presented with the C-00 type of stored ice ball of a French company of Cristopia as an example. When water is in solid state and liquid state, the temperature curves of water and ice are drawn at 3 typical temperatures. Under the same heat transfer conditions, it was found that the time needed for water to freeze is much longer than the time needed for ice to melt, and the time needed for the most outsides of water and ice to reach the phase change temperature are almost the same. The temperature field in ice shows a more sharp change than that in water during the same time. The analytical solution can be used to resolve the transient conduction problem in a hollow sphere, and it can provide a standard for evaluating the results of some approximate methods, such as integral methods and numerical methods.

Key words compound sphere; thermal storage sphere; transient heat conduction; temperature function; temperature curve

球体导热广泛存在于诸如燃烧、化学反应、物料分离/混合过程、沸腾/凝结、液体雾化、烟雾净化等实际工程问题中. 近年来, 随着能量储存技术的研究和应用, 将相变储能介质 (PCM) 封装于球形容器中的储能方式被普遍使用, 比如冰球蓄冷、微胶囊储能等. 由于在储能球体的总传热过程中, 储能介质进行相变传热是主要的传热过程, 因此目前对储能球体中传热过程的研究主要集中在对相变过程的传热特点进行研究. 但是, 储能介质在融化和冻结前温度变化的特点, 对深入了解储能球体整个传热过程的特点同样具有重要的意义.

球体和传热流体间进行表面传热时, 球体内导热过程曾被广泛研究过. 对球体的非稳态导热过程进行

收稿日期: 2006-06-07

基金项目: 国家自然科学基金 (50376052)、江苏省高校自然科学基金 (06KJD480097) 资助项目.

作者简介: 张 奕 (1968-), 副教授, 博士研究生, 主要从事建筑节能与储能的教学与研究. E-mail: zhangyi@njnu.edu.cn

分析首先是由 Fourier 进行的, Fourier 试图用他的研究结果确定地球的年龄. Cooper^[1]对球体和无限大传热介质间进行传热时球体内的导热过程进行了研究, 在该研究中, 传热介质的温度具有阶跃变化的特点. Michaelides 等^[2]对传热流体和球体内具有任意初始温度场时球体的导热问题进行了研究, 获得了在蠕变流动条件下球体非稳态导热的解析解. Branco 等^[3]研究了外包绝热层的复合球体和流体间进行表面传热时一维非稳态导热过程, 并比较了在常表面传热系数和表面传热系数按指数规律变化时绝热层中的导热特点, 分析了球体的临界热绝缘问题. 吕情恒等^[4]对加热炉中蓄热球体的非稳态导热过程进行了数值计算, 分析了影响蓄热球体热饱和时间的因素. 梁基照等^[5]用数值计算软件对将中空微球填充在 NR 复合材料中形成的三元复合体系的等效热导率进行了计算. 陈丽萍等^[6]对在第一类边界条件下球体的导热过程进行了解析求解, 并讨论了理论解的结果和球体分形学参数间的关系.

本文将对第三类边界条件下储能球体一维非稳态导热问题进行理论求解, 并对理论解进行实例分析, 以了解储能材料在融化和冻结相变前的传热特点.

1 传热方程的理论解

假设储能材料和封装储能材料的球壁开始时都具有均匀的初始温度 t_0 , 然后被放进温度为 t_f 的传热流体中, 球壳外壁和传热流体间具有恒定的表面传热系数 h . 控制该复合球体导热过程的微分方程及初、边值条件为:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial t_j}{\partial r} \right) = \frac{1}{a_j} \frac{\partial t_j}{\partial \tau} \quad \tau > 0 \quad 0 \leq r \leq R_i \text{ 时 } j = 1 \quad R_i \leq r \leq R_o \text{ 时 } j = 2$$
$$t = \text{有限值} \quad \tau > 0 \quad r = 0$$
$$t_1 = t_2, \quad \lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial r} = \lambda_2 \frac{\partial t_2}{\partial r} \quad \tau > 0 \quad r = R_i$$
$$-\lambda_2 \frac{\partial t_2}{\partial r} = h(t_2 - t_f) \quad \tau > 0 \quad r = R_o$$
$$t_1 = t_2 = t_0 \quad \tau = 0 \quad 0 \leq r \leq R_o$$

(1)

(1) 式中, t_1 、 t_2 为储能材料和球壁的温度函数; a_1 、 a_2 、 λ_1 、 λ_2 为储能材料和球壁的热扩散率和热导率, a_1 、 λ_1 在储能材料处于不同相态时具有不同值; R_i 、 R_o 分别为球壁的内、外半径.

在方程组 (1) 中由于存在非齐次的表面传热边界条件, 因此整个方程组是非齐次的. 通过引入过剩温度 $\theta = t - t_f$ 可以将导热微分方程及初、边值条件转化成齐次的常微分方程组.

球体的一维齐次非稳态导热问题, 其过剩温度函数 θ 可进行变量分离, 成为:

$$\theta_j(r, \tau) = \Psi_j(r) \cdot \Gamma_j(\tau), \quad j = 1, 2$$

(2)

将 (2) 代入 (1), 可解出过剩温度函数为:

$$\frac{\theta_j(r, \tau)}{\theta_0} = \frac{t_j - t_f}{t_0 - t_f} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{N_n} e^{-\beta_n^2 \tau} \Psi_{jn} \left[\frac{\lambda_1}{a_1} \int_{R_i}^{R_o} r^2 \Psi_{1n} dr + \frac{\lambda_2}{a_2} \int_{R_i}^{R_o} r^2 \Psi_{2n} dr \right], \quad j = 1, 2$$

(3)

(3) 式中的特征值 β_n 由下面的行列式所决定的超越方程求解:

$$\begin{vmatrix} -\sin(\beta_n u) & \sin(\beta_n v) & \cos(\beta_n w) \\ \lambda_1 \left[\frac{\sin(\beta_n u)}{R_i} - \frac{\beta_n \cos(\beta_n u)}{\sqrt{a_1}} \right] & \lambda_2 \left[\frac{-\sin(\beta_n v)}{R_i} + \frac{\beta_n \cos(\beta_n v)}{\sqrt{a_2}} \right] & \lambda_2 \left[\frac{-\cos(\beta_n w)}{R_i} - \frac{\beta_n \sin(\beta_n w)}{\sqrt{a_2}} \right] \\ 0 & \lambda_2 \left[\frac{-\sin(\beta_n w)}{R_o} + \frac{\beta_n \cos(\beta_n w)}{\sqrt{a_2}} \right] + h \sin(\beta_n w) & \lambda_2 \left[\frac{-\cos(\beta_n w)}{R_o} - \frac{\beta_n \sin(\beta_n w)}{\sqrt{a_2}} \right] + h \cos(\beta_n w) \end{vmatrix} = 0$$

(4)

其中: $u = \frac{R_i}{\sqrt{a_1}}, \quad v = \frac{R_i}{\sqrt{a_2}}, \quad w = \frac{R_o}{\sqrt{a_2}}$

(3) 式中的函数 $\Psi_{1n}(r)$ 、 $\Psi_{2n}(r)$ 是和特征值 β_n 对应的特征函数, 分别为:

$$\begin{aligned}\Psi_{1n}(r) &= \frac{1}{r} \sin\left[\frac{\beta_n}{\sqrt{a_1}} r\right], \quad n = 1, 2, 3, \dots \\ \Psi_{2n}(r) &= \frac{1}{r} \left[A_{2n} \sin\left[\frac{\beta_n}{\sqrt{a_2}} r\right] + B_{2n} \cos\left[\frac{\beta_n}{\sqrt{a_2}} r\right] \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots\end{aligned}\quad (5)$$

特征函数 Ψ_{2n} 的系数 A_{2n} 和 B_{2n} 由相应的 β_n 按下面的方程求解:

$$\begin{bmatrix} -\sin(\beta_n u) & \sin(\beta_n v) & \cos(\beta_n v) \\ \lambda_1 \left[\frac{\sin(\beta_n u)}{R_i} - \frac{\beta_n \cos(\beta_n u)}{\sqrt{a_1}} \right] & \lambda_2 \left[\frac{-\sin(\beta_n v)}{R_i} + \frac{\beta_n \cos(\beta_n v)}{\sqrt{a_2}} \right] & \lambda_2 \left[\frac{-\cos(\beta_n v)}{R_i} - \frac{\beta_n \sin(\beta_n v)}{\sqrt{a_2}} \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ A_{2n} \\ B_{2n} \end{bmatrix} = 0\quad (6)$$

(3) 式中的范数 N_n 由特征函数按下式求出:

$$N_n = \frac{\lambda_1}{a_1} \int_0^{R_i} r^2 \Psi_{1n}^2 dr + \frac{\lambda_2}{a_2} \int_{R_i}^R r^2 \Psi_{2n}^2 dr\quad (7)$$

至此, (3) 式中的特征值 β_n 、特征函数 Ψ_{1n} 、 Ψ_{2n} 以及范数 N_n 已全部解出, 由 (1) 式决定的储能材料和球壁的温度场可用 (3) 式求解。

2 解的实例分析

(3) 式表示的温度场是关于复合球体的 4 个物性参数、表面传热系数、球壁内、外半径以及时间的复杂函数。为简化分析, 以空调蓄冷工程中常用的一种蓄冷冰球为例, 对 (3) 式表示的复合球体的温度场的特点进行分析。

法国 Cristopia 公司冰球蓄冷装置中使用的 C-00 型冰球具有很好的蓄冷性能, 在冰球蓄冷装置中被广泛使用。该冰球外壳由高密度聚乙烯制成, 其外半径为 48 mm, 内半径为 46 mm, 聚乙烯的热导率为 $0.291 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$, 热扩散率为 $1.211 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ 。冰球内为去离子水和成核添加剂混合物, 固态时的热导率为 $2.268 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$, 热扩散率为 $1.18 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ 。液态时的热导率为 $0.562 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$, 热扩散率为 $1.34 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ 。

蓄冷冰球中非稳态导热过程的特点主要由内部蓄冷介质的导热过程决定, 下面的分析过程主要分析蓄冷介质的温度变化特点。

在 (3) 式中定义付里叶数 $Fo = a\tau/R_i^2$, 其中 a 可以是冰或水的热扩散率。以 3 个表面传热系数为代表, 计算了球壳内水分别为固态和液态时, 由 (4) 式求解出的前 4 个特征值, 如图 1 所示。当 $Fo = 0.2$ 时, 图 2 画出无穷级数的前 4 个指数值。

比较图 1 的特征值可以看出, 无论储能材料处于何种相态, 或表面传热系数是多少, 特征值随下标 n 都具有单调增加的特点。

比较图 2 的指数值可以发现, 无论在何种条件下, $Fo = 0.2$ 时, 指数值的第二项已迅速衰减。经计算, 蓄冷介质为冰时, 第二项的值最大约为第一项的 2.8%。蓄冷介质为水时, 第二项的值最大约为第一项的 2.4%。因此, 对于 $Fo = 0.2$ 及以后的时刻, 温度函数的计算只取级数和的第一项即具有足够的精度。

图 3 为蓄冷介质在 3 个典型时刻的温度分布曲线。其中曲线 1 水的初温为 5°C , 受 -5°C 传热流体冷却, 表面传热系数为 $100 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$, 冷却时间为 320

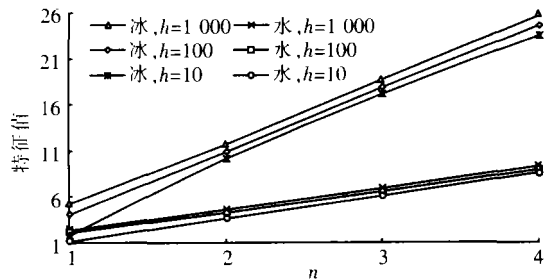


图 1 温度函数前 4 个特征值的比较

Fig.1 Compare of the first to forth eigenvalues of Equ.(3)

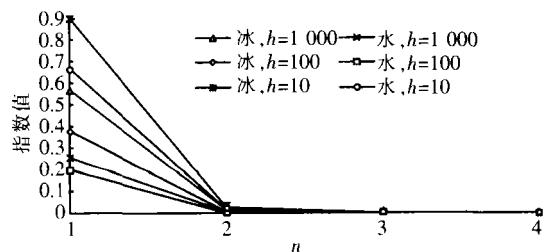


图 2 温度函数前 4 个指数值的比较

Fig.2 Compare of the first to forth values of the index function of Equ.(3)

s 这时紧靠球壳的水温已达到相变温度, 但根据相变条件, 水至少要到 -3°C 才可能结冰. 曲线 3 为水被冷却 1 650 s 时的温度曲线, 这时紧靠球壳的水温已达到 -3°C , 此后水可能结冰, 温度场不能再用 (3) 式表示.

曲线 2 冰的初始温度为 -5°C , 受 5°C 传热流体加热, 表面传热系数为 $100\text{ W}/(\text{m}^2\cdot\text{K})$, 加热时间为 310 s 这时紧靠球壳的温度已达到 0°C , 此后球内的冰开始融化, 温度场不再符合 (3) 式.

比较图 3 的曲线, 在相同的表面传热传热条件下, 球内的水和冰达到 0°C 所需的时间几乎相等, 这是因为球壳很薄的原因. 但在这段时间内, 冰的温度场变化比水的变化要大得多, 这是因为冰的热扩散率比水大将近 10 倍的缘故. 另外, 相同条件下, 冰只要约 5 mm 即开始融化, 而液态水由于在结冰前固有的过冷现象, 要大约 28 mm 才开始结冰.

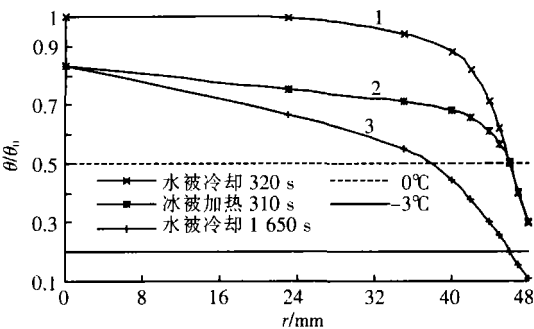


图 3 水和冰温度场比较
Fig.3 Compare of the temperature fields of the water and ice encapsulated in the hollow sphere

3 结论

- (1) 二层复合球体导热的温度场可以用 (3) 式表示的温度函数及与其相应的特征值方程、特征函数方程及范数方程精确求解.
- (2) 特征值具有随下标单调增加的性质. 对于本文定义的无量纲导热时间 F_0 计算结果表明, 当 $F_0 \gg 0.2$ 时, 表示温度函数的无穷级数只取第一项即具有较好的精度.
- (3) 球内水分别处于液态和固态时, 在相同的表面传热条件下, 水和冰几乎同时达到相变温度, 但冰的温度场的变化比水的变化大得多. 由于水结冰时具有过冷行为, 水开始结冰所需要的时间比冰开始融化需要的时间长得多.

[参考文献] (References)

[1] Cooper F. Heat transfer from a sphere to an infinite medium [J]. Int J Heat Mass Transfer, 1977, 20(5): 991-993.

[2] Michaelides E E, Feng Z G. Heat transfer from a rigid sphere in a nonuniform flow and temperature field [J]. Int J Heat Mass Transfer, 1994, 37(11): 2069-2076.

[3] Branco J E, Pinho C T, Figueiredo R A. Heat conduction in the hollow sphere with a power-law variation of the external heat transfer coefficient [J]. International Communications in Heat and Mass Transfer, 2000, 27(8): 1067-1076.

[4] 吕情恒, 程素森, 杨天钧. 球体蓄热体的热饱和时间 [J]. 北京科技大学学报, 2004, 26(4): 366-368.
Lü Qingheng, Cheng Susen, Yang Tianjun. Heat saturating time of solid sphere regenerator [J]. Journal of University of Science and Technology Beijing, 2004, 26(4): 366-368 (in Chinese).

[5] 梁基照, 李锋华. NR/中空微球复合材料传热的有限元分析 [J]. 橡胶工业, 2004, 51(10): 586-589.
Liang Jizhao, Li Fenghua. FEA of heat transfer in NR/hollow bead composite [J]. China Rubber Industry, 2004, 51(10): 586-589 (in Chinese).

[6] 陈丽萍, 段毅文, 德格吉玛. 不稳态导热问题的分析求解方法及解析解 [J]. 内蒙古石油化工, 1997, 25(1): 9-11.
Chen Liping, Duan Yiweng, De Gejima. The analytical method and results of the problem of unstable heat conduction [J]. Inner Mongolia Petrochemical Industry, 1997, 25(1): 9-11 (in Chinese).

[7] 奥齐克 M N. 热传导 [M]. 俞昌铭译. 北京: 高等教育出版社, 1983.
Ozisik M N. Heat Conduction [M]. Yu Changming Translation. Beijing: Higher Education Press, 1983 (in Chinese).

[责任编辑: 刘 健]