

从数值解浅析热传导方程的精确解

黄庆宏¹, 张 敏², 许 彬²

(1 南京师范大学 动力工程学院, 江苏 南京 210042 2 南京理工大学 动力工程学院, 江苏 南京 210094)

[摘要] 用热传导方程的精确解检验数值求解过程的正确性是数值计算方法中一种重要的手段. 反之, 用数值解来分析精确解的完整性也是一种有意义的方法. 用基元有限容积法和二阶迎风格式, 在结构化网格中数值求解热传导方程, 同时给出 3 个例子进行数值解和精确解的比较, 以此来说明某些教科书中古典导热方程精确求解过程的不足, 并且分析阐述两者之间的内在辩证关系和它们的互补性.

[关键词] 数值解, 精确解, 热传导方程

[中图分类号] TK 124 [文献标识码] A [文章编号] 1672-1292(2007) 03-0040-04

Analyzing Exact Solutions of Heat Conduction Equations by Comparing With Numerical Solutions

Huang Qinghong¹, Zhang Min², Xu Bin²

(1 School of Power Engineering Nanjing Normal University, Nanjing 210042, China

2 College of Power Engineering Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

Abstract It is an important method that the exact solutions of the heat conduction equations test the correctness of the numerical solutions. Meanwhile, the same important is to use the numerical solutions analyzing the exact solutions for perfect results. The heat conduction equation was solved using based cell finite volume method and the secondary order upwind scheme in structured mesh. Three examples are given showing up the deficiency of the exact solution of the classical heat conduction equation in the paper. And the internal relation and the complementarities between the exact and the numerical solutions are discussed.

Key words numerical solutions, exact solutions, heat conduction equation

1 基本导热方程

随着数字化时代的到来, 数值计算传热过程日臻完善. 当今天用数值解来回顾古老的精确解时, 我们会发现一些有趣的现象, 并使我们对传热研究中这块完美的领域有一个更深刻的认识.

对一个标量物理变量 ϕ , 一般的稳态扩散方程可写成:

$$\frac{1}{f(x_i)} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\Gamma_\phi \cdot F(x_i) \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right] + S_\phi = 0 \quad (1)$$

其中, $f(x_i)$ 和 $F(x_i)$ 是几何形状因子; S_ϕ 是单位体积中的净源项; Γ_ϕ 是对应于变量 ϕ 的扩散系数. 根据方程 (1), 在笛卡尔直角坐标系和圆柱坐标系中, 导热方程分别为:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + S_\phi = 0 \quad (2)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + S_\phi = 0 \quad (3)$$

其中, k 为导热系数. 在结构化网格中, 控制方程 (2 ~ 3) 的离散方程之间存在着不同的差异.

收稿日期: 2007-01-08

作者简介: 黄庆宏 (1957-), 副教授, 主要从事热能工程技术及计算机应用等方面的教学与研究. E-mail: huangqinghong@njnu.edu.cn

2 算例

2.1 二维笛卡尔直角坐标系中复合边界条件的导热问题

图 1 给出了这个问题的几何描述. 顶边和左边界为绝热边界条件, 底边温度 T_1 已知, 右边界为第三类对流边界条件. 常物性、无内热源的 控制方程及边界条件如下式:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)=0 \tag{4}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0}=0,\left(\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{h}{k}(T-T_{\infty})\right)_{x=a}=0 \tag{5}$$

$$T_{y=0}=T_1,\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=b}=0 \tag{6}$$

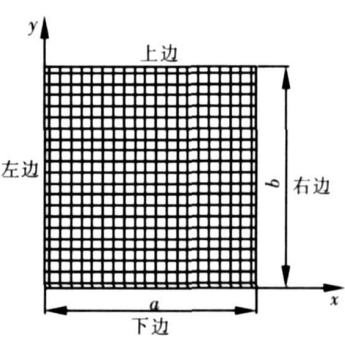


图 1 几何形状和网格

Fig.1 Geometry shape and grid

其中, $a=1, b=1, T_1=1, T_{\infty}=0, k=1, h=3$ 此问题的精确解是:

$$\theta(x,y)=\frac{T(x,y)-T_{\infty}}{T_1-T_{\infty}}=\mathcal{H}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a[\lambda_n^2+H^2]+H}\frac{\cosh[\lambda_n(b-y)]\cos[\lambda_nx]}{\cosh[\lambda_nb]\cos[\lambda_na]}, \tag{7}$$

其中, λ_n 是如下超越方程的解

$$\lambda_n\tan(\lambda_na)=H,\quad n=1,2,3\cdots, \tag{8}$$

这里, $H=h/k=3$ 由于超越方程的根有无穷多个, 而对于问题精确解有贡献的是超越方程前面有限个根, 在这里分别取超越方程的前 9 个和前 15 个根来计算精确解. 方程 (8) 的前 15 个正根如表 1 所示.

表 1 方程 $\lambda_n\tan(\lambda_na)=H$ 的根

Table 1 Root of equation $\lambda_n\tan(\lambda_na)=H$

n	1	2	3	4	5	6	7	8
λ	1.192 5	3.808 9	6.704 0	9.724 1	12.796 7	15.894 5	19.006 1	22.125 9
n	9	10	11	12	13	14	15	
λ	25.251 0	34.643 9	40.913 9	44.050 3	47.187 4	69.158 4	72.298 1	

数值计算采用 20×20 均匀正交结构网格 (见图 1 所示), 两种情况的计算结果分别如图 2 所示. 其中实线为数值解 (有限容积法), 虚线表示精确解. 当我们取超越方程的前 9 个根计算精确解时, 得出的结果与数值解相比较, 在底边高温区, 精确解出现波浪型, 和数值解之间有较大的不一致性. 如果我们把求解根增加至 15 个时, 这 不一致性将大大减小. 由此可得到这样的结论, 满意的精确解至少要取到 15 个根以上.

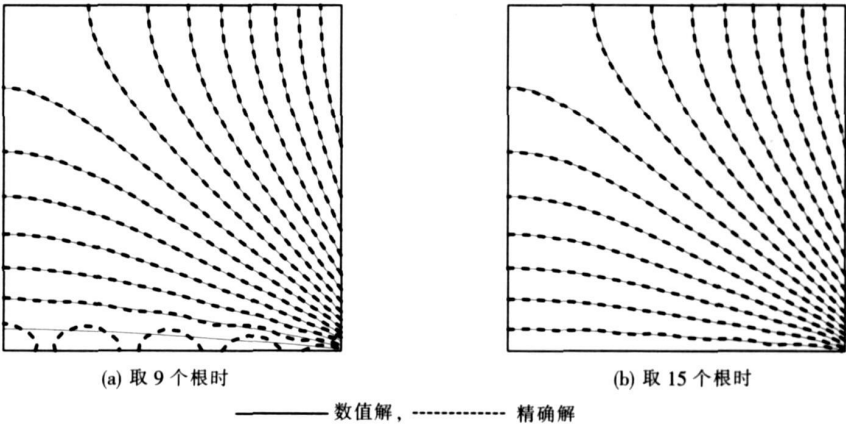


图 2 精确解和数值解的比较

Fig.2 Comparison of exact solution and numerical solution

2.2 二维圆柱坐标系中第二类边界条件的传热问题

此问题为二维圆柱坐标系下的稳态导热问题, 求解区域如图 1 所示 ($R=b, h=a$), 由于此问题的对称性, 我们取二分之一圆柱. 右边界的温度为 T_1 , 左边界为定温 $T_2=0$ 上边界和下边界为绝热. 没有内热源, 物性为常数. 控制方程及边界条件, 以及各参数选择如下:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 & 0 < r < R, \quad 0 < z < h, \\ \frac{\partial T(r=0)}{\partial r} = 0 & T|_{z=0} = T_2 \quad T|_{z=h} = T_1, \quad T|_{r=R} = T_2, \end{cases} \quad (9)$$

其中, $R = 1 \quad h = 1 \quad T_1 = 10 \quad T_2 = 0$

这个问题的精确解^[8]是:

$$T(r,z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_1}{\mu_n^{(0)} J_1(\mu_n^{(0)})} \frac{\sinh\left[\frac{\mu_n^{(0)}}{R} z\right]}{\sinh\left[\frac{\mu_n^{(0)}}{R} h\right]} J_0\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{R} r\right). \quad (10)$$

其中, $\mu_m^{(0)}$ 为 $J_0(x) = 0$ 的第 m 个正根. 在计算时, 我们分别采用了它的前 9 个和前 16 个正根来计算精确解, 如表 2 所示.

表 2 贝塞尔方程 $J_0(x) = 0$ 的正根

Table 2 Positive root of Bessell equation $J_0(x) = 0$

m	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mu^{(0)}$	2.4050	5.520	8.653	11.792	14.931	18.070	21.212	24.353
m	9	10	11	12	13	14	15	16
$\mu^{(0)}$	27.494	30.634	33.776	36.746	39.839	42.931	46.023	49.115

计算采用均匀正交网格 (如图 1 所示), 计算结果如图 3 所示. 从图 3 我们可以看出运用数值计算的方法可以得出更精确的结果.

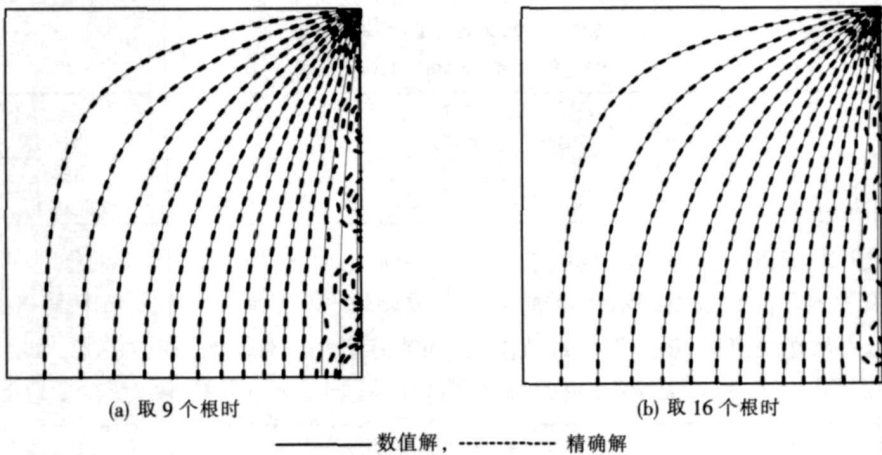


图 3 精确解和数值解的比较

Fig.3 Comparison of exact solution and numerical solution

2.3 圆柱坐标系中第三类边界条件的传热问题

此问题为二维圆柱坐标系下的稳态导热问题, 无内热源, 常物性. 左边界温度为 T_1 , 右边界为 T_2 . 在柱面上即 $r = b$ 时, 为对流换热边界条件 (见图 1 $c = a$).

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 & 0 < r < b, \quad 0 < z < c, \\ \frac{\partial T}{\partial r}|_{r=b} + HT = 0 & H = \frac{h}{k}, \\ T|_{z=0} = T_1 \quad T|_{z=c} = T_2, \quad T|_{r=0} = T_1 \quad T|_{r=b} = T_2 \end{cases} \quad (11)$$

$h = 6 \quad k = 2 \quad b = 1 \quad c = 1 \quad T_1 = 10 \quad T_2 = 0$

该问题的精确解为^[9]:

$$T(r,z) = \frac{T_1}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H}{H^2 + \beta_n^2} \frac{\sinh[\beta_n(c-z)]}{\sinh(\beta_n c)} \frac{J_0(\beta_n r)}{J_0(\beta_n b)}, \quad (12)$$

其中, β_m 为超越方程 $\beta_m J_0(\beta_m r) = H J_0(\beta_m b)$ 的正根. 其前 12 个正根如表 3 所示. 计算时分别取其前 7 个根

和前 12 个根, 其计算结果如图 4 所示.

表 3 方程 $\beta_m J_0(\beta_m r) = H J_0(\beta_m b)$ 的正根
Tbale 3 Positive root of equation $\beta_m J_0(\beta_m r) = H J_0(\beta_m b)$

m	1	2	3	4	5	6
β	1.788 7	4.463 4	7.410 3	10.456 6	13.543 4	16.649 9
m	7	8	9	10	11	12
β	19.767 1	26.018 7	32.282 5	35.416 9	41.689 0	47.964 0

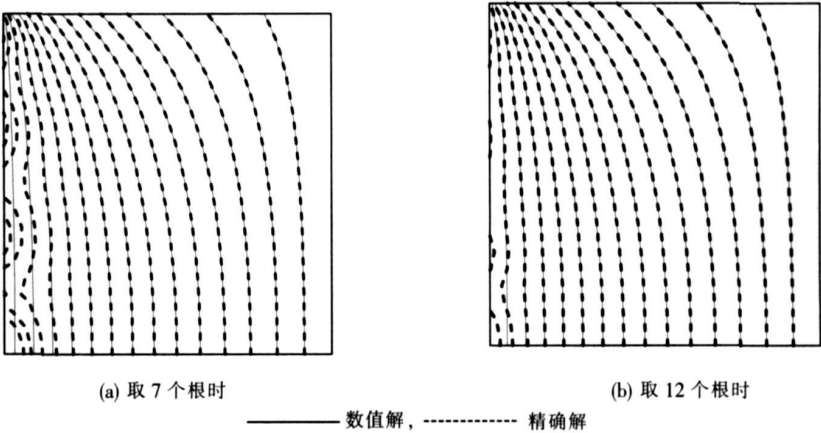


图 4 数值解和精确解的比较

Fig.4 Comparison of exact solution and numeral solution

3 结论

通过上面 3 个算例计算分析, 我们可以看到数值解对于导热方程的精确解的求解过程有一定的指导意义. 目前, 国内外热传导和偏微分方程求解的教科书中, 在求解解析解时, 给出超越方程的根数十分^[1], 以致基本上达不到数值解的精度. 所以用数值解可以确定精确解取根的最佳数目.

如果我们用热力学第二定律熵 $dS = dQ/T$ 来阐述上述现象的物理含义, 可以认为在高温区, 也就是熵值小的区域, 椭圆方程的分析解更依赖于根的数量. 在信息熵理论中, 高温区正好是信息源, 是一个敏感区域, 超越方程根的个数对这一区域影响尤为明显. 偏微分方程的精确求解过程在科学发展史上, 对我们理解和探索大千世界做出了巨大贡献. 随着计算机技术的普及, 数字化时代的到来, 也许这种辉煌将让位于数值计算.

[参考文献] (References)

[1] 奥齐西克 M N. 热传导 [M]. 俞昌铭, 译. 北京: 高等教育出版社, 1984 3-4
O z s i k M N. H e a t C o n d u c t i o n [M]. Y u C h a n g m i n g T r a n s l a t e d B e i j i n g H i g h e r E d u c a t i o n P r e s s 1 9 8 4 3 - 4 (i n C h i n e s e)

[2] Kakac S, Yener Y. Heat Conduction [M]. 3rd ed. London: Taylor and Francis Press, 1993 102-108

[3] 南京工学院数学系. 数学物理方程和特殊函数 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1982 34-37.
M a t h e m a t i c s T e a c h i n g a n d R e s e a r c h G r o u p o f N a n j i n g E n g i n e e r i n g C o l l e g e E q u a t i o n s o f M a t h e m a t i c a l P h y s i c s a n d S p e c i a l F u n c t i o n [M]. B e i j i n g H i g h e r E d u c a t i o n P r e s s 1 9 8 2 3 4 - 3 7 (i n C h i n e s e)

[4] O z s i k M N. Boundary Value Problems of Heat Conduction [M]. Dover Phoenix Editions. Dover Phoenix. Dover Press, 2002 41-45.

[责任编辑: 刘 健]