

超混沌系统反馈控制耦合同步

闵富红^{1, 2}, 王执铨², 吴薛红¹

(1. 南京师范大学 电气与自动化工程学院, 江苏 南京 210042 2. 南京理工大学 自动化学院, 江苏 南京 210094)

[摘要] 基于混沌系统的最大 Lyapunov 指数与耦合同步增益的关系, 确定一大类混沌系统的线性耦合同步时, 反馈控制系数需要满足的取值范围, 该种新型的判别方法简单而且在工程上易于实现. 由于超混沌系统在保密通信中具有更强的抗破译能力, 因而考虑以超混沌 Chen 系统以及超混沌 Qi 系统为例, 数值模拟结果验证了该方法的有效性以及普适性.

[关键词] 最大 Lyapunov 指数, 线性反馈耦合同步, 超混沌系统, 耦合系数

[中图分类号] TP391.9 **[文献标识码]** A **[文章编号]** 1672-1292(2007)03-0006-07

Coupled Synchronization for Feedback Control Hyper-chaotic Systems

Min Fuhong^{1, 2}, Wang Zhiquan², Wu Xuehong¹

(1. School of Electrical and Automation Engineering, Nanjing Normal University, Nanjing 210042, China

2. School of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

Abstract Based on the relation between the largest Lyapunov exponent of chaos systems and the control coefficients through linear feedback controlled, some new sufficient conditions of stability for linearly coupled chaotic synchronization are attained. This work is applied to attain chaos synchronization for two identical new hyper-chaotic Chen systems and for two identical new hyper-chaotic systems with any initial conditions. Numerical simulations are shown to verify the effectiveness of the chaos synchronization method.

Key words the largest Lyapunov exponent, linearly coupled chaos synchronization, hyper-chaotic system, the coupling coefficients

0 引言

近年来混沌同步在非线性科学、信息科学、保密通信以及其它工程领域获得了广泛的应用, 已经成为人们研究的热点课题之一. 迄今为止, 人们提出了各种有效的混沌同步方法, 如驱动—响应同步^[1]、线性反馈同步^[2-6]、主动同步^[7, 8]、自适应同步^[9, 10]、脉冲同步^[11]等方法. 这些方法中线性反馈耦合同步最简单, 在工程上最容易实现. 另外, 在以往的文献中, 一般只考虑了低维混沌系统的同步, 然而, 高维的超混沌系统具有更为复杂的动力学行为, 其特点是至少含有两个或两个以上正 Lyapunov 指数, 它广泛存在于自然界、流体、生物、经济等一大类非线性系统的众多领域中, 具有更高的保密性, 因此研究超混沌系统的同步具有更重要的价值. 在实际应用中, 为了实现混沌同步, 就希望所使用的同步方法越简单越好, 因而, 这里考虑使用线性反馈方法实现超混沌系统同步.

文献[12]中, 基于反馈控制耦合混沌系统同步, 提出了一种新型的混沌系统最大 Lyapunov 指数估计新方法, 以著名的 Lorenz 混沌系统和静摩擦 Duffing 振子为仿真对象, 验证了方法的有效性. 本文基于该方法, 考虑到混沌系统的最大 Lyapunov 指数与线性反馈耦合同步控制下控制增益的关系, 提出实现一大类混沌系统线性耦合同步时, 耦合系数要满足的充分条件, 该方法不仅简单且很容易实现. 最后, 分别以两个

收稿日期: 2007-03-15

基金项目: 国家自然科学基金 (60174005)、江苏省自然科学基金 (BK2001054) 资助项目.

作者简介: 闵富红 (1970-), 女, 讲师, 博士研究生, 主要从事混沌同步与控制的教学与研究. E-mail minfuhong@njnu.edu.cn

通讯联系人: 王执铨 (1939-), 教授, 博士生导师, 主要从事动态大系统的建模、信息安全以及混沌控制的研究.

E-mail whwzq@mail.njust.edu.cn

超混沌 Chen 系统以及两个新的超混沌 Qi 系统等为例, 数值模拟结果验证了该方法的有效性以及普适性.

1 问题描述与理论分析

考虑如下一类 N 维非线性混沌系统

$$\dot{X} = F(X), \quad (1)$$

式中, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 为状态向量, $F(X) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))^T$ 是连续的非线性函数.

以系统 (1) 为驱动系统, 则相应的线性反馈控制的响应系统为

$$\dot{Y} = F(Y) + K(X - Y), \quad (2)$$

式中, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ 为状态向量, $F(Y) = (f_1(y), f_2(y), \dots, f_n(y))^T$ 是连续的非线性函数, $K = \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_n)$ 为控制增益向量. 令 $E = X - Y$, 可见, 只要选择合适的反馈控制增益向量 K , 就能实现响应系统和驱动系统达到全局渐进同步.

接着, 考虑下面的耦合系统

$$\begin{cases} \dot{X} = F(X), \\ \dot{Y} = F(Y) + K(X - Y), \end{cases} \quad (3)$$

以及

$$\begin{cases} \dot{X} = F(X), \\ \dot{E} = H(X, Y, K), \end{cases} \quad (4)$$

式中, $H = (h_1, h_2, \dots, h_n)^T$ 为 N 维非线性函数, $E = (e_1, e_2, \dots, e_n)^T$ 为 N 维误差状态向量.

定理 1 设线性反馈控制的耦合系数为 $k = k_1 = k_2 = \dots = k_n$, 以及系统 (1) 的最大 Lyapunov 指数为 $\lambda_{\max} = \max(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, 那么当 $k > \lambda_{\max}$ 时, 就能够实现初始值不同的两个混沌系统满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|E\| = 0$ 从而实现响应系统 (2) 和驱动系统 (1) 达到渐进全局完全同步.

证明 设 $D(X)$, $D(Y)$ 分别为驱动混沌系统 (1) 和响应混沌系统 (2) 的相空间向量场散度, 即分别为

$$D(X) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}, \quad D(Y) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial y_i}, \quad (5)$$

另外, 设系统 (1) 和 (2) 的 Lyapunov 指数分别为 $\lambda_i(X)$, $\lambda_i(Y)$. 由于是初始值不同的两个相同系统, 则由向量场散度与系统 Lyapunov 指数之间的关系^[12], 得到结论

$$D(X) = D(Y) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(X) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(Y), \quad (6)$$

对于系统 (3), 其相空间向量场散度为

$$D = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial y_i} - \sum_{i=1}^n k_i = D(X) + D(Y) - \sum_{i=1}^n k_i, \quad (7)$$

同理, 对于系统 (4), 相空间向量场散度为

$$D = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial h_i}{\partial e_i} = D(X) + D(E), \quad (8)$$

式中, $D(E) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h_i}{\partial e_i} = \sum_{i=1}^n \lambda_i(E)$ 是误差系统相空间向量场散度, 而且 $\lambda_i(E)$ 是其 Lyapunov 指数.

比较式 (7) 和式 (8), 可以得到

$$D(E) = D(Y) - \sum_{i=1}^n k_i, \quad (9)$$

将式 (5) 代入 (9) 式中, 则有

$$D(E) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(X) - \sum_{i=1}^n k_i, \quad (10)$$

因为如果系统完全同步时, 应有

$$D(E) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(X) - \sum_{i=1}^n k_i < 0 \quad (11)$$

可见, 只要 $k > \lambda_{\max}$, 那么当时间趋于无穷时, 一定能够实现响应系统 (2) 和驱动系统 (1) 达到全局渐近同步, 证毕.

2 实例分析与数值仿真

为了验证上述分析的正确性, 下面以两个新的超混沌系统为例进行仿真研究.

2.1 超混沌 Chen 系统仿真研究

最近, Li^[13] 等通过设计非线性状态反馈控制器从 Chen 中得到了超混沌 Chen 系统, 该系统为研究超混沌同步与控制以及保密通信提供了一个新的领域, 有着广泛的应用, 数学模型为

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) + w, \\ \dot{y} = dx + cy - xz \\ \dot{z} = -bz + xy, \\ \dot{w} = yz + nw, \end{cases} \tag{12}$$

式中, x, y, z, w 为系统的状态向量. 当 $a = 35, b = 3, c = 12, d = 7$ 以及 $0.085 < r \leq 0.798$ 时, 该系统是超混沌的, 可见, 其有很广的参数选择范围. 例如, 当 $a = 35, b = 3, c = 12, d = 7$ 以及 $r = 0.58$ 其超混沌吸引子如图 1 所示. 此时, Lyapunov 指数分别为 $\lambda_1 = 0.5011, \lambda_2 = 0.1858, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = -26.1010$. 显然, $\lambda_1, \lambda_2 > 0, \lambda_3 = 0, \lambda_4 < 0$ 系统是超混沌, 而最大 Lyapunov 指数 $\lambda_{\max} = \max(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = 0.5011$

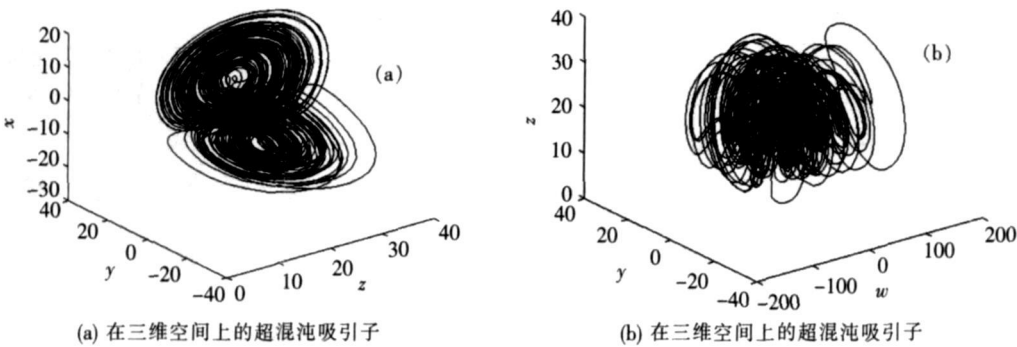


图 1 超混沌 Chen 系统的吸引子
Fig.1 Attractors of the hyperchaotic Chen system

下面构造如下两个相同的线性耦合同步的超混沌 Chen 系统,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(y_1 - x_1) + w_1, \\ \dot{y}_1 = dx_1 + cy_1 - x_1z_1, \\ \dot{z}_1 = -bz_1 + x_1y_1, \\ \dot{w}_1 = y_1z_1 + nw_1, \\ \dot{x}_2 = a(y_2 - x_2) + w_2 + k(x_1 - x_2), \\ \dot{y}_2 = dx_2 + cy_2 - x_2z_2 + k(y_1 - y_2), \\ \dot{z}_2 = -bz_2 + x_2y_2 + k(z_1 - z_2), \\ \dot{w}_2 = y_2z_2 + nw_2 + k(w_1 - w_2), \end{cases} \tag{13}$$

其中, k 为线性耦合系数.
定义状态误差信号:

$$\begin{cases} e_1 = x_1 - x_2, \\ e_2 = y_1 - y_2, \\ e_3 = z_1 - z_2, \\ e_4 = w_1 - w_2. \end{cases} \tag{14}$$

那么有如下的误差系统

$$\begin{cases} e_1 = a(e_2 - e_1) + e_4 - ke_1, \\ e_2 = de_1 + ce_2 - x_1z_1 + x_2z_2 - ke_2, \\ e_3 = -be_3 + x_1y_1 - x_2y_2 - ke_3, \\ e_4 = -re_4 + y_1z_1 - y_2z_2 - ke_4 \end{cases} \tag{15}$$

根据定理 1 当选取耦合系数 $k > 0.5011$ 时, 就能够实现系统 (13) 全局渐进同步.

用四阶龙格库塔法进行数值仿真, 步长为 0.01 系统参数为 $a = 35$ $b = 3$ $c = 12$ $d = 7$ 以及 $r = 0.58$ 从而保证为超混沌. 系统 (13) 的初始值设为 $(1; 1; 1; 1; 0; 1; 0; 1; 0; 1; 0; 1)$. 为了使得仿真效果更好地证明本文方法的正确性, 分别选取了耦合参数 $k = 0.5$ 0.76 2 进行仿真, 结果如图 2~ 5 所示. 从仿真图可以看出, 当耦合参数 $k < 0.5011$ 时, 耦合系统 (13) 不能实现线性同步, 如图 2 所示; 而当 $k > 0.5011$ 时, 线性耦合的系统 (13) 能够实现全局渐近同步, 并且将图 3 与图 4 比较, 发现耦合系数越大, 耦合强度就增加, 系统同步速度也变快. 在图 3 中, 当时间 t 接近 25 s 时, 误差 e_1, e_2, e_3, e_4 分别稳定到零, 然而在图 4 中, 当时间 t 接近 3.5 s 时, 误差 e_1, e_2, e_3, e_4 就分别稳定到零, 响应速度加快了. 图 5 是耦合系数 $k = 2$ 时, 耦合系统 (13) 的对应初始值不同的两个超混沌 Chen 系统线性耦合同步的混沌吸引子. 比较图 1 与图 5 图 1 为系统 (12) 的超混沌吸引子与图 5 中的实线表示的驱动系统 (13) 中的吸引子一致, 而图 5 中虚线为系统 (13) 中耦合的响应系统吸引子, 在耦合参数 $k = 2$ 时, 两者快速同步. 总之, 耦合参数 k 受到系统 (12) 的最大 Lyapunov 指数的限制, 并且取值越大越好, 误差系统 (15) 衰减越快, 也可从图 3 和图 4 的仿真结果看出. 考虑工程上的代价, 参数 k 没有必要选择太大.

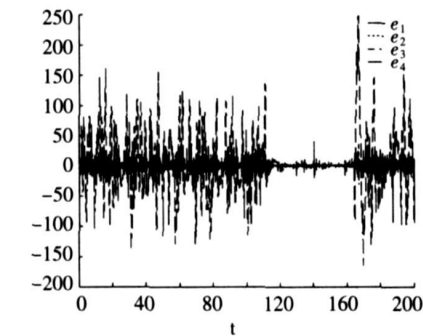


图 2 耦合参数 $k=0.5$ 时耦合系统 (13) 的同步误差曲线 e_1, e_2, e_3, e_4
Fig.2 The errors of the coupled system ($k=0.5$)

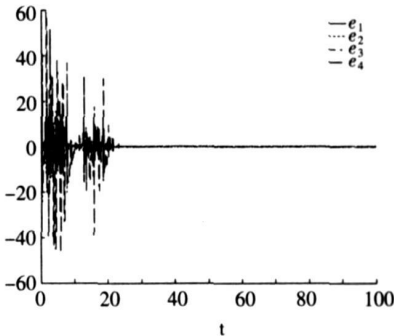


图 3 耦合参数 $k=0.76$ 时耦合系统 (13) 的同步误差曲线 e_1, e_2, e_3, e_4
Fig.3 The errors of the coupled system ($k=0.76$)

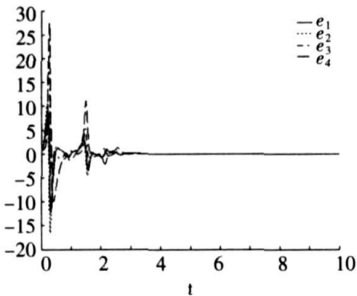


图 4 耦合参数 $k=2$ 时耦合系统 (13) 的同步误差曲线 e_1, e_2, e_3, e_4
Fig.4 The errors of the coupled system ($k=2$)

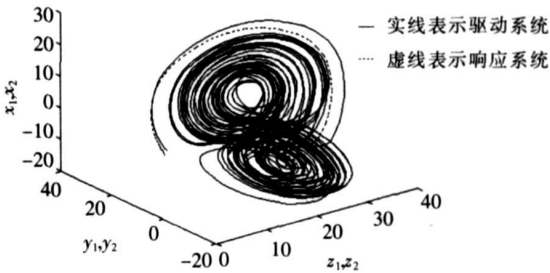


图 5 耦合参数 $k=2$ 时, 初始值不同两个超混沌 Chen 系统线性耦合同步的混沌吸引子
Fig.5 Attractors of the drive-response system ($k=2$)

2.2 新型超混沌 Qi 系统仿真研究

考虑另一个超混沌系统, 这是在 2006 年 Wang 等^[14] 在 Q 系统基础上, 施加控制器时得到的一个新型系统, 可用如下的方程来描述:

$$\begin{cases} x = a(y - x) + yz \\ y = 25x - y - xz - w, \\ z = -8/3x + xy, \\ w = bx + 1/2yz + w, \end{cases} \tag{16}$$

式中, x, y, z, w 为系统的状态向量, a, b 为系统的控制参数. 当改变参数 a 或 b 时, 系统都有呈现复杂的动力学行为. 这里研究其超混沌性质, 当 $a = 35$ 和 $b = 13$ 时, 图给出了其超混沌吸引子的三维空间投影. 计算得, 此时系统 (16) 的 4 个 Lyapunov 指数分别为 $\lambda_1 = 0.4509, \lambda_2 = 0.1443, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = -38.259$. 显然, $\lambda_1, \lambda_2 > 0, \lambda_3 = 0, \lambda_4 < 0$ 系统是超混沌, 且最大 Lyapunov 指数 $\lambda_{max} = \max(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = 0.4509$

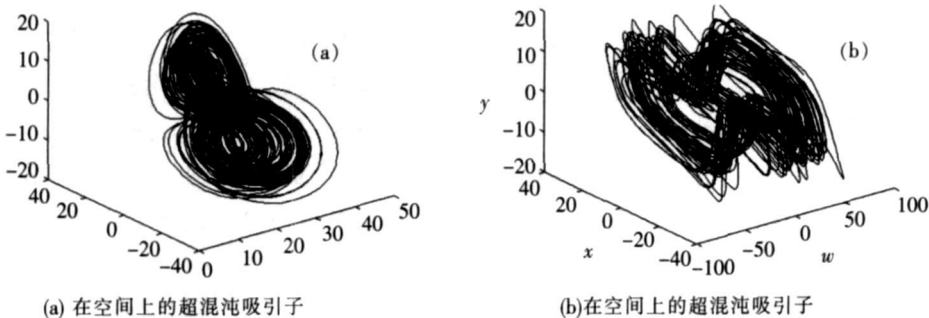


图 6 系统(15)的超混沌吸引子在三维空间上的投影
Fig.6 Attractors of the hyperchaotic system (15)

设超混沌驱动系统为

$$\begin{cases} x_1 = a(y_1 - x_1) + y_1z_1, \\ y_1 = 25x_1 - y_1 - x_1z_1 - w_1, \\ z_1 = -8/3x_1 + x_1y_1, \\ w_1 = bx_1 + 1/2y_1z_1 + w_1. \end{cases} \tag{17}$$

线性耦合的响应系统为

$$\begin{cases} x_2 = a(y_2 - x_2) + y_2z_2 + k(x_1 - x_2), \\ y_2 = 25x_2 - y_2 - x_2z_2 - w_2 + k(y_1 - y_2), \\ z_2 = -8/3x_2 + x_2y_2 + k(z_1 - z_2), \\ w_2 = bx_2 + 1/2y_2z_2 + w_2 + k(w_1 - w_2), \end{cases} \tag{18}$$

其中, k 线性耦合系数.

如果令误差变量

$$\begin{cases} e_1 = x_1 - x_2, \\ e_2 = y_1 - y_2, \\ e_3 = z_1 - z_2, \\ e_4 = w_1 - w_2, \end{cases} \tag{19}$$

那么可以得到如下的误差系统

$$\begin{cases} e_1 = a(e_2 - e_1) + y_1z_1 - y_2z_2 - ke_1, \\ e_2 = 25e_1 - e_2 - x_1z_1 + x_2z_2 - ke_2, \\ e_3 = -8/3e_3 + x_1y_1 - x_2y_2 - ke_3, \\ e_4 = be_2 + e_4 + 0.5y_1z_1 - 0.5y_2z_2 - ke_4. \end{cases} \tag{20}$$

从定理 1 可知, 驱动系统 (17) 与响应系统 (18) 全局同步的充分条件是, 只要选择的耦合系数 $k > 0.4509$ 即可.

同样, 采用步长为 0.01 的四阶龙格库塔法进行数值仿真. 为使驱动系统处于超状态, 选取参数为 $a =$

35, $b = 13$ 驱动系统 (17) 与响应系统 (18) 的初始点分别选取为 $x_1(0) = 1, y_1(0) = 1, z_1(0) = 2$ 和 $w_1(0) = 1; x_2(0) = 0.2, y_2(0) = 0.2, z_2(0) = 0.1$ 和 $w_2(0) = 0.5$ 因此误差系统 (20) 的初始值为 $e_1(0) = 0.8, e_2(0) = 0.8, e_3(0) = 1.9$ 和 $e_4(0) = 0.5$ 分别选取了耦合参数 $k = 0.44, 0.5, 2$ 进行仿真, 结果如图 7~ 10 所示. 可见, 当 $k > 0.4509$ 时, 驱动系统 (17) 与响应系统 (18) 能够实现全局渐近同步. 将图 8 与图 9 比较, 发现耦合系数越大, 耦合强度就增加, 系统同步速度也变快, 图 8 中, 当时间 t 接近 10 s 时, 误差 e_1, e_2, e_3, e_4 分别稳定到零, 然而图 9 中, 当时间 t 接近 3.5 s 时, 误差 e_1, e_2, e_3, e_4 就分别稳定到零, 响应速度变快了. 反之, 当耦合参数 $k < 0.4509$ 时, 驱动系统 (17) 与响应系统 (18) 不能实现同步, 如图 7 所示. 另外, 图 6 为系统 (16) 的超混沌吸引子与驱动系统 (17) 在图 10 中用实线表示的吸引子一样, 而图 10 中虚线为响应系统 (18) 的超混沌吸引子, 在耦合系数 $k = 2$ 时, 两者在反馈控制作用下快速同步. 总之, 耦合参数 k 必须大于系统 (16) 的最大 Lyapunov 指数, 并且取值越大越好, 可以从图 8 和图 9 的仿真结果看出, 考虑工程上的代价, 参数 k 没有必要选择太大.

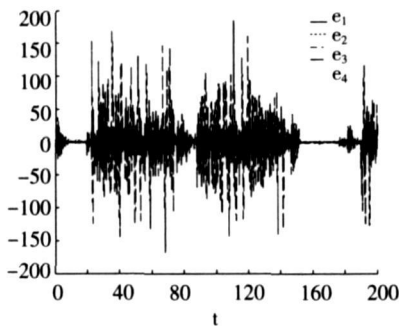


图 7 耦合系数 $k=0.44$ 时, 驱动系统 (17) 与响应系统 (18) 的同步误差曲线 e_1, e_2, e_3, e_4

Fig.7 The errors of the coupled system ($k=0.44$)

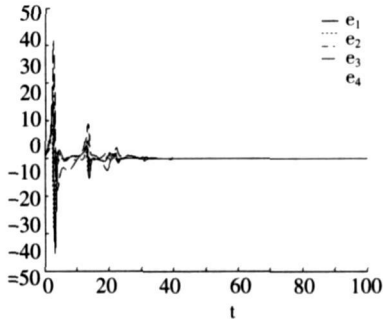


图 8 耦合系数 $k=0.5$ 时, 驱动系统 (17) 与响应系统 (18) 的同步误差曲线 e_1, e_2, e_3, e_4

Fig.8 The errors of the coupled system ($k=0.5$)

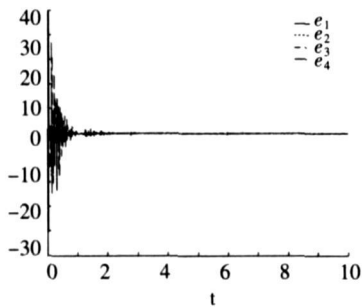


图 9 耦合系数 $k=2$ 时, 驱动系统 (17) 与响应系统 (18) 的同步误差曲线 e_1, e_2, e_3, e_4

Fig.9 The errors of the coupled system ($k=2$)

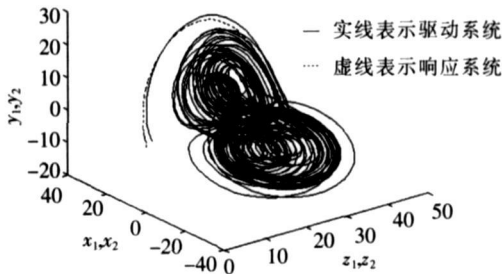


图 10 耦合参数 $k=2$ 时, 实现初始值不同的驱动系统 (17) 与响应系统 (18) 同步时的两个超混沌吸引子

Fig.10 Attractors of the drive-response system

3 结论

本文基于混沌系统的最大 Lyapunov 指数与线性反馈耦合同步控制下控制增益的关系, 确定了只要耦合系数的取值大于驱动混沌系统的最大 Lyapunov 指数, 则初始值不同的两个相同的超混沌系统线性耦合全局渐进同步, 而且以两个新的超混沌 Chen 系统以及两个新型超混沌 Qi 系统为例, 进行数值仿真. 该新方法最大优点是对于已知的混沌系统其最大 Lyapunov 指数也是已知的, 所以不需要经过任何复杂的计算, 就能确定线性耦合同步的耦合系数范围, 通过数值仿真验证了该方法的有效性以及普适性, 耦合系数的选择范围很大, 且只需要很小的增益就能实现同步, 考虑工程上的代价, 参数 k 没有必要选择太大. 因此, 该方法值得在工程上进行推广与研究.

[参考文献] (References)

- [1] Pecora L M, Carroll T L. Synchronization in chaotic systems[J]. Phys Rev Lett, 1990, 64(8): 821-824.
- [2] Park J H. Stability criterion for synchronization of linearly coupled unified chaotic systems[J]. Chaos Solitons and Fractals, 2005, 23(5): 1319-1325.
- [3] Li D M, Lu J A, Xu X Q. Linearly coupled synchronization of the unified chaotic systems and the Lorenz system[J]. Chaos Solitons and Fractals, 2005, 23(1): 79-85.
- [4] Li J, Zhou T, Zhang S. Chaos synchronization between linearly coupled chaotic systems[J]. Chaos Solitons and Fractals, 2002, 14(4): 529-541.
- [5] 闵富红, 王执铨. 统一混沌系统的耦合同步[J]. 物理学报, 2005, 54(9): 4026-4030.
Min Fuhong, Wang Zhiquan. Coupled synchronization of the unified chaotic system[J]. Acta Physica Sinica, 2005, 54(9): 4026-4030.
- [6] Zhou J, Lu J A, Wu X Q. Linearly and nonlinearly bidirectionally coupled synchronization of hyperchaotic systems[J]. Chaos Solitons and Fractals, 2007, 31(1): 230-235.
- [7] Bai E W, Lomgren K E. Synchronization of two Lorenz systems using active control[J]. Chaos Solitons and Fractals, 1997, 8(1): 51-58.
- [8] Lei Y M, Xu W, Zheng H C. Synchronization of two chaotic nonlinear gyros using active control[J]. Physics Letters A, 2005, 343(2): 153-158.
- [9] Yassen M T. Adaptive chaos control and synchronization for uncertain new chaotic dynamical system[J]. Physics Letters A, 2006, 350(1): 36-43.
- [10] Zhang H G, Huang W, Wang Z L, et al. Adaptive synchronization between two different chaotic systems with unknown parameters[J]. Physics Letters A, 2006, 350(5): 363-366.
- [11] Li Y, Liao X F, Li C D, et al. Impulsive control for synchronization of a nonlinear Rossler's chaotic systems[J]. Chin Phys, 2006, 15(12): 2883-2889.
- [12] Yang Z H, Yao Q H. Study on a new estimation method of the largest Lyapunov exponent of chaotic systems[J]. Computing Technology and Automation, 2005, 24(1): 31-33.
- [13] Li Y X, Tang S, Chen G R. Generating hyperchaos via state feedback control[J]. Int J Bifurcat Chaos, 2005, 15(10): 3367-3375.
- [14] Wang J Z, Chen Z Q, Yuan Z Z. The generation of a hyperchaotic system based on a three dimensional autonomous chaotic system[J]. Chinese Physics, 2006, 15(6): 1216-1225.

[责任编辑: 刘 健]