

求解线性互补问题的区间 AOR 方法

李胜国, 成礼智

(国防科学技术大学 理学院, 湖南 长沙 410073)

[摘要] 将 AOR 方法与区间理论相结合, 给出了一种求解线性互补问题的区间方法——IAOR 方法, 并对系数矩阵为正对角的 H 矩阵时, 证明了该算法收敛的几个充分性条件. 最后给出了几个数值实例, 通过与其它区间算法相比说明了该 IAOR 方法的有效性.

[关键词] 线性互补问题, 区间数, 收敛性, AOR

[中图分类号] O 22 [文献标识码] A [文章编号] 1672-1292(2008)04-0136-05

Interval AOR Method for Linear Complementarity Problems

Li Shengguo Cheng Lizi

(School of Science, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract In this paper, we firstly establish a kind of interval method (IAOR, Interval Accelerated Overrelaxation method) to solve linear complementarity problem $LCP(M, q)$ by combining AOR method with interval theories. Then some sufficient conditions for convergence of the IAOR method are presented, when the system matrix M is an H -matrix with positive main diagonal. Finally, we give some examples to show the efficiency of the IAOR method.

Key words linear complementarity problem, interval, convergence, AOR

设 $M \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $q \in \mathbf{R}^n$, 则线性互补问题 $LCP(M, q)$ 指的是寻找一个向量 $x \in \mathbf{R}^n$, 使其满足下面的条件:

$$x \geq 0, Mx + q \geq 0, x^T(Mx + q) = 0. \quad (1)$$

由于线性互补问题在线性规划、凸二次规划、双矩阵对策及经济与交通平衡等科学与工程中有着广泛的应用, 所以探讨有效的求解方法一直是人们关注的问题. 至今已出现了很多有效的算法, 但是运用区间理论来进行求解的文章还不是很. 1984 年, Pang 指出 $LCP(M, q)$ 的求解可转化为求解下述方程的不动点问题^[1]:

$$x = \max\{0, x - D^{-1}(Mx + q)\} = (x - D^{-1}(Mx + q))_+. \quad (2)$$

式中, D 为正对角矩阵. 利用上述关系式, 在 2004 年 A lefeld Wang, Shen 提出了一种求解 $LCP(M, q)$ 的区间(数)算法——区间 Krawczyk (IK, Interval Krawczyk Method) 算法^[2], 该方法是 1999 年 A lefeld Chen 和 Potra 提出算法的改进^[3]. 最近, 国内学者吴业军和王忠英等在^[2]的基础上分别提出了一种改进的 IK 算法^[4, 5].

本文提出的区间算法则是一种新的区间迭代方法. 将 AOR 方法与区间理论相结合, 构造了一种区间 AOR 方法 (IAOR, Interval AOR method). 该算法与 IK 算法相比, 具有迭代次数少, 收敛速度快等优点. 当系数矩阵为正对角的 H -矩阵时, 给出了 IAOR 算法收敛的几个充分性条件, 并给出了证明. 最后给出了几个数值算例, 通过与其它区间算法进行比较, 说明 IAOR 方法具有收敛速度快的优点.

1 区间 AOR 方法

区间分析是定义在区间数上的一组运算规则. 其主要特点是能处理不确定数据, 自动记录计算机浮点

收稿日期: 2008-06-18

基金项目: 国家自然科学基金 (60573027) 资助项目.

通讯联系人: 成礼智, 教授, 博士生导师, 研究方向: 计算数学、小波变换与图像处理等. E-mail: clzhen@vip.sina.com

运算中所产生的截断和舍入误差, 高效而可靠地估计函数在某个自变量区域的取值范围等. 近代区间分析的兴起是以 Moore 的博士论文^[6]和他的两本专著^[7,8]为标志的. 此后, 区间分析理论就受到大家的广泛关注, 相关的学术论文、专著、国际会议和软件开始大量涌现. 关于其基本理论与应用, [6] ~ [9] 等文献已做了详细的说明. 为了便于阅读, 本文仅介绍一些将要用到的符号: 用 $[\bullet]$ 代表区间 (向量); $r([X]) = (\bar{X} - X)/2$ 代表区间 (向量) 的半径; $m([X]) = (\bar{X} + X)/2$ 代表区间 (向量) 的中点; $|\bullet|$ 表示取实变量的绝对值; $|[X]| = \max\{|x|: x \in [X]\}$ 表示取区间 (向量) 的绝对值; $D = \text{diag}(M)$ 表示 D 为对角矩阵且 D 的对角元素与矩阵 M 的相同. 本文所说的区间 (向量) 均是指实的有界闭集 $[X] = [X, \bar{X}]$.

定义^[2] (区间 max 运算) 设 $X = [X, \bar{X}]$ 为 n 维区间向量, 则称 $\max\{0, [X]\} = [\max\{0, X\}, \max\{0, \bar{X}\}]$ 为关于 $[X]$ 的区间 max 运算.

例如, 设 $[X] = ([-2, -1], [-1, 1], [1, 2])^T$, 则 $\max\{0, [X]\} = (0, [0, 1], [1, 2])^T$. 根据定义可看出区间 max 运算具有以下性质:

性质 1^[2] 设 $[X] \subseteq [Y]$, 则 $\max\{0, [X]\} \subseteq \max\{0, [Y]\}$. (3)

性质 2^[2] $r(\max\{0, [X]\}) \leq r([X])$. (4)

当系数矩阵 M 为正对角 H 矩阵时, 设 $M = D + L + U$, $D = \text{diag}(M)$, L, U 分别为严格下、上三角矩阵, 则可得到求解问题 (1) 的 IAOR 迭代公式:

$$[X]^{k+1} = \max\{0, (1-\omega)[x]^k - D^{-1}(\gamma L[x]^{k+1} + (\omega - \gamma)L[x]^k + \omega U[x]^k + \omega q)\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

式中, $[X]^k$ 为迭代得到的区间向量, ω 和 γ 为松弛参数.

当系数矩阵为正对角 H 矩阵时, 根据式 (5) 可得求解问题 (1) 的 IAOR 算法:

IAOR 算法:

Step 1 令 $k = 0$ 选取初始区间向量 $[X]^0$;

Step 2 计算 $[X]^{k+1} = \max\{0, (1-\omega)[x]^k - D^{-1}(\gamma L[x]^{k+1} + (\omega - \gamma)L[x]^k + \omega U[x]^k + \omega q)\}$
 $[X]^{k+1} = [X]^{k+1} \cap [X]^k$;

Step 3 如果满足 $r([X]^{k+1}) < \varepsilon$, ε 为一足够小的实数, 则算法中止; 否则令 $k = k + 1$ 返至 Step 2

下面具体地讨论初始区间的选取问题. 所选取的初始区间 $[X]^0$ 应包含问题 (1) 的解 x^* , 这样用式 (5) 迭代得到的区间序列 $\{[X]^k\}$ 就都包含解 x^* . 只要 $\{[X]^k\}$ 的半径收敛于零, 即可得到 x^* . Alefeld 等在文献 [2] 中给出了一个确定初始区间的方法, 可保证该区间向量包含问题 (1) 的解. 本文便采用与 [2] 类似的方法求解初始区间 $[X]^0$.

设 $M = (m_{ij}) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 为正对角的 H 矩阵, 初始区间为 $[X]^0 = [0, d]$, 其中 $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)^T \geq 0$ 和 $\langle M \rangle$ 为 M 的比较矩阵: $\langle M \rangle_{ii} = |M_{ii}|$, $i = 1, 2, \dots, n$, $\langle M \rangle_{ij} = -|M_{ij}|$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. 根据 [2] 可知, 只要 d 满足以下条件, 则 $[X]^0 = [0, d]$ 中便可包含线性互补问题 $\text{LCP}(M, q)$ 的解 x^* :

$$d \geq 0, \langle M \rangle d \geq 0, \langle M \rangle d + q \geq 0. \quad (6)$$

于是令 $u = \langle M \rangle d$, 选择 u 满足: $u_i = \begin{cases} 0 & \text{if } q_i \geq 0 \\ -q_i & \text{if } q_i < 0 \end{cases}$ 求解线性方程组 $\langle M \rangle d = u$ 便可得到初始区间 $[X]^0 = [0, d]$.

综上, 本文便建立了求解正对角 H 矩阵为系数矩阵的线性互补问题的 IAOR 算法. 下节将具体讨论 IAOR 算法的收敛性问题.

2 收敛性质

定义算子:

$$\Gamma([X], D): [Y] = \max\{0, (1-\omega)[X] - D^{-1}(\gamma L[Y] + (\omega - \gamma)L[X] + \omega U[X] + \omega q)\}. \quad (7)$$

在证明收敛性定理之前, 先给出几个重要的引理.

引理 1^[10] 如果 M 为正对角的 H 矩阵, 则 $\text{LCP}(M, q)$ 存在惟一解.

引理 2 当 M 为正对角的 H 矩阵时, 如果 $\omega > 0$ 并且 $LCP(M, q)$ 的解 $x^* \in [X]$, 则 $x^* \in \Gamma([X], D)$.

证明 由于 $LCP(M, q)$ 的解 $x^* \in [X]$,
$$x^* = (x^* - D^{-1}(Mx^* + q))_+ = (x^* - D^{-1}(\omega(Dx^* + Lx^* + Ux^* + q))_+ =$$
$$\{(1 - \omega)x^* - D^{-1}(\gamma Lx^* + (\omega - \gamma)Lx^* + \omega Ux^* + \omega q)\}_+$$
所以 $x^* \in \Gamma([X], D)$.

引理 3 当 M 为正对角的 H 矩阵时, 如果 IAOR 得到的区间序列 $\{[X]^k\}$ 的半径收敛于零, 则 $\{[X]^k\}$ 收敛于 $LCP(M, q)$ 的解 x^* .

证明 由 IAOR 算法的建立过程知 $x^* \in [X]^0$, 再根据引理 2 可知得到的区间序列 $\{[X]^k\}$ 为包含 x^* 的区间套序列, 且半径收敛于零, 所以 $\{[X]^k\}$ 收敛得到 x^* .

下面定理给出的 IAOR 方法收敛的几个充分性条件, 参考了文献 [11].

定理 1 设 $M = (m_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为正对角的 H 矩阵, 则 IAOR 迭代序列 $\{[X]^k\}$ 收敛于 $LCP(M, q)$ 的惟一解 x^* , 当松弛参数满足下面条件之一时:

$$0 \leq \gamma \leq \omega, 0 < \omega < \frac{2}{1 + \rho(|J|)}, \text{ 其中 } |J| = D^{-1}(|L| + |U|), \tag{8}$$

$$\begin{cases} 0 < \omega < \frac{2}{1 - \rho(|J|)} \\ \omega \leq \gamma < \frac{1 + \omega(\rho(|J|) - |1 - \omega|)}{2\rho(|J|)} \end{cases} \text{ if } \rho(|J|) \neq 0, \tag{9}$$

$$\omega \leq \gamma, 0 < \omega < 2 \text{ if } \rho(|J|) = 0. \tag{10}$$

证明 由引理 1 可知, $LCP(M, q)$ 具有惟一解. 又由引理 3 可知, 只需证明 $\{[X]^k\}$ 的半径收敛于零. 根据区间 \max 运算的性质 2 可知 $r(\max\{0, [X]^k\}) \leq r([X]^k)$, 所以:

$$r([X]^{k+1}) = r(\max\{0, (1 - \omega)[X]^k - D^{-1}(\gamma L[X]^{k+1} + (\omega - \gamma)L[X]^k + \omega U[X]^k + \omega q)\}) \leq$$
$$r((1 - \omega)[X]^k - D^{-1}(\gamma L[X]^{k+1} + (\omega - \gamma)L[X]^k + \omega U[X]^k)) =$$
$$(|1 - \omega| + |\omega - \gamma||L| + |\omega||U|) \cdot r([X]^k) + |D^{-1}||L| r([X]^{k+1}).$$

上面最后一个等式用到了 [9] 的命题 3.1.12 中的 (41) 式. 所以在满足定理的条件下, $r([X]^{k+1}) \leq L(\omega, \gamma)r([X]^k)$. 其中, $L(\omega, \gamma) = (I - \gamma D^{-1}|L|)^{-1}(|1 - \omega|I + D^{-1}(|\omega - \gamma||L| + |\omega||U|))$. 此时有 $L(\omega, \gamma) = I + (D - \gamma|L|)^{-1}(|1 - \omega|D + |\omega - \gamma||L| + |\omega||U| - D + \gamma|L|) \leq I + (D - \gamma|L|)^{-1}D[|1 - \omega| - 1]I + (|\omega - \gamma| + \gamma)D^{-1}(|L| + |U|) \leq I + (D - \gamma|L|)^{-1}D[|1 - \omega| - 1]I + (|\omega - \gamma| + \gamma)J_\varepsilon$. 其中, $J_\varepsilon = D^{-1}(|L| + |U|) + \varepsilon ee^T$, $\varepsilon > 0$, $e = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$. 由于 M 为 H 矩阵, 所以 $\rho(D^{-1}(|L| + |U|)) < 1$. 再由谱半径的连续性可知, 当 ε 充分小时, 有 $\rho_\varepsilon = \rho(J)$. 根据 Perron-Frobenius 定理可知, 存在正向量 $x_\varepsilon > 0$ 使得 $J_\varepsilon x_\varepsilon = \rho_\varepsilon x_\varepsilon$ 成立. 所以, $L(\omega, \gamma)x_\varepsilon \leq x_\varepsilon + [(|1 - \omega| - 1) + (|\omega - \gamma| + \gamma)\rho_\varepsilon]x_\varepsilon \leq (|1 - \omega| + (|\omega - \gamma| + \gamma)\rho_\varepsilon)x_\varepsilon < x_\varepsilon$.

最后的不等式利用了条件 (8) - (10) 等价于 $|1 - \omega| + (|\omega - \gamma| + \gamma)\rho_\varepsilon < 1$ 只要 ε 充分小. 故可知 $\rho(L(\omega, \gamma)) < 1$ 所以 $\{[X]^k\}$ 的半径收敛于零, $\{[X]^k\}$ 收敛到惟一的解 x^* .

3 数值实例

本节通过两个典型算例验证了 IAOR 方法的有效性, 并与已有方法进行了详细的比较. 所用的程序是借助区间程序包 Intlab-V 5.4 用 Matlab 编程实现的.

例 1 (Alefeld et al^[2]) 考虑 $LCP(M, q)$, 其中 $M = (m_1, m_2, m_3, m_4)$

$$m_1 = \begin{pmatrix} 1.388713122168711 \\ -4.699766249426920e-1 \\ 7.370559770214220e-2 \\ -4.110090461033111e-1 \end{pmatrix},$$

$$m_2 = \begin{bmatrix} -4.699766249426920e-1 \\ 1.453401598450949 \\ 3.334909523505895e-2 \\ -5.175564143615730e-1 \end{bmatrix}, \quad m_3 = \begin{bmatrix} 7.370559770214220e-2 \\ 3.334909523505895e-2 \\ 6.604515405730874e-1 \\ -1.651162344083680e-1 \end{bmatrix},$$
$$m_4 = \begin{bmatrix} -4.110090461033111e-1 \\ -5.175564143615730e-1 \\ -1.651162344083680e-1 \\ 1.477373564900058 \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} 8.679035675427925e-1 \\ 2.692546385763099 \\ -1.549159013124430 \\ -2.845459307376360 \end{bmatrix}.$$

中止条件为 $r([X]^{k+1}) < 10^{-15}$, 用 AOR 算法得到的区间解为:

$$[X] = \begin{bmatrix} [0.000000000000000, 0.000000000000000] \\ [0.000000000000000, 0.000000000000000] \\ [2.90838645068387, 2.90838645068388] \\ [2.25107664393776, 2.25107664393777] \end{bmatrix}.$$

本文得到的解是包含 x 的一个区间向量, 由于计算机表示浮点数的精度是有限的, 所以区间解更精确, 并且提供了解的误差信息. 与 [2] 中的 K 算法相比, AOR 方法的迭代次数更少, 收敛速度更快. 具体的比较结果如表 1 所示.

例 2 (颈轴承问题^[2]) 当用有限差分离散自由边界条件的颈轴承问题时, 可得到如下线性互补问题 $LCP(M, q)$, $M = (m_{ij})$ 为三对角阵:

$$m_{ij} = \begin{cases} -h_{i+\frac{1}{2}}^3, & j = i + 1 \\ h_{i-\frac{1}{2}}^3 + h_{i+\frac{1}{2}}^3, & j = i \\ -h_{i-\frac{1}{2}}^3, & j = i - 1 \end{cases} \quad q = (q_i), \quad q_i = \delta(h_{i+\frac{1}{2}} - h_{i-\frac{1}{2}}), \quad i = 1, 2, \dots, n + 1$$
$$h_{i-\frac{1}{2}} = \left[1 + \varepsilon \cos \left(\pi \left(i - \frac{1}{2} \right) \delta \right) \right] / \sqrt{\pi}, \quad i = 1, 2, \dots, n + 1, \quad \delta = T / (n + 1), \quad T = 2, \quad \varepsilon = 0.8, \quad n = 10$$
在计算时仍选取 $\omega = \gamma = 1$ 中止条件为 $r([X]^k) < 10^{-8}$, 其中 x 为区间向量的中点;

AOR 算法计算得到的结果为:

$$[X] = \begin{bmatrix} [0.15786777337439, 0.15786778295270] \\ [0.36489800275913, 0.36489801776015] \\ [0.72557949274711, 0.72557951041577] \\ [1.54394415904881, 1.54394417743126] \\ [2.94483409069727, 2.94483410565693] \\ [0.000000000000000, 0.000000000000000] \\ [0.000000000000000, 0.000000000000000] \\ [0.000000000000000, 0.000000000000000] \\ [0.000000000000000, 0.000000000000000] \\ [0.000000000000000, 0.000000000000000] \end{bmatrix}.$$

与 [4] 中改进的 K 算法相比, 在达到相同精度的前提下, 其收敛的速度仍低于 AOR 方法. 具体比较的结果如表 1 所示.

表 1 其它方法与 AOR 结果的对比

Table 1 Comparison of AOR method result with some other methods result				
	方法	迭代次数	半径宽度	$\ \ln n(x, Mx + q) \ _\infty$
例 1	K 算法	21	4.4409e-16	4.48880e-017
	AOR	12	4.440892e-016	4.440892e-016
例 2	改进的 K 算法	70	1.579101e-008	3.699664e-009
	AOR 算法	36	9.19121e-009	4.562610e-009

从以上两个例子可以看出, 本文提出的 AOR 方法在求解线性互补问题时, 比 [2] 或 [4] 提出的区间

方法的收敛速度都要快很多,迭代次数仅仅是它们迭代次数的一半左右.且与 [4]相比, AOR 方法除了需要选择 ω 和 γ 外,在迭代过程中不需要再选取任何其它参数,故该算法更简单,更容易编程实现.故 AOR 方法可有效地求解线性互补问题.

[参考文献] (References)

- [1] Pang J S. Necessary and sufficient conditions for the convergence of iterative methods for the linear complementarity problems [J]. J Optim Theory Appl 1984 42 1-17.
- [2] A lefel G, W Z Y, S Z H. Enclosing solutions of linear complementarity problems for H -matrices [J]. Reliable Computing 2004, 10 423-435.
- [3] A lefel G, Chen X, Potra F A. Numerical validation of solutions of linear complementarity problems [J]. Numer Math 1999 83 1-23.
- [4] 王忠英,王征宇,沈祖和. 解一类线性互补问题的区间方法 [J]. 高等学校计算数学学报, 2006 28(2): 185-192
Wang Zhongying, Wang Zhengyu, Shen Zuhe. Interval methods for linear complementarity problems [J]. Numerical Mathematics Journal of Chinese Universities 2006 28(2): 185-192 (in Chinese)
- [5] 吴业军,王天荆,沈祖和. 解线性互补问题的一类区间方法 [J]. 南京大学学报:数学半年刊, 2006 22(1): 140-148
Wu Y ejun, Wang Tianjing, Shen Zuhe. An interval method for solving linear complementarity problems [J]. Journal of Nanjing University Mathematical Biquarterly 2006 22(1): 140-148 (in Chinese)
- [6] Moore R E. Interval arithmetic and automatic error analysis in digital computing [D]. Stanford Stanford University 1962
- [7] Moore R E. Interval Analysis [M]. New Jersey: Prentice Hall 1966
- [8] Moore R E. Methods and Applications of Interval Analysis [M]. Philadelphia: SIAM, 1979
- [9] Neeumeaier A. Interval Methods for Systems of Equations [M]. New York: Cambridge University Press 1990
- [10] Bai Z Z, Evans D J. Matrix multislitting relaxation methods for linear complementarity problems [J]. Comput Math 1997 63 309-326
- [11] 白中治. 并行区间矩阵多分裂 AOR 算法及其收敛性 [J]. 应用数学与力学, 1999(20): 169-174
Bai Zhongzhi. Parallel interval matrix multislitting AOR methods and their convergence [J]. Applied Mathematics and Mechanics 1999(20): 169-174 (in Chinese)

[责任编辑: 严海琳]