第 7卷第 1期
2007年 3月
南京师范大学学报(工程技术版)
JOURNAL OF NANJING NORMAL UNIVERSITY (ENGINEERING AND TECHNOLOGY EDITION)
Vol. 7 No. 1
Mar, 2007

Levy过程驱动下的欧式期权定价和套期保值

黄伯强[1,2], 杨纪龙[1], 马树建[1]

(1. 南京师范大学 数学与计算机科学学院, 江苏 南京 210097; 2. 南京师范大学 中北学院, 江苏 南京 210097)

[摘要] 在传统 B-S模型中, 假定资产的价格服从 Brown运动, 是一个连续随机过程. 然而当一些重大事件发生时, 市场价格会发生大的波动, 为描述这种现象, 需要引入不连续随机过程. 研究了标的资产由 Levy过程驱动的欧式期权定价, 假定无风险利率和波动率都是一般随机过程, 通过等价测度变换, 在 Q 测度下, 得出不完全市场下的欧式期权定价公式和套期策略. 所得结论具有一般性, 且证明的方法具有优越性.

[关键词] 期权定价, 跳扩散过程, Levy过程
[中图分类号] O211.6; F830.9 [文献标识码] A [文章编号] 1672-1292(2007)01-0078-07

European Option Pricing and Hedging Driven by the Levy Process

Huang Boqiang, Yang Jilong, Ma Shujian

(1. School of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, Nanjing 210097, China;
2. College of Zhong Bei, Nanjing Normal University, Nanjing 210097, China)

Abstract In financial mathematics, European-style option pricing and hedging in a jump-diffusion model are often concerned. In the traditional Black-Scholes models, the stock price is driven by the Brown motion. It is a continuous random process. However, some important events can lead to brusque variations in price. To model this kind of phenomena, this paper introduces a discontinuous stochastic process where the European-style stock price is driven by the Levy process. The risk free rate and volatility are stochastic processes. By change of probability measure, under the probability Q, this paper obtains a pricing formula and hedging of European-style option in incomplete market models. The results of paper is general, and the method of the paper is better.

Key words: option pricing, jump-diffusion process, Levy process

0 引言

自 Black和 Scholes提出期权的定价公式[1]以来, 期权定价就一直是金融数学和计量经济学研究的一个重要内容. 很多文献对于股票价格波动规律进行了研究. Robert C. Merton早在 1976年就注意到当一些重大信息到达时, 标的股票的价格会发生不连续的变动, 即跳跃, 并指出标的资产的收益是由标准几何 Brown运动引起的连续变动和 Poisson过程引起的跳跃共同作用的结果. 基于这种考虑 Merton建立了跳-扩散模型[2], 并给出了在这种模型下欧式看涨期权的定价公式. 本文研究由 Levy过程驱动的欧式期权的定价, 假定利率 $r(t)$和波动率是一般的随机过程, 由 Levy过程和随机积分的知识, 在等价测度 Q 下得到定价公式以及套期保值策略. 由于 Brown运动和 Poisson过程都是 Levy过程的特殊情形, 因此, 本文的研究更具有一般性.

1 模型

设 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 是一个完备概率空间, $X = (X(t))_{t\geqslant 0}$ 是定义在其上的一个 Levy过程, $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 是由 $(X(t))_{t\geqslant 0}$ 生成的自然 σ 域. $X = (X(t))_{t\geqslant 0}$ 具有标准分解式:

收稿日期: 2006-04-26
作者简介: 黄伯强(1981-), 助教, 主要从事金融数学方面的教学与研究. E-mail: boqianghuang@126.com
通讯联系人: 杨纪龙(1947-), 副教授, 主要从事金融数学和概率统计方面的教学与研究. E-mail: yangjilong@njnu.edu.cn

$$X(t) = bt + KB(t) + \int_{\mathbf{R}} xN(t, dx), \ \forall t \geqslant 0, \tag{1}$$

其中, $b = E(X(1))$, $K > 0$为常数, $B(t)$为标准布朗运动, $N(t, \cdot)$是与$B(t)$独立的校正的泊松随机测度. 记 ν为X的 Levy测度, 则X由三重组(b, k, ν)惟一确定.

设市场上有两种资产, 一种是无风险资产 A, 它在时刻 t的价格为$A(t)$. 它满足方程 $dA(t) = r(t)A(t)dt$, 其中无风险利率 $r(t) \geqslant 0$是$(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$适应过程. 上述方程的解为$A(t) = A(0)e^{\int_0^t r(u)du}$, 不妨设$A(0) = 1$, 于是$A(t) = e^{\int_0^t r(u)du}$. 另一种资产是风险资产 S, 它在时刻 t的价格为$S(t)$, 它满足方程

$$dS(t) = S(t-)dY(t) = S(t-)(\mu(t)dt + \sigma(t)dX(t)), \tag{2}$$

其中, $\mu(t)$, $\sigma(t) > 0$是随机过程, $S(t-)$表示左极限, $X(t)$是由式(1)表示的 Levy过程, 于是

$$dS(t) = S(t-)\left[(\mu(t) + b\sigma(t))dt + K\sigma(t)dB(t) + \int_{\mathbf{R}} x\sigma(t)N(dt, dx)\right]. \tag{3}$$

提出如下假设:

(1) 存在常数$M > 0$, 使得$\int_{|x|\geqslant 1} e^{ux}\nu(dx) < \infty$, $\forall |u| < M$;

(2) $\inf(\Delta Y(t), t > 0) > -1 \quad a.s. \ P$.

假设(2)等价于 $\inf(\sigma(t)\Delta X(t), t > 0) > -1 \quad a.s. \ P$或$\sigma(t)\Delta X(t) > -1, \quad \forall t > 0 \quad a.s. \ P$. 它的一个充分条件是 $\Delta X(t) > c$, 其中 $c = -(\max \ \sigma(t))^{-1}$.

在上述假设下, 利用 Ito公式(取$f(S(t)) = \ln S(t)$), 可得

$$S(t) = S(0)\exp\left\{\int_0^t \left(\mu(u) + b\sigma(u) - \frac{1}{2}K^2\sigma^2(u)\right)du + \int_0^t K\sigma(u)dB(u) + \right.$$
$$\left.\int_0^t\int_c^\infty \ln(1 + x\sigma(u))N(du, dx) + \int_0^t\int_c^\infty [\ln(1 + x\sigma(u)) - x\sigma(u)]\nu(dx)du\right\}. \tag{4}$$

2 测度变换

2.1 指数鞅

命题 1 $\forall F(t) \in \mathscr{H}_2(T)$, 令 $Y_1(t) = \int_0^t F(u)dB(u) - \frac{1}{2}\int_0^t F^2(u)du$, 则$(e^{Y_1(t)})_{0\leqslant t\leqslant T}$是指数鞅. $\forall H(t, x) \in \mathscr{H}_2(T, E)$, 其中$E \in \mathscr{B}(\mathbf{R} - \{0\})$, 令$Y_2(t) = \int_0^t\int_E H(u, x)N(du, dx) - \int_0^t\int_E (e^{H(u,x)} - 1 - H(u, x))\nu(dx)du$, 则$(e^{Y_2(t)})_{0\leqslant t\leqslant T}$是指数鞅, 且$(e^{Y(t)})_{0\leqslant t\leqslant T} = (e^{Y_1(t)+Y_2(t)})_{0\leqslant t\leqslant T}$是指数鞅.

命题 2 令$N_Q(t, E) = N(t, E) - \int_0^t\int_E (e^{H(u,x)} - 1)\nu(dx)du = N(t, E) - \int_0^t\int_E e^{H(u,x)}\nu(dx)du$, 则对任意给定的$E \in \mathscr{B}(\mathbf{R} - \{0\})$, $(N_Q(t, E))_{0\leqslant t\leqslant T}$在$Q$下是鞅, 对任意给定的 $t \geqslant 0$, $N_Q(t, \cdot)$是Q鞅值测度.

命题 3 记 $\nu_Q(t, E) = \int_0^t\int_E e^{H(u,x)}\nu(dx)du$, $\nu_Q(dt, dx) = e^{H(t,x)}\nu(dx)dt$, 对任意给定的 $G(t) \in \mathscr{H}_2(T)$, $L(t, x) \in \mathscr{H}_2(T, E)$, 令

$$Y(t) = \int_0^t G(u)dW(u) - \frac{1}{2}\int_0^t G^2(u)du + \int_0^t\int_E L(u, x)N_Q(du, dx) -$$
$$\int_0^t\int_E (e^{L(u,x)} - 1 - L(u, x))\nu_Q(du, dx), \tag{5}$$

则$(e^{Y(t)})_{0\leqslant t\leqslant T}$在$Q$下是指数鞅.

注: 本文未经证明的定理、命题均引自文[4].

2.2 S(t)是Q-鞅的充要条件

定理 1 任取$F(t) \in \mathscr{H}_2(T)$, $H(t, x) \in \mathscr{H}_2(T, E)$, 其中$E = [c, \infty)$. 令$W(t) = B(t) - \int_0^t F(u)du$, $\nu_Q(t, E) = \int_0^t\int_E e^{H(u,x)}\nu(dx)du$, $N_Q(t, E) = N(t, E) - \int_0^t\int_E (e^{H(u,x)} - 1)\nu(dx)du = N(t, E) - \nu_Q(t, E)$, 则

$S(t)$是Q-鞅的充要条件是对几乎所有的$t \geqslant 0$有$\mu(t)+b\sigma(t)-r(t)+K\sigma(t)F(t)+\int_c^{\infty} x\sigma(t)(e^{H(t,x)}-1)\nu(dx)=0\ a.s.P$.

证明　由(4)式有

$$S(t)=S(0)\exp\left\{\int_0^t\left[\mu(u)+b\sigma(u)-r(u)-\frac{1}{2}K^2\sigma^2(u)\right]du+\int_0^t K\sigma(u)(dW(u)+F(u)du)+\right.$$
$$\int_0^t\int_c^{\infty}\ln(1+x\sigma(u))N_Q(du,dx)+\int_0^t\int_c^{\infty}\ln(1+x\sigma(u))(e^{H(u,x)}-1)\nu(dx)du+$$
$$\left.\int_0^t\int_c^{\infty}[\ln(1+x\sigma(u))-x\sigma(u)]\nu(dx)du\right\}=$$
$$S(0)\exp\left\{\int_0^t K\sigma(u)dW(u)-\frac{1}{2}\int_0^t K^2\sigma^2(u)du+\int_0^t\int_c^{\infty}\ln(1+x\sigma(u))N_Q(du,dx)+\right.$$
$$\int_0^t\int_c^{\infty}[\ln(1+x\sigma(u))-x\sigma(u)]\nu_Q(du,dx)+$$
$$\left.\int_0^t\left[\mu(u)+b\sigma(u)-r(u)+K\sigma(u)F(u)+\int_c^{\infty}x\sigma(u)(e^{H(u,x)}-1)\nu(dx)\right]du\right\}.$$

由于$S(0)\exp\left\{\int_0^t K\sigma(u)dW(u)-\frac{1}{2}\int_0^t K^2\sigma^2(u)du+\int_0^t\int_c^{\infty}\ln(1+x\sigma(u))N_Q(du,dx)+\int_0^t\int_c^{\infty}[\ln(1+x\sigma(u))-x\sigma(u)]\nu_Q(du,dx)\right\}$在$Q$下是指数鞅(在式(5)中令$G(t)=K\sigma(t)$, $L(t,x)=\ln(1+x\sigma(t))$即得),因此$S(t)$是Q-鞅的充要条件是对几乎所有的$t \geqslant 0$有$\mu(t)+b\sigma(t)-r(t)+K\sigma(t)F(t)+\int_c^{\infty}x\sigma(t)(e^{H(t,x)}-1)\nu(dx)=0\quad a.s.\quad Q$.

由于$Q \sim P$,因此$S(t)$是Q-鞅的充要条件是对几乎所有的$t \geqslant 0$有:

$$\mu(t)+b\sigma(t)-r(t)+K\sigma(t)F(t)+\int_c^{\infty}x\sigma(t)(e^{H(t,x)}-1)\nu(dx)=0\quad a.s\quad P \tag{6}$$

易见若$K \neq 0$且$\nu \neq 0$,则满足上式的(F,H)有无穷多对,因此使$S(t)$是Q-鞅的等价鞅测度Q有无穷多个,这表明市场是可行的,但不是完全的.

特别的,若$K \neq 0$且$\nu=0$或取$H(t,x)\equiv 0$,则式(6)有惟一解$F(t)=\dfrac{r(t)-\mu(t)-b\sigma(t)}{K\sigma(t)}$.

取$F(t)$, $H(t,x)$满足式(6),则

$$S(t)=S(0)\exp\left\{\int_0^t K\sigma(u)dW(u)-\frac{1}{2}\int_0^t K^2\sigma^2(u)du+\int_0^t\int_c^{\infty}\ln(1+x\sigma(u))N_Q(du,dx)+\right.$$
$$\left.\int_0^t\int_c^{\infty}[\ln(1+x\sigma(u))-x\sigma(u)]\nu_Q(du,dx)\right\}, \tag{7}$$

由Levy型随机积分的Ito公式,有:

$$dS(t)=S(t-)\left[K\sigma(t)dW(t)+\int_c^{\infty}x\sigma(t)N_Q(dt,dx)\right]. \tag{8}$$

3　欧式期权定价

3.1　自筹资策略

某投资者要对这两种资产进行投资,在时刻t他投资于这两种资产的份额分别为$\alpha(t)$、$\beta(t)$,该投资策略(或组合)记为$\phi=(\alpha(t),\beta(t),0\leqslant t\leqslant T)$,它在时刻$t$的价值为$V(t)=\alpha(t)A(t)+\beta(t)S(t)$,其折现值为$V(t)=\alpha(t)+\beta(t)S(t)$.

假设$\alpha(t)$, $\beta(t)\in H_2(T)$,称ϕ为自筹资的,如果它满足$V(t)=V(0)+\int_0^t\alpha(u)dA(u)+\int_0^t\beta(u)dS(u)$或$dV(t)=\alpha(t)r(t)e^{\int_0^t r(u)du}dt+\beta(t)dS(t)$,由Ito公式可以证明:$\phi$为自筹资策略的充要条件是:

$$V(t) = V(0) + \int_0^t \beta(u)\mathrm{d}S(u) \quad \text{a s} P\ \forall t \in [0, T], \tag{9}$$

又 $V(t) = \alpha(t) + \beta(t)S(t)$, 则 $\alpha(t) = V(0) + \int_0^t \beta(u)\mathrm{d}S(u) - \beta(t)S(t)$, 因此 $(\alpha(t))_{0\leqslant t\leqslant T}$, $(\beta(t))_{0\leqslant t\leqslant T}$ 和 $V(0)$ 三者中的两者可以惟一确定另一个.

对于任意选定的满足条件式 (6) 的 $F(t)$, $H(t, x)$, $S(t)$ 是 Q – 鞅且具有形式 (7) 或 (8). 于是由 (9) 式, 有:

$$V(t) = V(0) + \int_0^t \beta(u)S(u-)K\sigma(u)\mathrm{d}W(u) + \int_0^t\int_c^\infty \beta(u)S(u-)x\sigma(u)N_Q(\mathrm{d}u, \mathrm{d}x), \tag{10}$$

由于 $W(t)$, $N_Q(t, \cdot)$ 在 Q 下均为鞅值测度, 故在 $\beta(u)\sigma(u)S(u-) \in \mathscr{H}_2(T)$ 的条件下, $V(t)$ 是 Q 鞅.

3.2 期权定价

记欧式期权的未定权益为 $h = f(S(T))$, 其中 $f(x) = (x-K)_+$ (call), $f(x) = (K-x)_+$ (put). 由于市场是不完全的, 因此对给定的 h, 未必存在复制策略, 即未必存在使得 $V(T) = h$ 的自筹资策略 ϕ. 下面给出不完全市场期权定价的一种方法, 假定期权的出售者在时刻 0以价格 $V(0)$ 出售一份期权, 并采用某种自筹资策略 $\phi = (\alpha(t), \beta(t))_{0\leqslant t\leqslant T}$ 进行投资以便套期保值, 在时刻 T 其收益为 $V(T) - h$, 其折现值为 $V(T) - h = \mathrm{e}^{-\int_0^T r(u)\mathrm{d}u}(V(T) - h)$, 以均方作为其风险, 即以 $R_0^T = E_Q(V(T) - h)^2 = E_Q\left(\mathrm{e}^{-\int_0^T r(u)\mathrm{d}u}(V(T) - h)\right)^2$ 作为风险.

因 $V(t)$ 是 Q 鞅, 故 $E_Q(V(T)) = V(0)$, $E_Q(V(T) - h) = V(0) - E_Q(h)$, 于是:

$$\begin{aligned} R_0^T &= E_Q[(V(0) - E_Q(h)) + (V(T) - V(0) - h + E_Q(h))]^2 = \\ & E_Q(V(0) - E_Q(h))^2 + E_Q(V(T) - V(0) - h + E_Q(h))^2, \end{aligned} \tag{11}$$

上式右边第一项仅依赖于 $V(0)$, 由式 (11) 知第二项仅依赖于 $\beta(t)$ 而与 $V(0)$ 无关. 对于期权售出者而言, 在套期保值中应使风险尽可能地小, 为使 R_0^T 最小, 必须选择 $V(0)$ 和 $\beta(t)$ 使 (12) 式右边两项都最小, 显然使第一项最小的 $V(0)$ 是:

$$V(0) = E_Q(h) = E_Q\left(\mathrm{e}^{-\int_0^T r(u)\mathrm{d}u}h\right), \tag{12}$$

即使风险最小的任何自筹资策略的初值应取为 $E_Q(h)$. 因此, 定义期权在时刻 0的价格为

$$V(0) = E_Q\left(\mathrm{e}^{-\int_0^T r(u)\mathrm{d}u}h\right).$$

对于 $t > 0$, 可用 $R_t^T = E_Q\left([\mathrm{e}^{-\int_t^T r(u)\mathrm{d}u}(V(T) - h)]^2 \middle| \mathscr{F}_t\right)$ 作为风险. 类似地, 可以得到使 R_t^T 达到最小的 $V(t)$ 为:

$$V(t) = E_Q\left(\mathrm{e}^{-\int_t^T r(u)\mathrm{d}u}h \mid \mathscr{F}_t\right), \tag{13}$$

定义期权 h 在时刻 t 的价格为 $V(t) = E_Q\left(\mathrm{e}^{-\int_t^T r(u)\mathrm{d}u}h \mid \mathscr{F}_t\right)$.

可见, 不完全市场期权定价公式的形式与完全市场相同.

特别地, 设 r, u 为常数, 取 $H(t, x) \equiv 0$, $\sigma(t) \equiv 1$ (此时 $c = -1$), $K = \sigma > 0$ 为常数, 式 (2) 中的 $Y(t)$ 为交错过程, 即 $Y(t) = (\mu + b)t + \sigma B(t) + \int_1^\infty xN(t, \mathrm{d}x)$, 其中 $b = \int_1^\infty x\gamma(\mathrm{d}x)$. 此时 $\gamma(x) = \lambda\nu_U(x)$, 其中 λ 为泊松过程的强度, $\nu_U(x)$ 为 $Y(t)$ 的跳跃点 τ_1 的跃度 U_1 的分布, 于是 $b = \lambda EU_1$. 式 (6) 的解 $F(t)$ 为常数, 记之为 θ, 即 $\theta = \dfrac{r - \mu - \lambda EU_1}{\sigma}$. 于是 $\mathrm{d}Q = \exp\left(\theta B(T) - \dfrac{1}{2}\theta^2 T\right)\mathrm{d}P$, $W(t) = B(t) - \theta t$, $N_Q(t, E) = N(t, E)$, $\gamma_Q(t, E) = \gamma(t, E)$. 在概率测度 Q 下, $W(t)$ 为标准布朗运动, 且 $W(t)$ 与 $N(t, E)$ 独立. 由式 (7) 有:

$$S(t) = S(0)\exp\left(\sigma W(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \int_{-1}^\infty \ln(1+x)N(t, \mathrm{d}x) + t\int_{-1}^\infty [\ln(1+x) - x]\gamma(\mathrm{d}x)\right) =$$

$$S(0)\exp\left(-\left(\lambda EU_1+\frac{1}{2}\sigma^2\right)t+\sigma W(t)\right)\exp\left(\int_{-1}^{\infty}\ln(1+x)N(t,dx)\right).$$

由泊松积分的性质知:

$$\int_{-1}^{\infty}\ln(1+x)N(t,dx)=\sum_{0\leqslant u\leqslant t}\ln(1+\Delta Y(u))=\sum_{j=1}^{N(t)}\ln(1+U_j),$$

$$\exp\left(\int_{-1}^{\infty}\ln(1+x)N(t,dx)\right)=\exp\left(\sum_{j=1}^{N(t)}\ln(1+U_j)\right)=\prod_{j=1}^{N(t)}(1+U_j).$$

于是

$$S(t)=S(0)\prod_{j=1}^{N(t)}(1+U_j)\exp\left(-\left(\lambda EU_1+\frac{1}{2}\sigma^2\right)t+\sigma W(t)\right),$$

$$S(T)=S(t)\prod_{j=1}^{N(T)-N(t)}(1+U_{N(t)+j})\exp\left(\left(r-\lambda EU_1-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)+\sigma(W(T)-W(t))\right),$$

$$V(t)=E_Q\left(e^{-\int_t^T r\,du}f(S(T))\,\Big|\,\mathscr{F}_t\right)=$$

$$E_Q\left(e^{-r(T-t)}f\left(S(t)\prod_{j=1}^{N(T)-N(t)}(1+U_{N(t)+j})\exp\left(\left(r-\lambda EU_1-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)+\sigma(W(T)-W(t))\right)\right)\,\Big|\,\mathscr{F}_t\right).$$

记

$$V(t)=F(t,S(t)),$$

$$F_0(t,x)=E_Q\left[e^{-r(T-t)}f\left(x\exp\left(\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)+\sigma(W(T)-W(t))\right)\right)\right],$$

推导可得

$$F(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty}E\left[F_0\left(t,xe^{-\lambda EU_1(T-t)}\prod_{j=1}^{n}(1+U_j)\right)\right]\frac{e^{-\lambda(T-t)}\lambda^n(T-t)^n}{n!},$$

其中 E 表示在概率 P 下对 U_j 取期望. 若已知 U_1 的分布, 则可求得期权在时刻 t 的价格 $F(t,S(t))$. 上式即为文[3]第 155页的结果.

4 套期保值

要在 $V(0)=E_Q(h)$ 的条件下, 寻找使风险 R_0^T 达到最小的 $(\beta(t))_{0\leqslant t\leqslant T}$, 以 $F(t,S(t))$ 表示期权 h 在时刻 t 的价格, 即 $F(t,S(t))=E_Q\left(e^{-\int_t^T r(u)du}f(S(T))\mid\mathscr{F}_t\right)$.

令 $F(t,x)=e^{-\int_0^t r(u)du}F\left(t,xe^{\int_0^t r(u)du}\right)$,

则

$$F(t,S(t))=e^{-\int_0^t r(u)du}F(t,S(t))=E_Q\left(e^{-\int_0^T r(u)du}f(S(T))\mid\mathscr{F}_t\right)=E_Q(h\mid\mathscr{F}_t).$$

可见, $F(t,S(t))$ 是期权 h 在时刻 t 的价格的折现值, 它是 Q-鞅:

$$F(T,S(T))=E_Q(h\mid\mathscr{F}_T)=h,\ F(0,S(0))=E_Q(h)=V(0).$$

定理 2 若取 $V(0)=E_Q\left(e^{-\int_0^T r(u)du}f(S(T))\right)=F(0,S(0))$, $\phi=(\alpha(t),\beta(t),0\leqslant t\leqslant T)$ 是一个可取策略, 则

$$R_0^T=E_Q\left(\int_0^t\left\{S^2(u-)K^2\sigma^2(u)\left(\beta(u)-\frac{\partial F}{\partial x}(u,S(u-))\right)^2+\int_c[\beta(u)S(u-)x\sigma(u)-F(u,S(u-)+x\sigma(u)S(u-))+F(u,S(u-))]^2e^{H(u,x)}\nu(dx)\right\}du\right).$$

证明 $F(t,x)\in C^{1,2}([0,T]\times\mathbf{R}^+)$, 由 Ito公式及(8)式有:

$$F(t,S(t))-F(0,S(0))=\int_0^t\frac{\partial F}{\partial x}(u,S(u-))K\sigma(u)S(u-)dW(u)+\int_0^t\int_c[F(u,S(u-)+$$
$$x\sigma(u)S(u-))-F(u,S(u-))]N_Q(du,dx)+\int_0^t\left\{\frac{\partial F}{\partial t}(u,S(u-))+\frac{1}{2}\frac{\partial^2F}{\partial x^2}(u,S(u-))K^2\sigma^2(u)S^2(u-)+\right.$$

$$\int_c^\infty\left[F(u,S(u-)+x\sigma(u)S(u-))-F(u,S(u-))-x\sigma(u)S(u-)\frac{\partial F}{\partial x}(u,S(u-))\right]e^{H(u,x)}\nu(dx)\Big\}du.$$

上式左边及右边第一、二项均为零初值 Q - 鞅, 故右边第三项大括号内 a sQ 等于零, 于是

$$F(t,S(t))-F(0,S(0))=\int_0^t\frac{\partial F}{\partial x}(u,S(u-))K\sigma(u)S(u-)dW(u)+$$

$$\int_0^t\int_c^\infty[F(u,S(u-)+x\sigma(u)S(u-))-F(u,S(u-))]N_Q(du,dx).$$

由上式及式(10), 有:

$$V(T)-h=(V(T)-V(0))-(F(T,S(T))-V(0))=$$

$$\int_0^t\left[\beta(u)-\frac{\partial F}{\partial x}(u,S(u-))\right]S(u-)K\sigma(u)dW(u)+\int_0^t\int_c^\infty[\beta(u)S(u-)x\sigma(u)-F(u,S(u-)+$$

$$x\sigma(u)S(u-))+F(u,S(u-))]N_Q(du,dx).$$

由 Levy随机积分的性质有:

$$R_0^T=E_Q(V(T)-h)^2=E_Q\left(\int_0^t\Big\{S^2(u-)K^2\sigma^2(u)\left(\beta(u)-\frac{\partial F}{\partial x}(u,S(u-))\right)^2\right.$$

$$\left.+\int_c^\infty[\beta(u)S(u-)x\sigma(u)-F(u,S(u-)+x\sigma(u)S(u-))+F(u,S(u-))]^2e^{H(u,x)}\nu(dx)\Big\}du\right),\tag{14}$$

要选择 $\beta(t)$ 使得 R_0^T最小, 只需使式(14)右边$\{\cdot\}$内的函数最小即可. 为此令$\frac{\partial}{\partial\beta}\{\cdot\}=0$, 得

$$\beta(u)=\frac{1}{K^2\sigma(u)+\sigma(u)\int_c^\infty x^2e^{H(u,x)}\nu(dx)}\left[K^2\sigma(u)\frac{\partial F}{\partial x}(u,S(u-))+\right.$$

$$\left.\int_c^\infty x\frac{F(u,S(u-)+x\sigma(u)S(u-))-F(u,S(u-))}{S(u-)}e^{H(u,x)}\nu(dx)\right].$$

注意到 $\frac{\partial F}{\partial x}(u,S(u-))=\frac{\partial F}{\partial x}(u,S(u-))$, $F(u,S(u-))=e^{-\int_0^t r(s)ds}F(u,S(u-))$, $F(u,S(u-)+x\sigma(u)S(u-))=e^{-\int_0^t r(s)ds}F(u,S(u-)+x\sigma(u)S(u-))$, 得到最优保值策略为:

$$\beta(t)=\frac{1}{K^2\sigma(t)+\sigma(t)\int_c^\infty x^2e^{H(t,x)}\nu(dx)}\left[K^2\sigma(t)\frac{\partial F}{\partial x}(t,S(t-))+\right.$$

$$\left.\int_c^\infty\frac{F(t,S(t-)+x\sigma(t)S(t-))-F(t,S(t-))}{S(t-)}xe^{H(t,x)}\nu(dx)\right],\tag{15}$$

当 $\nu=0$时, $\beta(t)=\frac{\partial F}{\partial x}(t,S(t-))=\frac{\partial F}{\partial x}(t,S(t))$为 B-S模型中的 Δ对冲, 且 $R_0^T=0$. 但当 $\nu\neq0$时, 一般有 $R_0^T>0$.

取 $H(t,x)\equiv0$, $\sigma(t)\equiv1$(此时 $c=-1$), $K=\sigma>0$为常数, 式(2)中的 $Y(t)$为交错过程, 即 $dY(t)=b\,dt+\sigma dB(t)+\int_{-1}^\infty xN(dt,dx)$, 于是 $\nu(x)=\lambda\nu_U(x)$, 其中 λ为泊松过程的强度, $\nu_U(x)$为 U_1的分布, 则(15)式变为:

$$\beta(t)=\frac{1}{\sigma^2+\lambda\int_{-1}^\infty x^2\nu_U(dx)}\left[\sigma^2\frac{\partial F}{\partial x}(t,S(t-))+\lambda\int_{-1}^\infty x\frac{F(t,S(t-)(1+x))-F(t,S(t-))}{S(t-)}\nu_U(dx)\right]=$$

$$\frac{1}{\sigma^2+\lambda E(U_1^2)}\left[\sigma^2\frac{\partial F}{\partial x}(t,S(t-))+\lambda\int_{-1}^\infty z\frac{F(t,S(t-)(1+z))-F(t,S(t-))}{S(t-)}\nu_U(dz)\right].$$

上式即为文[3]中第 158页的结果.

5 结论

在标的资产由 Levy过程驱动的前提下, 研究欧式期权的定价问题和套期保值策略, 并假定无风险利

率和波动率都是一般的随机过程,给出了不完全市场下欧式期权定价公式和套期保值的具体表达式.相对前面的研究成果而言,利用 Levy过程和随机积分的知识,避免了推导的复杂性,使得证明的过程更加简单,方法更巧妙.当 Levy过程取交错过程时,本文的结论完全包含文[3]第七章的结论.

[参考文献](References)

[1] Black F Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities[J]. Journal of Political Economy, 1973, 81(3): 637-654

[2] Merton R C. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous[J]. Journal of Financial Economics, 1976(3): 125-144

[3] Damien Lamberton, Bernard Lapeyre. Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance[M]. Nicolas Rabeau, Francois Mantion, Translated. Chapman&Hall/CRC, 1996

[4] David Applebaum. Levy Process and Stochastic Calculus[M]. Cambridge: Cambridge University Press, c2004.

[5] Markowitz H. Portfolio selection[J]. Journal of Financial, 1952(7): 77-91.

[6] Sharp W F. Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk[J]. Journal of Finance, 1964, 19: 425-442

[7] Linter J. The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets[J]. Review of Economic and Statistics, 1965, 47: 13-37.

[8] Lo A W, Mackinlary A C. Stock market prices do not follow random walks: evidence from a simple specification test[J]. Review of Financial Studies, 1988(1): 41-66.

[9] Bladt M, Rydberg T H. An actuarial approach to option pricing under the physical measure and without market assumptions[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 1998, 22(1): 65-73

[10] Louis Oscott. Pricing stock options in a jump-diffusion model with stoch-astic volatility and interest rates: applications of fourier inversion methods[J]. Mathematical Finance, 1997, 7(4): 413-424.

[11] Chan T. Pricing contingent claims on stock driven by levy processes[J]. Ann-als of Appl Prob, 1999, 9(2): 504-528

[12] Kallsen Jan. Optimal portfolios for exponential levy processes[J]. Math Meth Oper Res, 2000, 51(3): 357-374.

[13] Jean Luc Prigent. Option pricing with a general marked point process[J]. Mat-hematics of Operations Research, 2001, 26(1): 50-66.

[14] 薛红. 随机利率情形下的多维 Black-Scholes模型[J]. 工程数学学报, 2005, 22(4): 645-652.
Xue Hong. The multi-dimensional Black-Scholes pricing model under stochastic interest rate[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2005, 22(4): 645-652 (in Chinese)

[15] 董翠玲, 师格. 标的股票服从跳-扩散过程的复合期权定价模型[J]. 新疆大学学报: 自然科学版, 2005, 22(1): 26-30.
Dong Cuiling, Shi Ge. Compound option pricing of jump-difussion process of underlying stock returns[J]. Journal of Xingjiang University: Natural Science Edition, 2005, 22(1): 26-30. (in Chinese)

[16] 闫海峰, 刘三阳. 带有 Poisson跳的股票价格模型的期权定价[J]. 工程数学学报, 2003, 20(2): 35-40.
Yan Haifeng, Liu Sanyang. Pricing options on stocks driven by poisson jump difusion process[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2003, 20(2): 35-40. (in Chinese)

[17] 约翰·赫尔. 期权、期货和其他衍生产品[M]. 陶伟, 译. 北京: 华夏出版社, 2003.
John C H. Option, Futures and Other Derivatives[M]. Tao Wei, Translated. Beijing: Huaxia Press, 2003. (in Chinese)

[责任编辑: 严海琳]