

# 偏积分方法与数值方法的比较分析

黄庆宏<sup>1</sup>, 张 敏<sup>2</sup>, 刘会娟<sup>2</sup>

(1. 南京师范大学 动力工程学院, 江苏 南京 210042 2. 南京理工大学 动力工程学院, 江苏 南京 210094)

[摘要] 在介绍偏积分近似方法基本概念的基础上, 在结构化网格中, 用有限容积法数值求解稳态热传导问题, 同时进行偏积分近似解、精确解和数值解的比较分析. 从计算结果可以得到令人满意的一致性. 这些充分证明偏积分近似方法、解析方法和数值计算方法的实用性和互补性.

[关键词] 偏积分近似方法, 数值方法, 解析方法

[中图分类号] TK 124 [文献标识码] A [文章编号] 1672-1292(2009)03-0033-04

## Analysis and Comparison of Partial Integration Method and Numerical Computation

Huang Qinghong<sup>1</sup>, Zhang Min<sup>2</sup>, Liu Huijuan<sup>2</sup>

(1. School of Power Engineering Nanjing Normal University Nanjing 210042

2. School of Power Engineering Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094)

**Abstract** On the basis of introducing the basic concept of partial integration method, the steady state heat conduction equations were solved and calculated using the finite volume method in structured meshes for numerical, exact and approximate solutions. Compared with these calculation results, there is a good agreement between them. These proved that partial integration approximating method is believable and practical.

**Key words** partial integration method, numerical simulating method, analysis method

分离变量法是解析求解各种热传导问题最有效工具之一, 而伽略金法又是近似分析或数值分析求解这类问题几乎万能的手段之一. 它们两者的结合, 又可产生一种近似求解方法, 这就是偏积分法. 当一个多维热传导问题, 在维与维之间可以分离时, 偏积分方法在非齐次方向或非线性方向, 首先选择伽略金近似法; 然后进行积分. 这样我们就可得到另一维方向变量的常微分方程, 进行求解最后得到偏积分方法的近似解<sup>[1-5]</sup>.

用伽略金近似法求解了二维稳态热传导问题, 一般采用的试探解  $\bar{T}(x, y)$  是由自变量为  $x$  与  $y$  的函数  $\phi(x, y)$  所构成. 如果试探解  $\bar{T}(x, y)$  的构造对一个变量 (比如说  $y$ ), 其剖面的函数形式是确定的, 而对另一个变量, 其函数形式是待定的, 比如说变量  $x$  的函数  $X(x)$  是待定的, 那么, 仍可望得到一种较好的近似解.

总之, 对于变量为  $x, y$  的二维问题, 在变量  $y$  方面应用伽略金方法, 其结果将得到一个函数  $X(x)$  的常微分方程. 这个方法的一个优点是, 在温度剖面的函数形式有一个方向在预先不能被选定的情况下, 可根据问题的特点从由此得到的常微分方程的解来确定.

## 1 偏积分法的基本理论

在有限矩形区域内, 稳态热传导问题具有如下一般的形式<sup>[1]</sup>.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{g}{k} = 0 \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < f(x), \quad (1)$$

收稿日期: 2009-06-28

通讯联系人: 黄庆宏, 副教授, 研究方向: 热能工程技术及计算机应用. E-mail: huangqinghong@njnu.edu.cn

$$T = 0 \quad (x = 0, x = a, y = f(x)); \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad (y = 0). \tag{2}$$

将伽略金近似法应用于微分方程 (1) ~ (2), 并对变量  $y$  作偏积分可得:

$$\int_0^{f(x)} \left( \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2} + \frac{g}{k} \right) \phi_1(y) dy = 0 \tag{3}$$

在此考虑一个单项式试探解  $\bar{T}(x, y)$  为:

$$\bar{T}_1(x, y) = X(x) \phi_1(y) = X(x) \cdot (y^2 - f^2(x)). \tag{4}$$

显然, 上述试探解满足  $y = 0$  与  $y = f(x)$  处的边界条件, 而函数  $X(x)$  仍是待定的. 把试探解式 (4) 代入式 (3), 稍作运算之后, 即可得到如下求函数  $X(x)$  的常微分方程

$$-\frac{2}{5} f^2 X'' + 2ff'X' + (ff'' + f'^2 - 1)X = -\frac{g}{2k} \quad 0 < x < a \tag{5}$$

方程 (5) 具有的边界条件为:  $X(x) = 0 \quad x = 0, x = a$ .  
如函数  $f(x)$  已知上述方程即可求解. 下面让我们应用两个算例来说明.

### 2 直角坐标系的算例分析

第一个算例为矩形域, 采用直角坐标系来求解稳态热传导问题. 把对变量  $y$  的偏积分应用于微分方程, 按伽略金法可得到:

$$\int_{-b}^b \left( \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2} + \frac{g}{k} \right) \phi_1(y) dy = 0 \quad -a < x < a \tag{6}$$

一个单项式试探解  $\bar{T}(x, y)$ , 选为:

$$\bar{T}_1(x, y) = \phi_1(y)X(x) = (b^2 - y^2) \cdot X(x). \tag{7}$$

这试探解满足  $y = \pm b$  处的边界条件. 函数  $X(x)$  是待定的. 把试探解 (7) 代入式 (6) 有:

$$X''(x) - \frac{5}{2b^2}X(x) = -\frac{5g}{4b^2k} \quad -a < x < a \tag{8}$$

方程 (8) 具有边界条件为:

$$X(x) = 0 \quad x = \pm a \tag{9}$$

常微分方程 (8) 与 (9) 的解是:

$$X(x) = \frac{g}{2k} \left[ 1 - \frac{\cosh(\sqrt{2.5} \cdot x/b)}{\cosh(\sqrt{2.5} \cdot a/b)} \right].$$

则单项式试探解变为:

$$\bar{T}_1(x, y) = \frac{g}{2k} (b^2 - y^2) \left[ 1 - \frac{\cosh(\sqrt{2.5} \cdot x/b)}{\cosh(\sqrt{2.5} \cdot a/b)} \right]. \tag{10}$$

该问题的精确解为<sup>[2]</sup>:

$$T(x, y) = \frac{g}{k} \left\{ \frac{a^2 - x^2}{2} - 2a^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\beta_n^3} \frac{\cosh(\beta_n y/a) \cos(\beta_n x/a)}{\cosh(\beta_n b/a)} \right\}, \tag{11}$$

其中:

$$\beta_n = \frac{(2n+1)\pi}{2}. \tag{12}$$

数值计算的物性和几何参数如下 (单位为国际标准单位):

$$T_w = 0 \quad k = 1 \quad g = 5 \quad a = 1 \quad b = 2$$

图 1、图 2 和图 3 为二维程序计算的温度场分布. 图 1 背景云图为数值解, 虚线为方程 (11) 与 (12) 的精确解; 图 2 背景云图为数值解, 虚线为方程 (10) 的偏积分近似解; 图 3 背景云图为精确解, 虚线为近似解. 两者进行比较, 显然单项式试探解和精确解吻合较好.

### 3 极坐标系的算例分析

极坐标系的扇形域 ( $0 \leq r < 1, 0 < \theta < \theta_0$ ) 稳态热传导问题, 域内有恒定的热源  $g/(W/m^3)$ , 全部边

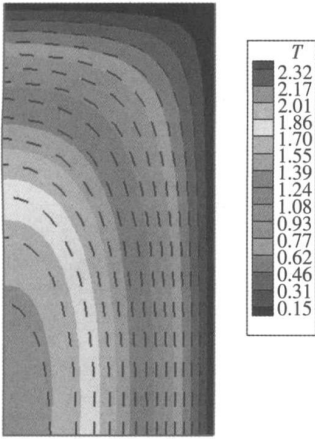


图1 数值解和精确解温度场分布

Fig.1 Temp of numerical and exact

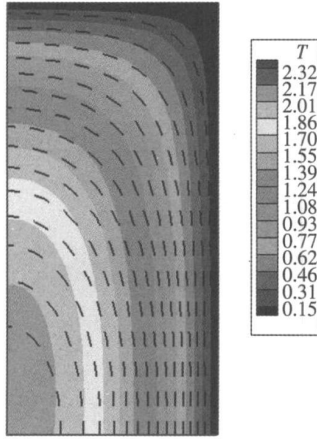


图2 数值解和近似解温度场分布

Fig.2 Temp of numerical and approximation

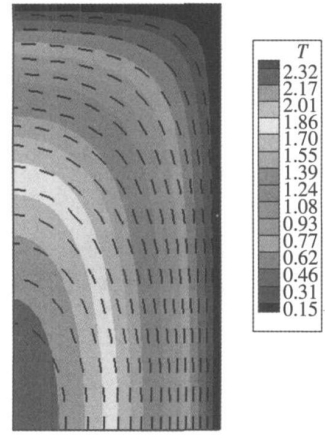


图3 精确解和近似解温度场分布

Fig.3 Temperature distribution of exact and approximation solutions

界都维持零度, 数学描述如下:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{g}{k} = 0 \quad 1 \leq r < 1, \quad 0 < \theta < \theta_0, \quad (13)$$

$$T = 0 \quad r = 1, \quad \theta = 0 \quad \theta = \theta_0 \quad (14)$$

将伽略金法应用于微分方程 (13) 与 (14), 对变量  $\theta$  进行偏积分有:

$$\int_0^{\theta_0} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \theta^2} + \frac{g}{k} \right] \phi_1(\theta) d\theta = 0 \quad 0 \leq r < 1, \quad (15)$$

取一个单项式试探解为:

$$\bar{T}(r, \theta) = F(r) \phi_1(\theta) = F(r) \sin(\pi\theta/\theta_0). \quad (16)$$

如此选定的试探解满足  $\theta = 0$  与  $\theta = \theta_0$  处的边界条件, 但函数  $F(r)$  仍是待定的. 将试探解 (16) 代入式 (15), 进行积分之后可得:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dF}{dr} \right) - \frac{\beta^2}{r^2} F(r) = -\frac{4g}{k\pi} \quad 0 \leq r < 1, \quad (17)$$

$$F(r) = 0 \quad r = 1, \quad \beta \equiv \pi/\theta_0 \quad (18)$$

方程 (17) 与 (18) 的一个特解是:  $F_p(r) = \frac{4g}{\pi k} \cdot \frac{r^2}{\beta^2 - 4}$

$F(r)$  的一般解是:  $F(r) = c_1 r^\beta + c_2 r^{-\beta} + \frac{4g}{\pi k} \frac{r^2}{\beta^2 - 4}$

这里, 根据  $r = 0$  处的解必须有界, 可得  $c_2 = 0$  再用  $r = 1$  处的边界条件, 可确定  $c_1$  为:

$$c_1 = -\frac{4g}{\pi k} \frac{1}{\beta^2 - 4}$$

最终,  $F(r)$  的解为:  $F(r) = \frac{4g}{\pi k} \frac{r^2 - r^\beta}{\beta^2 - 4}$

且单项式试探解  $\bar{T}(r, \theta)$  为:

$$\bar{T}(r, \theta) = \frac{4g}{\pi k} \frac{r^2 - r^{(\pi/\theta_0)}}{(\pi/\theta_0)^2 - 4} \sin\left(\frac{\pi\theta}{\theta_0}\right). \quad (19)$$

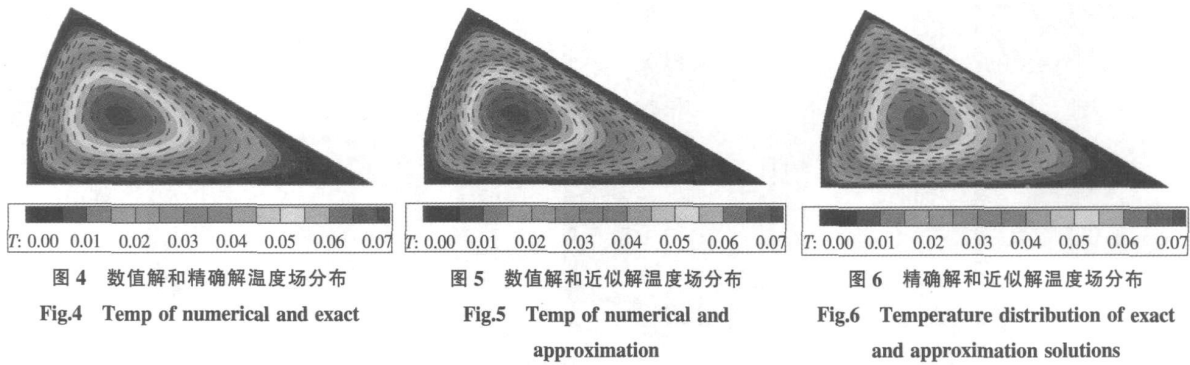
此问题的精确解为:

$$T(r, \theta) = \frac{4g}{\pi k} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{r^2 - r^{(n\pi/\theta_0)}}{(n\pi/\theta_0)^2 - 4} \sin\left(\frac{n\pi\theta}{\theta_0}\right), \quad (20)$$

上述得到的单项式近似解为精确解级数中的第一项. 数值计算中的物性和几何参数如下 (单位为国际标准单位):

$$T_w = 0 \quad k = 1 \quad g = 5 \quad r = 1 \quad \theta_0 = \pi/6$$

图 4、图 5 和图 6 为温度场分布. 图 4 背景云图为数值解, 虚线为方程 ( 20 ) 的精确解; 图 5 背景云图为数值解, 虚线为方程 ( 19 ) 的近似解; 图 6 背景云图为精确解, 虚线为近似解. 两者进行比较, 显然单项式试探解和精确解吻合较好.



4 结语

本文介绍了稳态热传导问题的偏积分近似方法的理论推导过程. 通过两个不同坐标系中的具体算例, 对精确解、数值解和偏积分近似解进行计算和比较分析. 从这些分析比较中, 不难看出, 数值传热计算的优越性和它的巨大发展潜力.

本文提供的偏积分近似解, 可以为没有精确解的问题, 作为检测数值分析方法正确性的有效工具.

[参考文献] (References)

[ 1 ] M N 奥齐西克 著. 热传导 [ M ]. 俞昌铭, 译. 北京: 高等教育出版社, 1984  
O z s i k M N. C o n d u c t i o n o f H e a t [ M ]. Y u C h a n g m i n g T r a n s l a t e d B e i j i n g H i g h e r E d u c a t i o n P r e s s 1 9 8 4 ( i n C h i n e s e )

[ 2 ] 黄庆宏, 张敏, 张钧波. 里兹近似方法与数值方法的比较分析 [ J ]. 南京师范大学学报: 工程技术版, 2008, 8 ( 3 ): 21-24  
H u a n g Q i n g h o n g , Z h a n g M i n , Z h a n g J u n b o C o m p a r a t i v e a n a l y s i s o f m e t h o d s o f R i t z a p p r o x i m a t e s o l u t i o n a n d n u m e r i c a l c o m p u t a t i o n [ J ]. J o u r n a l o f N a n j i n g N o r m a l U n i v e r s i t y E n g i n e e r i n g a n d T e c h n o l o g y E d i t i o n 2 0 0 8 8 ( 3 ): 2 1 - 2 4 ( i n C h i n e s e )

[ 3 ] 黄庆宏, 张敏, 许彬. 从数值解浅析热传导方程的精确解 [ J ]. 南京师范大学学报: 工程技术版, 2007, 7 ( 3 ): 40-43  
H u a n g Q i n g h o n g Z h a n g M i n X u B i n A n a l y z i n g e x a c t s o l u t i o n s o f h e a t c o n d u c t i o n e q u a t i o n s b y c o m p a r i n g w i t h n u m e r i c a l s o l u t i o n s [ J ]. J o u r n a l o f N a n j i n g N o r m a l U n i v e r s i t y E n g i n e e r i n g a n d T e c h n o l o g y E d i t i o n 2 0 0 7 7 ( 3 ): 4 0 - 4 3 ( i n C h i n e s e )

[ 4 ] 陶文铨. 数值传热学 [ M ]. 西安: 西安交通大学出版社, 1988  
T a o W e n q u a n N u m e r i c a l V a l u e C o n d u c t s H e a t L e a r n i n g [ M ]. X i a n X i a n J i a o T o n g U n i v e r s i t y P r e s s 1 9 8 8 ( i n C h i n e s e )

[ 5 ] Zhang M. M o d e l i n g o f r a d i a t i v e h e a t t r a n s f e r a n d d i f f u s i o n p r o c e s s e s u s i n g u n s t r u c t u r e d g r i d [ D ]. U S A : T e n n e s s e e T e c h n o l o g i c a l U n i v e r s i t y 2 0 0 0

[ 责任编辑: 刘 健 ]