

里兹近似方法与数值方法的比较分析

黄庆宏¹, 张敏², 张钧波²

(1. 南京师范大学 动力工程学院, 江苏 南京 210042)

2. 南京理工大学 动力工程学院, 江苏 南京 210094)

[摘要] 在系统地介绍里兹变分近似方法的基础上, 通过一个直角坐标系和一个圆柱坐标系的算例, 对稳态热传导问题进行了计算, 同时与数值解和精确解进行比较分析, 由此可把近似分析法用于求解各类复杂的非线性问题。

[关键词] 里兹近似方法, 数值方法, 变分原理

[中图分类号] TK 124 [文献标识码] A [文章编号] 1672-1292(2008)03-0021-04

Comparative Analysis of Methods of RITZ Approximate Solution and Numerical Computation

Huang Qinghong¹, Zhang Min², Zhang Junbo²

(1. School of Power Engineering, Nanjing Normal University, Nanjing 210042, China)

2. School of Power Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

Abstract Based on introducing the theoretical physics of Ritz variation approximate method and with an example of cartesian coordinate and an example of cylindrical coordinate, the steady state heat conduction problems were solved and calculated using the finite volume method (FVM) in structured grid. The results are in agreement when the approximate solution compared with the numerical and the exact solutions. All above demonstrate the significance of application of the Ritz method in numerical computation.

Key words Ritz approximate method, numerical simulating method, variation principle

热传导问题的求解在人类科学史中有着悠久的历史。首先, 在几何形状简单, 微分方程与边界条件都是线性时, 人们可以通过数学解析方法(精确解方法)来找到问题的答案。对于非线性的问题, 只有少数特殊情况才能精确求解。另外, 解析解也不适用于几何形状复杂的情况。

数值计算方法是近年来发展成熟的有效方法。从理论上而言, 它可以解决几乎大多数的问题, 不论线性与非线性, 几何形状简单与复杂。但在实际工程问题中, 有许多问题完全进行数值求解现在还不可能。当遇到解析分析求解太难或无法求解, 而数值求解又不合适的情况时, 近似分析求解方法可能是一个好的选择^[1-4]。

数学解析分析解、近似分析解和数值解是 3 种科学研究中基本的方法, 它们反映了人们认识事物的发展规律。它们侧重点有所不同, 各具优缺点, 互相补充, 互相融合。数学精确解为我们展示了事物的数学和物理的抽象概念, 有利于更好地理解影响该问题各种参数的物理意义; 近似解为精简地解决工程问题提供了方便; 而数值解为全面透视问题提供了依据^[5]。

本文在热传导问题中, 以变分里兹近似方法为重点, 结合分析解析解和数值解, 全面地展示三者之间完美结合解决问题的风采。

1 里兹近似方法的基本理论

只要等价与稳态热传导方程的变分表达式是存在的, 就可用由里兹最先提出的一种简单而有效的方

法对该问题做近似求解. 有关里兹近似方法理论与应用的进一步论述, 读者可查阅文献 [6]. 在有限区域内稳态热传导问题具有如下的形式^[1],

$$\nabla^2 T(r) + A(r)T(r) + \frac{1}{k}g(r) = 0 \quad \text{区域 } R \text{ 内}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial T}{\partial n_i} + H_i T = f_i(r_s), \quad \text{边界 } s_i, \tag{2}$$

式中, $i = 1, 2, \dots, S$; S 为区域 R 连续边界面的个数; $\partial/\partial n_i$ 是区域 R 的表面 s_i 的外法向导数. 等价问题 (1) 的变分表达式为:

$$I = \int_R \left[(\nabla T)^2 - AT^2 - \frac{2}{k}gT \right] dv + \sum_{i=1}^S \int_{s_i} [H_i T^2 - 2f_i T] ds_i \tag{3}$$

式中, $(\nabla T)^2$ 在不同坐标系中有着不同形式.

在直角坐标系为: $(\nabla T)^2 = (\partial T/\partial x)^2 + (\partial T/\partial y)^2 + (\partial T/\partial z)^2$.

在圆柱坐标系为: $(\nabla T)^2 = (\partial T/\partial r)^2 + (1/r^2)(\partial T/\partial \phi)^2 + (\partial T/\partial z)^2$.

在圆球坐标系为: $(\nabla T)^2 = (\partial T/\partial r)^2 + (1/r^2 \sin^2 \theta)(\partial T/\partial \phi)^2 + (1/r^2)(\partial T/\partial \theta)^2$.

方程式 (3) 包含着问题的边界条件. 这个变分表达式的精确求解是很困难的, 而用由里兹提出的方法做近似求解倒是颇为容易. 这种方法的第一步是选择一种试探解, 这种试探解包含着若干可以调整的参数. 试探解可以这样来选择, 它满足问题的边界条件方程 (2), 而不一定满足微分方程 (1). 从这一点考虑, 选取试探解 $\bar{T}(r)$ 为:

$$\bar{T}(r) = \phi_0(r) + \sum_{j=1}^n c_j \phi_j(r), \quad \text{区域 } R \text{ 内}. \tag{4}$$

方程式 (4) 中, 函数 ϕ_0 满足边界条件方程 (2) 的非齐次部分, 即: $\frac{\partial \phi_0}{\partial n_i} + H_i \phi_0 = f_i$.

方程式 (4) 中 $\phi_j (j = 1, 2, \dots, n)$ 是 R 区域内线性无关的. 作适当选择的已知函数, 它们满足边界条件方程 (2) 齐次部分, 即: $\frac{\partial \phi_0}{\partial n_i} + H_i \phi_j = 0$

因此, 试探解方程 (4) 对任意 c_j 都满足边界条件方程 (2). 如该问题的全部边界都是齐次的, 则函数 ϕ_0 是不必要的, 只选择函数 ϕ_j 即可. 这里, 我们假设 ϕ_j 对空间变量有连续的一阶和二阶导数. 试探解 $\bar{T}(r)$ 一旦被确定, 用里兹法求系数 c_j 的办法是, 把试探解 $\bar{T}(r)$ 带入变分表达式 (3) 并要求:

$$\frac{\partial I(c_1, c_2, \dots, c_n)}{\partial c_j} = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n. \tag{5}$$

上述步骤可归结为求 n 个未知系数 c_j 的 n 个代数方程. 这个方程组的解, 就是极值问题 (稳态热传导问题) 的近似解.

在里兹法中最重要的一步是选取函数系 ϕ_j . 若有可能, 这些函数 $\phi_j (j = 1, 2, \dots, n, \dots)$ 在给定的区域内应是一组完备函数. 所以函数 ϕ_j 是完备的, 是对下面这样一个含义来说的: 任意函数, 若它在讨论的区域是连续的, 它的偏导数也是连续的, 则在该区域内可用 ϕ_j 的无穷级数形式来表示. 函数 ϕ_j 视问题的性质, 可以是多项式、三角函数、柱函数或球函数. 关于函数 ϕ_j 如何构造将在下面讨论.

2 算例分析

2.1 一维稳态热传导问题

在一个一维有限区域内, 两侧边界为零度, 区域内有非常数的内热源. 稳态导热方程如下:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + AT + Bx = 0 \quad 0 < x < 1, \tag{6}$$

其中, 边界条件为: $T = 0$ $x = 0$ 和 $x = 1$ 式中 A 和 B 是常数 ($A = B = 1$), 此问题是一般变分问题的特殊情形, 因而等价的变分形式为:

$$I = \int_0^1 \left[\left(\frac{dT}{dx} \right)^2 - AT^2 - 2BxT \right] dx, \tag{7}$$

为了说明不同阶数近似公式的准确程度, 我们用单项式试探解与二项式试探解来求解.

2.1.1 单项式试探解

试探解为: $\bar{T}(x) = c_1 \phi_1(x)$, 其中, $\phi_1(x) = x(1-x)$.

显然, 函数 ϕ_1 满足方程 (6) 所示的两个边界条件. 把这个试探解带入方程式 (7), 即可得:

$$I(c_1) = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{A}{10} \right) c_1^2 - \frac{B}{6} c_1.$$

系数 c_1 根据方程式 (5) 确定为:

$$\frac{dI(c_1)}{dc_1} = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{A}{10} \right) c_1 - \frac{B}{6} = 0 \text{ 因此, } c_1 = \frac{B}{4(1-A/10)} = \frac{5}{18}.$$

由此得到单项式试探解为:

$$\bar{T}_1(x) = \frac{B}{4(1-A/10)} x(1-x) = \frac{5}{18} x(1-x).$$

2.1.2 二项式试探解

试探解为: $\bar{T}_2(x) = c_1 \phi_1(x) + c_2 \phi_2(x)$, 其中, $\phi_1(x) = x(1-x)$, $\phi_2(x) = x^2(1-x)$.

$\phi_1(x)$ 与 $\phi_2(x)$ 都满足边界条件方程 (6) 的两个条件, 把这些试探解代入方程式 (7), 得到 $I(c_1, c_2)$.

令: $\frac{dI(c_1, c_2)}{dc_j} = 0 \quad j = 1, 2$ 由此得到用于确定系数 c_1 与 c_2 的两个方程. 不难看到, 对于 $A = B = 1$ 的情形, $c_1 = 71/369$ 与 $c_2 = 7/41$, 则二项式试探解为:

$$\bar{T}_2(x) = x(1-x) \left(\frac{71}{369} + \frac{7}{41} x \right). \tag{8}$$

该问题的精确解为:

$$T(x) = \frac{B}{A} \left[\frac{\sin \left(A^{1/2} x(j) \right)}{\sin A^{1/2}} - x \right] = \frac{\sin x}{\sin 1} - x. \tag{9}$$

图 1 和图 2 为我们用二维计算程序模拟温度场分布, 上下两边界为对称边界. 图 1 背景云图为数值解, 虚线为方程 (9) 的精确解; 图 2 背景云图为数值解, 虚线为方程 (8) 的里兹近似解. 两者进行比较, 显然二项式试探解和数值解比较一致.

2.2 实心圆柱体的稳态热传导问题

我们给出一个柱坐标系中的例子, 数学方程和边界条件如下式所示:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) + \left(1 - \frac{1}{r^2} \right) T = 0 \quad 1 < r < 2 \tag{10}$$

其中, 边界条件为: $T = 4 \quad r = 1$ 和 $T = 8 \quad r = 2$

对边界上函数值为定值的情形, 等价的变分形式可为:

$$I = \int_1^2 \left[\left(\frac{dT}{dr} \right)^2 - \left(1 - \frac{1}{r^2} \right) T^2 \right] r dr. \tag{11}$$

选单项式试探解为:

$$\bar{T}_1(r) = c_1 \phi_1(r) + \phi_0(r), \tag{12}$$

式中, $\phi_1(r) = (r-1)(r-2)$, $\phi_0(r) = 4r$

方程式 (12) 满足方程 (10) 的边界条件. 把这个解代入变分形式的方程式 (11), 将其最终的表达式对 c_1 求导数, 并让它为零, 可得:

$$\frac{dI}{dc_1} = 2c_1 \int_1^2 \left(-r^5 + 6r^4 - 8r^3 - 6r^2 + 18r - 12 + \frac{4}{r} \right) dr + 8 \int_1^2 (-r^4 + 3r^3 + r^2 - 6r + 2) dr = 0$$

在完成积分后可求得 $c_1 = -3.245$

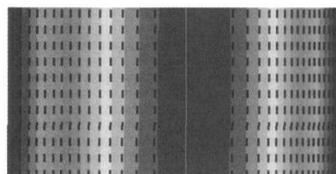


图 1 数值解和精确解温度场分布

Fig.1 Temperature field profile of arithmetical solution and exact solution

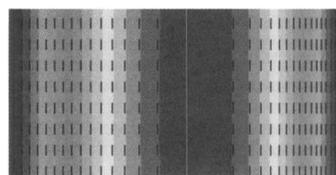


图 2 数值解和近似解温度场分布

Fig.2 Temperature field profile of approximation solution and exact solution

最终得到的单项式近似解为:

$$\bar{T}_1(r) = 3.245(r - 1)(2 - r) + 4r \quad (13)$$

该问题的精确解为^[1]:

$$\bar{T}(r) = 14.43J_1(r) + 3.008Y_1(r). \quad (14)$$

精确解方程 (14) 中, 我们需要求解第一类和第二类整数一阶贝塞耳函数^[2]. 把近似解与精确解在 r 为 1.2 1.5 与 1.8 处进行比较, 它们的偏差在 0.03% 以内. 因此在本算例中, 即使用单项近似式也可得到很好的结果. 图 3 和图 4 为计算结果, 在此我们选取了半圆为计算域. 在两图中, 背景云图都为数值解, 图 3 中虚线为精确解方程 (14), 图 4 中虚线为里兹近似解方程 (13). 从图中可以再次证明三者求解的一致性.

3 结论

本文介绍了热传导问题的变分表达式及由此推导得到的里兹近似方法. 近似解准确与否是通过将其结果与精确解或数值解的结果作比较来评定的. 因此, 为了对近似分析的准确性有一定的认识, 先对已有精确解的一些简单问题用近似法求解, 并把所得结果与其精确解、数值解做比较, 而后, 再把近似分析法用于求解各类复杂的及非线性的问题.

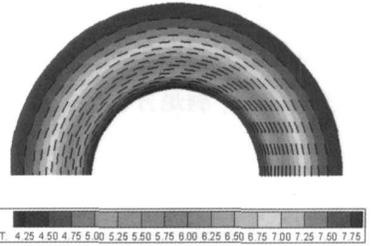


图 3 数值解和精确解温度场分布

Fig.3 Temperature field profile of arithmetical solution and exact solution

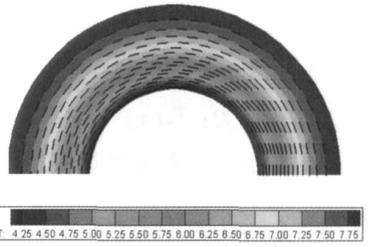


图 4 数值解和近似解温度场分布

Fig.4 Temperature field profile of approximation solution and exact solution

[参考文献] (References)

- [1] M N 奥齐西克. 热传导 [M]. 俞昌铭, 译. 北京: 高等教育出版社, 1984.
O z s i k M N. Conduction of H e a t [M]. Y u C h a n g m i n g T r a n s l a t e d B e i j i n g H i g h e r E d u c a t i o n P r e s s 1 9 8 4 (i n C h i n e s e)
- [2] 徐士良. FORTRAN 常用算法程序集 [M]. 北京: 清华大学出版社, 1997.
X u S h i l i a n g T h e F O R T R A N A l g o r i t h m P r o c e d u r e i n C o m m o n U s e A s s e m b l e s [M]. B e i j i n g : T s i n g h u a U n i v e r s i t y P r e s s 1 9 9 7 (i n C h i n e s e)
- [3] Patankar S V. Numerical Heat Transfer and Fluid Flow [M]. New York: Hemisphere Publishing, 1981.
- [4] 陶文铨. 数值传热学 [M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1988.
T a o W e n q u a n N u m e r i c a l V a l u e C o n d u c t s H e a t L e a r n i n g [M]. X i ' a n : X i ' a n J i a o t o n g U n i v e r s i t y P r e s s 1 9 8 8 (i n C h i n e s e)
- [5] Zhang M. Modeling of Radiative Heat Transfer and Diffusion Processes Using Unstructured Grid [D]. USA: Tennessee Technological University, 2000.
- [6] A p a c i V S. Conduction Heat Transfer [M]. Mass: Addison-Wesley Publishing Company, 1966.

[责任编辑: 刘 健]