

模糊时滞系统基于状态反馈的 H_2/H_∞ 控制

冯春梅, 陆俊玮, 郭怡倩

(南京师范大学 电气与自动化工程学院, 江苏 南京 210042)

[摘要] 考虑一类连续模糊时滞系统基于状态反馈的 H_2/H_∞ 控制问题. 目的是设计模糊状态反馈控制器, 使得闭环系统渐近稳定, 且闭环系统满足给定的 H_∞ 性能指标, 同时给定的二次成本函数有上界. 利用线性矩阵不等式方法, 给出了该问题可解的充分条件. 分析表明, 期望的状态反馈控制器可通过求解一组给定的线性矩阵不等式而得到. 仿真结果验证了所提出方法的有效性.

[关键词] 模糊时滞系统, H_2/H_∞ 控制, 状态反馈

[中图分类号] TP 273.4 [文献标识码] A [文章编号] 1672-1292(2009)03-0001-07

H_2/H_∞ Control for Fuzzy Systems With Time Delays Based on State Feedback

Feng Chunmei, Lu Junwei, Guo Yiqian

(School of Electrical and Automation Engineering, Nanjing Normal University, Nanjing 210042, China)

Abstract This paper considers the H_2/H_∞ control problem for a class of continuous fuzzy systems with time-delays based on state feedback. The purpose is to design a state feedback controller such that the closed-loop system is asymptotically stable with given H_∞ norm bound and the cost function has an upper bound. Using the linear matrix inequality method, sufficient conditions are given for the solvability of this problem. It is shown that the desired state feedback controller can be obtained by solving some linear matrix inequalities. The simulation result shows the effectiveness of the proposed method.

Key words Fuzzy delayed systems, H_2/H_∞ control, state feedback

由于 T-S (Takagi-Sugeno) 模糊系统模型可以用来对不确定非线性系统建模和控制, 对该类模糊系统的研究已成为模糊控制领域的一个研究热点. 有关该类模糊系统控制与滤波方面的研究结果时有发表^[1-2]. 另一方面, 时滞是各种控制系统中普遍存在的现象, 因此, T-S 时滞模糊系统近来已引起关注. 文献[3]研究了 T-S 时滞模糊系统的镇定问题, 并提出了控制器设计的线性矩阵不等式 (LMI) 方法; 有关离散 T-S 时滞模糊系统鲁棒 H_∞ 控制方面的研究见文献[4].

虽然 T-S 时滞模糊系统的 H_∞ 控制已得到广泛研究, 但 H_∞ 控制没有考虑系统状态及控制能量的受限问题. 而在系统的实际运行中, 系统状态及控制能量通常都要受到一定的限制, 即存在所谓的系统执行机构的饱和问题. 若控制量过大, 很容易使系统不能按照所期望的规则运行, 以至期望的系统品质不能达到要求. 研究表明, H_2 性能指标可以作为一种系统状态和控制输入能量的度量. 而以设计满足一定的 H_2 性能指标为目的 H_2 控制方法, 可以较好地克服上述的能量受限问题^[5]. 因此, 无论是确定性系统还是随机系统, 同时考虑满足 H_2 和 H_∞ 性能指标的 H_2/H_∞ 控制是鲁棒控制理论研究中一个重要的课题^[5-13].

本文研究具有时滞的 T-S 模糊系统的 H_2/H_∞ 控制问题. 目的是利用 LMI 方法, 设计模糊状态反馈控制器, 使得闭环系统不仅渐近稳定, 而且给定的二次成本函数有上界, 同时闭环系统满足给定的 H_∞ 性能指标.

收稿日期: 2008-12-18

通讯联系人: 冯春梅, 讲师, 研究方向: 自动控制理论. E-mail: fengchunmei@njnu.edu.cn

1 问题描述

考虑如下的时滞连续 T - S 模型, 第 i 条模糊规则如下:

模糊规则 i If $x_1(t)$ is Γ_1^i and...and $x_n(t)$ is Γ_n^i , Then

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + A_{di} x(t - \tau) + B_i u(t) + D_i \omega(t), \tag{1}$$

$$z(t) = C_{1i} x(t) + D_{1i} u(t), \tag{2}$$

$$x(t) = \phi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \quad i = 1, 2, \dots, r, \tag{3}$$

其中, Γ_i^i 是一个模糊集; $x(t) \in R^n$ 是系统的状态向量; $u(t) \in R^m$ 是系统的控制输入向量; $\omega(t) \in R^s$ 是系统的外部扰动向量, 且 $\omega(t) \in L_2[0, \infty)$; $z(t) \in R^l$ 是系统的被控输出向量; $A_i \in R^{n \times n}$ 、 $A_{di} \in R^{n \times n}$ 、 $B_i \in R^{n \times m}$ 、 $C_{1i} \in R^{l \times n}$ 、 $D_i \in R^{n \times s}$ 和 $D_{1i} \in R^{l \times m}$ 是系统的已知矩阵; r 是这个模糊模型的模糊规则数; $\tau > 0$ 表示时间滞后常数. 去模糊化后, T - S 模糊系统 (1), (2) 可表示为:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) [A_i x(t) + A_{di} x(t - \tau) + B_i u(t) + D_i \omega(t)], \tag{4}$$

$$z(t) = \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) [C_{1i} x(t) + D_{1i} u(t)], \tag{5}$$

其中, $\omega_i(x(t)) = \prod_{j=1}^n \Gamma_j^i(x_j(t))$, $h_i(x(t)) = \frac{\omega_i(x(t))}{\sum_{i=1}^r \omega_i(x(t))}$,

这里, $\Gamma_j^i(x_j(t))$ 是 $x_j(t)$ 在集合 Γ_j^i 中的隶属度函数, $h_i(t)$ 满足如下性质:

$$h_i(x(t)) \geq 0 \quad \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) = 1 \quad i = 1, 2, \dots, r$$

与 T - S 模糊模型 (1) ~ (3) 相关的成本函数定义如下:

$$J = \int_0^\infty [x(t)^T S x(t) + u(t)^T R u(t)] dt \tag{6}$$

这里 S 和 R 都是给定的正定矩阵.

下面, 考虑 T - S 模糊模型具有如下形式的状态反馈控制器:

控制器规则 i If $x_1(t)$ is Γ_1^i and...and $x_n(t)$ is Γ_n^i , Then

$$u(t) = K_i x(t), \quad i = 1, 2, \dots, r \tag{7}$$

其中, K_i 为待求的模糊控制器增益阵; 则整个模糊控制器可表示为:

$$u(t) = \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) K_i x(t), \quad i = 1, 2, \dots, r \tag{8}$$

将此控制器作用于 (4) 和 (5) 得到闭环系统如下:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t)) h_j(x(t)) [(A_i + B_i K_j) x(t) + A_{di} x(t - \tau) + D_i \omega(t)], \tag{9}$$

$$z(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t)) h_j(x(t)) [(C_{1i} + D_{1i} K_j) x(t)], \quad i, j = 1, 2, \dots, r. \tag{10}$$

本章所考虑的 H_2 H_∞ 控制问题可描述为: 针对 T - S 时滞模糊系统 (1) ~ (3), 设计模糊控制器 (8), 使得闭环系统 (9), (10) 满足:

- (I) 当 $\omega(t) = 0$ 时, (9) 渐近稳定;
- (II) 当 $\omega(t) = 0$ 时, 成本函数 (6) 存在有限的上界;
- (III) 在零初始条件下, 闭环系统满足如下的 H_∞ 性能指标:

$$\|z\|_2 < \gamma \| \omega \|_2, \tag{11}$$

其中 $\gamma > 0$ 是给定的干扰抑制常数.

2 主要结论

先引入如下引理:

引理 1^[2] 给定一正常数 ε , D, M, F 是适维的实矩阵, 并且 $F^T F \leq I$, 则对任意常数 $\varepsilon > 0$ 以及适维向量 x, y :

$$2x^T DFM y \leq \varepsilon^{-1} x^T D D^T x + \varepsilon y^T M^T M y.$$

为了解决本章所考虑的 H_2 H_∞ 控制问题, 我们先给出如下结论.

定理 1 如果存在正定矩阵 P 及 Q 使得如下的矩阵不等式对 $1 \leq i \leq j \leq r$ 同时成立:

$$\begin{bmatrix} C_{Kij}^T C_{Kij} + 2W_{Kij} + 4Q & P(A_{di} + A_{dj}) & P(D_i + D_j) \\ (A_{di} + A_{dj})^T P & -Q & 0 \\ (D_i + D_j)^T P & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} 2Q + 2S + 2K_i^T R K_i + W_{Kij} & P(A_{di} + A_{dj}) \\ (A_{di} + A_{dj})^T P & -2Q \end{bmatrix} < 0 \quad (13)$$

其中, $W_{Kij} = PA_{Kij} + A_{Kij}^T P$, $C_{Kij} = C_{li} + C_{lj} + D_{li}K_j + D_{lj}K_i$, $A_{Kij} = A_i + A_j + B_iK_j + B_jK_i$, 则闭环系统 (9), (10) 满足 (I) (II) (III). 此时, 成本函数 (6) 满足:

$$J \leq x(0)^T P x(0) + \int_0^\infty x(s)^T Q x(s) ds \quad (14)$$

证明首先证明闭环系统的渐近稳定性. 为此, 令 $\omega(t) = 0$ 则 (9) 式成为:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t)) h_j(x(t)) [(A_i + B_i K_j) x(t) + A_{di} x(t - \tau)], \quad (15)$$

对此系统, 构造如下的 Lyapunov 函数:

$$V(x_t) = x(t)^T P x(t) + \int_t^\infty x(s)^T Q x(s) ds \quad (16)$$

其中, $x_t = x(t + \theta)$, $\theta \in [-\tau, 0]$. 于是, 沿着系统 (15) 的轨线, $V(x_t)$ 对时间 t 的导数如下:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) &= 2x(t)^T P \dot{x}(t) + x(t)^T Q x(t) - x(t - \tau)^T Q x(t - \tau) = \\ &= 2 \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t)) h_j(x(t)) x(t)^T P [(A_i + B_i K_j) x(t) + A_{di} x(t - \tau)] + \\ &+ x(t)^T Q x(t) - x(t - \tau)^T Q x(t - \tau) = \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t)) h_j(x(t)) x(t)^T P [A_{Kij} x(t) + A_{dij} x(t - \tau)] + \\ &+ x(t)^T Q x(t) - x(t - \tau)^T Q x(t - \tau) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t)) h_j(x(t)) \{ x(t)^T P [A_{Kij} x(t) + A_{dij} x(t - \tau)] + \\ &+ [A_{Kij} x(t) + A_{dij} x(t - \tau)]^T P x(t) \} + x(t)^T Q x(t) - x(t - \tau)^T Q x(t - \tau) = \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^r h_i(x(t))^2 \xi(t)^T \Theta_{Kii} \xi(t) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1, i < j}^r h_i(x(t)) h_j(x(t)) \xi(t)^T \Theta_{Kij} \xi(t), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\text{其中: } \xi(t) = [x(t)^T \quad x(t - \tau)^T]^T, \quad \Theta_{Kij} = \begin{bmatrix} 2W_{Kij} + 4Q & 2P(A_{di} + A_{dj}) \\ 2(A_{di} + A_{dj})^T P & -4Q \end{bmatrix}, \quad 1 \leq i \leq j \leq r.$$

另一方面, 对 (12) 式左乘 $\text{diag}(I, 2I, 2I)$ 并右乘其转置得:

$$M_{Kij} < 0 \quad 1 \leq i \leq j \leq r, \quad (18)$$

$$\text{其中: } M_{Kij} = \begin{bmatrix} C_{Kij}^T C_{Kij} + 2W_{Kij} + 4Q & 2P(A_{di} + A_{dj}) & 2P(D_i + D_j) \\ 2(A_{di} + A_{dj})^T P & -4Q & 0 \\ 2(D_i + D_j)^T P & 0 & -4\gamma^2 I \end{bmatrix}.$$

由 (18) 可得 $\Theta_{Kij} < 0 \quad 1 \leq i \leq j \leq r$. 据此及 (17) 得:

$$\dot{V}(x_t) < 0 \quad \xi(t) \neq 0 \quad (19)$$

所以当 $\omega(t) = 0$ 时, (9) 渐近稳定. 下面证明当 $\omega(t) = 0$ 时, 成本函数 (6) 存在有限的上界; 为此, 将 (17) 重新表示为:

$$V\dot{x}_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r h_i(x(t))^2 \xi(t)^T \tilde{\Theta}_{K_{ii}} \xi(t) + \sum_{i,j=1, i < j}^r h_i(x(t)) h_j(x(t)) \xi(t)^T \tilde{\Theta}_{K_{ij}} \xi(t), \quad (20)$$

其中:

$$\tilde{\Theta}_{K_{ij}} = \begin{bmatrix} \mathcal{Q} + W_{K_{ij}} & P(A_{di} + A_{dj}) \\ (A_{di} + A_{dj})^T P & -2\mathcal{Q} \end{bmatrix}, \quad 1 \leq i \leq j \leq r \quad (21)$$

而由 (13) 易得: $\tilde{\Theta}_{K_{ij}} < \begin{bmatrix} -2S - 2K_i^T R K_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

由此及 (20) 可得: $V\dot{x}_i < -x(t)^T S x(t) - \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) x(t)^T K_i^T R K_i x(t)$, 即:

$$x(t)^T S x(t) + \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) x(t)^T K_i^T R K_i x(t) < -V\dot{x}_i. \quad (22)$$

另一方面, 利用引理 1 得:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t)) h_j(x(t)) x(t)^T K_i^T R K_j x(t) &= \\ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t)) h_j(x(t)) x(t)^T (K_i^T R K_j + K_j^T R K_i) x(t) &\leq \\ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t)) h_j(x(t)) x(t)^T (K_i^T R K_i + K_j^T R K_j) x(t) &= \\ \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) x(t)^T K_i^T R K_i x(t), \end{aligned}$$

由此及 (22) 可得: $x(t)^T S x(t) + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t)) h_j(x(t)) x(t)^T K_i^T R K_j x(t) < -V\dot{x}_i$,

即: $x(t)^T S x(t) + u(t)^T R u(t) < -V\dot{x}_i$.

考虑到 (15) 的渐近稳定性, 将上式从 0 到 ∞ 积分可得: $J \leq V(x_0)$,

即当 $\omega(t) = 0$ 时, 成本函数 (6) 存在有限的上界, 且上界满足 (14).

最后证明 H_∞ 性能指标 (11) 成立. 为此, 定义如下性能指标:

$$J_T = \int_0^M [z(t)^T z(t) - \gamma^2 \omega(t)^T \omega(t)] dt \quad (23)$$

这里 $M > 0$ 考虑到零初始状态, 则可得

$$\begin{aligned} J_T &= \int_0^M [z(t)^T z(t) - \gamma^2 \omega(t)^T \omega(t) + V\dot{x}_i] dt - V(x_T) \leq \\ &\int_0^M [z(t)^T z(t) - \gamma^2 \omega(t)^T \omega(t) + V\dot{x}_i] dt, \end{aligned} \quad (24)$$

于是, 利用引理 1 得:

$$\begin{aligned} z(t)^T z(t) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{u=1}^r \sum_{v=1}^r h_i(x(t)) h_j(x(t)) h_u(x(t)) h_v(x(t)) x(t)^T (C_{1i} + D_{1i} K_j)^T (C_{1u} + D_{1u} K_v) x(t) = \\ &\frac{1}{4} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{u=1}^r \sum_{v=1}^r h_i(x(t)) h_j(x(t)) h_u(x(t)) h_v(x(t)) x(t)^T C_{K_{ij}}^T C_{K_{uv}} x(t) = \\ &\frac{1}{8} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{u=1}^r \sum_{v=1}^r h_i(x(t)) h_j(x(t)) h_u(x(t)) h_v(x(t)) x(t)^T (C_{K_{ij}}^T C_{K_{uv}} + C_{K_{uv}}^T C_{K_{ij}}) x(t) \leq \\ &\frac{1}{8} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{u=1}^r \sum_{v=1}^r h_i(x(t)) h_j(x(t)) h_u(x(t)) h_v(x(t)) x(t)^T (C_{K_{ij}}^T C_{K_{ij}} + C_{K_{uv}}^T C_{K_{uv}}) x(t) = \\ &\frac{1}{4} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t)) h_j(x(t)) x(t)^T C_{K_{ij}}^T C_{K_{ij}} x(t). \end{aligned}$$

于是, 根据上式及 (9), (10) 并通过计算可得:

$$z(t)^T z(t) - \gamma^2 \omega(t)^T \omega(t) + V\dot{x}_i =$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{u=1}^r \sum_{v=1}^r h_i(\mathbf{x}(t)) h_j(\mathbf{x}(t)) h_u(\mathbf{x}(t)) h_v(\mathbf{x}(t)) \mathbf{x}(t)^T \mathbf{C}_{\mathbf{K}ij}^T \mathbf{C}_{\mathbf{K}uv} \mathbf{x}(t) - \gamma^2 \omega(t)^T \omega(t) + \\
& 2 \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(\mathbf{x}(t)) h_j(\mathbf{x}(t)) \mathbf{x}(t)^T \mathbf{P} [(\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{K}_j) \mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_{di} \mathbf{x}(t - \tau) + \mathbf{D}_i \omega(t)] + \\
& \mathbf{x}(t)^T \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t - \tau)^T \mathbf{Q} \mathbf{x}(t - \tau) \leq \\
& \frac{1}{4} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(\mathbf{x}(t)) h_j(\mathbf{x}(t)) \mathbf{x}(t)^T \mathbf{C}_{\mathbf{K}ij}^T \mathbf{C}_{\mathbf{K}ij} \mathbf{x}(t) - \gamma^2 \omega(t)^T \omega(t) + \\
& \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(\mathbf{x}(t)) h_j(\mathbf{x}(t)) \mathbf{x}(t)^T \mathbf{P} [(\mathbf{A}_{\mathbf{K}ij} \mathbf{x}(t) + (\mathbf{A}_{di} + \mathbf{A}_{dj}) \mathbf{x}(t - \tau) + \\
& (\mathbf{D}_i + \mathbf{D}_j) \omega(t)] + \mathbf{x}(t)^T \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t - \tau)^T \mathbf{Q} \mathbf{x}(t - \tau) = \\
& \frac{1}{4} \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{x}(t))^2 \zeta(t)^T \mathbf{M}_{\mathbf{K}ii} \zeta(t) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1, i < j}^r h_i(\mathbf{x}(t)) h_j(\mathbf{x}(t)) \zeta(t)^T \mathbf{M}_{\mathbf{K}ij} \zeta(t). \quad (25)
\end{aligned}$$

其中, $\zeta(t) = [\mathbf{x}(t)^T \quad \mathbf{x}(t - \tau)^T \quad \omega(t)^T]^T$.

于是由 (18) 及 (25) 易得: $\mathbf{z}(t)^T \mathbf{z}(t) - \gamma^2 \omega(t)^T \omega(t) + \mathbf{V}^T \mathbf{x}_t < 0$

据此及 (24) 可得, 对所有的 $M > 0$ $J_T < 0$ 此即 (11) 成立, 证毕.

下面给出 $H_2 H_\infty$ 控制问题可解的条件.

定理 2 考虑模糊时滞系统 (4) ~ (6), 如果存在正定矩阵 \mathbf{P}, \mathbf{Q} 及矩阵 \mathbf{Y}_i , $1 \leq i \leq r$, 使得如下的 LM I 对 $1 \leq i \leq j \leq r$ 同时成立:

$$\begin{bmatrix} 2\Gamma_{ij} + 4\mathbf{Q} & (\mathbf{A}_{di} + \mathbf{A}_{dj})\mathbf{P} & \mathbf{D}_i + \mathbf{D}_j & \Lambda_{ij}^T \\ \mathbf{P}(\mathbf{A}_{di} + \mathbf{A}_{dj})^T & -\mathbf{Q} & 0 & 0 \\ (\mathbf{D}_i + \mathbf{D}_j)^T & 0 & -\gamma^2 \mathbf{I} & 0 \\ \Lambda_{ij} & 0 & 0 & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (26)$$

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{ij} + 2\mathbf{Q} & (\mathbf{A}_{di} + \mathbf{A}_{dj})\mathbf{P} & 2\mathbf{P} & 2\mathbf{Y}_i^T \\ \mathbf{P}(\mathbf{A}_{di} + \mathbf{A}_{dj})^T & -2\mathbf{Q} & 0 & 0 \\ 2\mathbf{P} & 0 & -2\mathbf{S}^{-1} & 0 \\ 2\mathbf{Y}_i & 0 & 0 & -\mathbf{R}^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (27)$$

其中, $\Gamma_{ij} = (\mathbf{A}_i + \mathbf{A}_j)\mathbf{P} + \mathbf{B}_i \mathbf{Y}_j + \mathbf{B}_j \mathbf{Y}_i + [(\mathbf{A}_i + \mathbf{A}_j)\mathbf{P} + \mathbf{B}_i \mathbf{Y}_j + \mathbf{B}_j \mathbf{Y}_i]^T$, (28)

$$\Lambda_{ij} = (\mathbf{C}_{li} + \mathbf{C}_{lj})\mathbf{P} + \mathbf{D}_{li} \mathbf{Y}_j + \mathbf{D}_{lj} \mathbf{Y}_i \quad (29)$$

则存在形如 (8) 的模糊状态反馈控制器使得闭环系统满足性能指标 (I) (II) (III). 此时, 期望的状态反馈增益阵为:

$$\mathbf{K}_i = \mathbf{Y}_i \mathbf{P}^{-1}, \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (30)$$

闭环系统成本函数 (6) 满足:

$$J \leq \mathbf{x}(0)^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{x}(0) + \int_{\tau}^0 \mathbf{x}(s)^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{x}(s) ds \quad (31)$$

证明

$$\text{令 } \hat{\mathbf{P}} = \mathbf{P}^{-1}, \quad \hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{P} \mathbf{Q} \mathbf{P}.$$

将不等式 (26) 左乘 $\text{diag}(\hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{P}}, \mathbf{I}, \mathbf{I})$ 右乘其转置得:

$$\begin{bmatrix} 2\tilde{\mathbf{W}}_{ij} + 4\hat{\mathbf{Q}} & \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{A}_{di} + \mathbf{A}_{dj}) & \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{D}_i + \mathbf{D}_j) & \tilde{\mathbf{C}}_{lij}^T \\ (\mathbf{A}_{di} + \mathbf{A}_{dj})^T \hat{\mathbf{P}} & -\hat{\mathbf{Q}} & 0 & 0 \\ (\mathbf{D}_i + \mathbf{D}_j)^T \hat{\mathbf{P}} & 0 & -\gamma^2 \mathbf{I} & 0 \\ \tilde{\mathbf{C}}_{lij} & 0 & 0 & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (32)$$

其中, $\tilde{\mathbf{W}}_{ij} = \hat{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{A}}_{ij} + \tilde{\mathbf{A}}_{ij}^T \hat{\mathbf{P}}$,

$$\tilde{\mathbf{C}}_{lij} = \mathbf{C}_{li} + \mathbf{C}_{lj} + \mathbf{D}_{li} \mathbf{Y}_j \hat{\mathbf{P}} + \mathbf{D}_{lj} \mathbf{Y}_i \hat{\mathbf{P}},$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_{ij} = \mathbf{A}_i + \mathbf{A}_j + \mathbf{B}_i \mathbf{Y}_j \hat{\mathbf{P}} + \mathbf{B}_j \mathbf{Y}_i \hat{\mathbf{P}}.$$

将 Schur 补应用于 (32) 得:

$$\begin{bmatrix} \tilde{C}_{1j}^T \tilde{C}_{1j} + 2\tilde{W}_{ij} + 4\hat{Q} & \hat{P}(A_{di} + A_{dj}) & \hat{P}(D_i + D_j) \\ (A_{di} + A_{dj})^T \hat{P} & -\hat{Q} & 0 \\ (D_i + D_j)^T \hat{P} & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \tag{33}$$

另一方面, 将不等式 (27) 左乘 $\text{diag}(\hat{P}, \hat{P}, I, I)$ 右乘其转置得:

$$\begin{bmatrix} \tilde{W}_{ij} + 2\hat{Q} & \hat{P}(A_{di} + A_{dj}) & 2I & 2\hat{P}Y_i^T \\ (A_{di} + A_{dj})^T \hat{P} & -2\hat{Q} & 0 & 0 \\ 2I & 0 & -2S^{-1} & 0 \\ 2Y_i \hat{P} & 0 & 0 & -R^{-1} \end{bmatrix} < 0$$

将 Schur 补应用于此不等式得:

$$\begin{bmatrix} 2\hat{Q} + 2S + 2\hat{P}Y_i^T R Y_i \hat{P} + \tilde{W}_{ij} & \hat{P}(A_{di} + A_{dj}) \\ (A_{di} + A_{dj})^T \hat{P} & -2\hat{Q} \end{bmatrix} < 0 \tag{34}$$

考虑到不等式 (33) 和 (34), 并应用定理 1 即可得所证结论成立, 证毕.

3 数值算例

这里, 我们给出一个数值算例以说明所提出设计方法的有效性.
考虑一个具有两条模糊规则的时滞不确定模糊系统:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^2 h_i(x(t)) [A_i x(t) + A_{di} x(t-\tau) + B_i u(t) + D_i \omega(t)], \\ z(t) &= \sum_{i=1}^2 h_i(x(t)) [C_i x(t) + D_{1i} u(t)], \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0.2 & -0.1 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ -0.2 & 0.2 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1.2 \end{bmatrix}, \\ B_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}, D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.3 \\ 0.4 & 0.1 \end{bmatrix}, \\ C_{11} &= \begin{bmatrix} -0.1 & 0.3 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}, C_{12} = \begin{bmatrix} 0 & -0.2 \\ -0.5 & 0 \end{bmatrix}, D_{11} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ -0.6 & -0.1 \end{bmatrix}, \\ D_{12} &= \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0 \end{bmatrix}, A_{d1} = \begin{bmatrix} 0 & 0.3 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}, A_{d2} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 \\ 0.2 & 0 \end{bmatrix}, \\ R &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

本例假设 $\gamma = 0.8$ 于是, 利用 Matlab 的 LM I 工具箱求解 (26) 与 (27) 得一组解为:

$$\begin{aligned} P &= \begin{bmatrix} 0.0972 & 0.0303 \\ 0.0305 & 0.2141 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 0.1634 & 0.0492 \\ 0.0492 & 0.5623 \end{bmatrix}, \\ Y_1 &= \begin{bmatrix} -1.3154 & 2.8441 \\ 0.8596 & -4.7781 \end{bmatrix}, Y_2 = \begin{bmatrix} -0.9562 & 1.0369 \\ -0.7958 & -3.4034 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

于是由定理 2 知 $H_2 H_\infty$ 控制问题可解, 其期望的模糊状态反馈控制控制器可以设计为:

控制规则 1 If $x_1(t)$ is Γ_1^i Then

$$u(t) = K_1 x(t),$$

控制规则 2 If $x_2(t)$ is Γ_2^i Then

$$u(t) = K_2 x(t),$$

这里, $K_1 = \begin{bmatrix} -18.5295 & 15.9236 \\ 16.5879 & -24.6802 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} -11.8886 & 6.5367 \\ -3.3489 & -15.4192 \end{bmatrix}.$

4 结语

本文主要研究了一类时滞 T-S 模糊系统的 H_2/H_∞ 控制问题. 应用 LM I 方法, 设计了模糊状态反馈控制器. 所设计的状态反馈控制器使得闭环系统渐近稳定, 给定的二次成本函数有上界, 而且闭环系统满足给定的 H_∞ 性能指标; 数值算例表明所提出的设计方法是有效的.

[参考文献] (References)

- [1] Takagi T, Sugeno M. Fuzzy identification of systems and its applications to modelling and control[J]. IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics 1985 15(1): 116-132
- [2] Wang H O, Tanaka K, Griffin M F. Approach to fuzzy control of nonlinear systems stability and design issues[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems 1996 4(1): 14-23
- [3] Mahmoud M S. Adaptive control of a class of time-delay systems with uncertain parameters[J]. Int J Control 1996 63(5): 937-950
- [4] Xu S, Lam J. Robust H_∞ control for uncertain discrete time-delay fuzzy systems via output feedback controllers[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems 2005 13(1): 82-93
- [5] Chan Y, Chen B S. Robust tracking designs for both holonomic and nonholonomic constrained mechanical systems adaptive fuzzy approach[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems 2000 8(1): 46-65
- [6] Lee H, Tomizuka M. Robust adaptive control using a universal approximator for SISO nonlinear systems[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems 2000 8(1): 94-106
- [7] Tanaka K, Ikeda T, Wang H O. Robust stabilization of a class of uncertain nonlinear systems via fuzzy control Quadratic stability, H_∞ control theory, and linear matrix inequalities[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems 1996 4(1): 1-13
- [8] Cao S G, Rees N W, Feng G. Analysis and design for a class of complex systems Part I Fuzzy modelling and identification [J]. Automatica 1997, 33(6): 1 017-1 028
- [9] Cao S G, Rees N W, Feng G. Analysis and design for a class of complex control systems[J]. Part II Fuzzy Controller Design Automatica 1997, 33(6): 1 029-1 039
- [10] Li X, de Souza C E. Criteria for robust stability and stabilization of uncertain linear systems with state delay[J]. Automatica 1997, 33(9): 1 657-1 662
- [11] Moheim S O R, Peteysen I R. Optimal quadratic guaranteed cost control of a class of uncertain time-delay systems[J]. EE Proc Control Theory Appl 1997 144(2): 183-188
- [12] 陆俊玮, 冯春梅, 郭爱琴. 中立型时滞系统的输出反馈镇定 [J]. 南京师范大学学报: 工程技术版, 2005, 5(2): 21-23
Lu Junwei, Feng Chunmei, Guo Aiqin. Output feedback stabilization of neutral delay systems[J]. Journal of Nanjing Normal University: Engineering and Technology Edition, 2005, 5(2): 21-23 (in Chinese)
- [13] 郭爱琴, 陆俊玮. 不确定离散系统的保成本控制 [J]. 南京师范大学学报: 工程技术版, 2002, 25(1): 108-112
Guo Aiqin, Lu Junwei. Guaranteed cost control for uncertain discrete Fuzzy systems[J]. Journal of Nanjing Normal University: Engineering and Technology Edition, 2002, 25(1): 108-112 (in Chinese)

[责任编辑: 刘 健]