

含内热源多维稳态热传导问题的数值分析

刘 亚¹, 侯小刚², 张 敏¹

(1. 南京理工大学 动力工程学院, 江苏 南京 210094 2. 南京师范大学 动力工程学院, 江苏 南京 210042)

[摘要] 用分离变量法和变量变换原理, 解析求解含内热源的多维稳态热传导问题, 并得到含有变型贝塞尔函数的精确解. 同时, 在结构化网格中, 用有限容积方法离散热传导方程, 用可视化 FORTRAN 编写二维和三维计算程序, 并且对该问题进行数值计算, 将数值计算结果与精确解进行比较. 这两种方法的结果呈现出令人满意的一致性, 从而可以佐证数值方法和解析方法完美的互补性与实用性.

[关键词] 分离变量, 变量变换, 数值方法, 解析方法

[中图分类号] TK 124 [文献标识码] A [文章编号] 1672-1292(2010)02-0045-03

Numerical Computation of Heat Conduction With Multidimensional Heat Source Terms

Liu Ya¹, Hou Xiaogang², Zhang Min¹

(1. School of Power Engineering Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094 China

2. School of Power Engineering Nanjing Normal University Nanjing 210042 China)

Abstract The multidimensional steady state heat conduction problems with the heat source terms were solved using the variation variable methods and variable transforms. And they were calculated in the finite volume method (FVM) and structured meshes. The results are in agreement when the numerical solution compared with the exact solutions. All these above-mentioned demonstrate the significance of application about the procedures in mathematics analyst and numerical computation.

Key words variation variable, variable transform, numerical calculating method, exact solution

用分离变量方法精确求解含热源的多维稳态热传导问题, 通常并不是很方便. 但是, 若通过对因变量作适当的变化, 能把此类问题转化为不含热源的热传导边值问题, 则最终得到的问题就可用分离变量方法来求解. 这个过程等价于寻找非齐次热传导微分方程的一个特解, 而使整个问题转化为齐次形式^[1-6].

本文讨论含热源的多维稳态热传导问题, 在给出基本概念和关系式的前提下, 通过一个经典的含内热源非齐次稳态热传导算例, 全面展示分离变量法在求解含热源热传导问题中的精彩之处, 以此为读者提供有益的参考.

1 基本理论和方法

在一个圆柱有限区域内, 含热源稳态热传导问题一般具有如下形式的微分方程,

$$\nabla^2 T(r, \phi, z) + \frac{1}{k} g(r, \phi, z) = 0 \quad \text{区域 } R \text{ 内} \tag{1}$$

R 区域有多个连续边界面. 这里, 我们将非齐次方程的一般解 $T(r, \phi, z)$ 表示为相应齐次方程的一般解 $\theta(r, \phi, z)$ 与任意一个特解 $p(r, \phi, z)$ 之和, 其表达式为:

$$T(r, \phi, z) = \theta(r, \phi, z) + p(r, \phi, z), \tag{2}$$

此时, 函数 $\theta(r, \phi, z)$ 满足如下齐次方程,

$$\nabla^2 \theta(r, \phi, z) = 0 \tag{3}$$

将变换式 (2) 代入方程式 (1), 并利用等式 (3), 可得到 $p(r, \phi, z)$ 的特解方程:

收稿日期: 2009-11-18

通讯联系人: 侯小刚, 副教授, 研究方向: 热力系统仿真, E-mail: hxg@njnu.edu.cn

$$\nabla^2 p(r, \phi, z) + \frac{1}{k} g(r, \phi, z) = 0 \quad \text{区域 } R \text{ 内.} \quad (4)$$

上述过程简要归纳为: 如果方程 (1) / 或方程 (4) 的一个特解已被求得, 则经过按式 (2) 定义的变量替换, 即可把非齐次方程 (1) 转化为齐次方程 (3). 方程 (1) 的特解 $p(r, \phi, z)$ 的函数形式取决于热源项的函数形式. 对于热源项为常数的情形, 特解的函数形式很容易直接看出来^[1]. 在方程 (1) 中我们采用了柱坐标系, 在其他坐标系中有相同的形式.

2 算例计算和分析

在一个 $0 \leq r \leq b$ 和 $0 < z \leq c$ 的实心圆柱内, 每单位体积以恒定的速率 g_0 产生热量; 所有边界温度保持零度. 本问题的数学描述为:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{k} g_0 = 0 \quad 0 \leq r < b, \quad 0 < z < c, \quad (5)$$

$$T = 0 \quad r = b, \quad z = 0 \text{ 和 } z = c. \quad (6)$$

按照方程 (2), 定义一个新变量和特解有:

$$T(r, z) = \theta(r, z) - \frac{g_0 z^2}{2k} + Az \quad (7)$$

在方程 (7) 式中, $\theta(r, z)$ 为齐次解, 后两项之和为一个特解. 这个特解的形式是根据经验得到的, 其中 A 为任意常数. 适当地选择该常数的值, 可使边界条件得到简化. 把方程式 (7) 代入方程式 (5) 和 (6) 有:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0 \quad 0 \leq r < b, \quad 0 < z < c. \quad (8)$$

$$\theta = \frac{g_0 z^2}{2k} - Az, \quad r = b, \quad \theta = 0, \quad z = 0, \quad \theta = \frac{g_0 c^2}{2k} - Ac, \quad z = c$$

因为 A 为任意常数, 不妨设 A 为: $A = \frac{g_0 c}{2k}$.

方程式 (7) 确定为:

$$T(r, z) = \theta(r, z) + \frac{g_0 z}{2k} (c - z). \quad (9)$$

从方程式 (8) 所示的问题可简化为:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0 \quad 0 \leq r < b, \quad 0 < z < c, \quad (10)$$

$$\theta = \frac{g_0 z}{2k} (z - c) \equiv f(z), \quad r = b, \quad \theta = 0, \quad z = 0, \quad z = c,$$

此问题的精确解为,

$$\theta(r, z) = \frac{2}{c} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{I_0(\eta_m r)}{I_0(\eta_m b)} \sin(\eta_m z) \int_0^c \sin(\eta_m z') f(z') dz', \quad (11)$$

式中, $\eta_m = \frac{m\pi}{c}$, $f(z) = \frac{g_0 z}{2k} (z - c)$.

对上式进行积分计算, 并把该式代入式 (9) 可得最终结果:

$$T(r, z) = \frac{g_0 z}{2k} (c - z) - \frac{4g_0 c^2}{\pi^3 k} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^3} \frac{I_0(\xi_m r)}{I_0(\xi_m b)} \sin(\xi_m z), \quad (12)$$

其中, $\xi_m = \frac{(2m+1)\pi}{c}$, 上式精确解中包含变型第一类零正数阶贝塞耳函数^[12].

接下来我们进行数值模拟. 数值模拟的方法为在结构化网格上的有限容积方法. 由于本问题的特殊性, 即模型在圆周方向上具有对称性, 我们可以利用这种特殊性, 用二维程序对方程 (5) 与 (6) 进行数值模拟, 即只在 r 和 z 方向上求解.

图 1 给出了精确求解方程 (12) 的温度场分布云图和结构化网格. 图 2 为精确解同数值解的比较, 背景云图为数值解, 虚线为精确解. 从图 2 中不难看出二者吻合得很好.

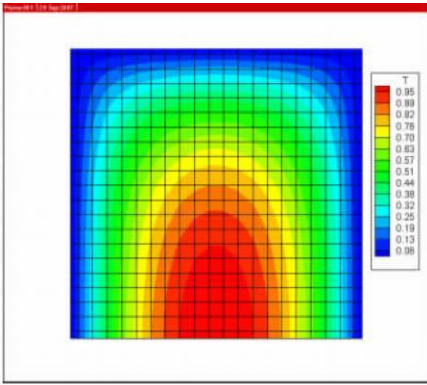


图 1 精确解温度场分布和网格

Fig.1 Temperature distributions of exact solutions and meshes

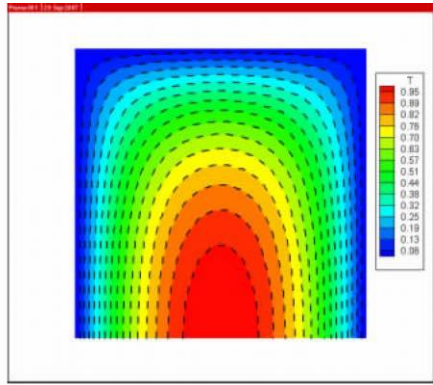


图 2 数值解和精确解的温度场分布

Fig.2 Temperature distributions of numerical and exact solutions

下面我们用三维程序对上述问题进行数值模拟, 同样采用在结构化网格上的有限容积法. 图 3 为三维程序计算的温度场分布. 图 4 为二维截面上的温度场分布. 将三维计算程序的结果同二维计算程序的结果进行比较, 二者基本一致, 只是在数量上有一点误差. 在结构化网格中, 圆心处的处理不太方便. 如果采用非结构化网格, 或者分区生成结构化网格, 结果会好一些.

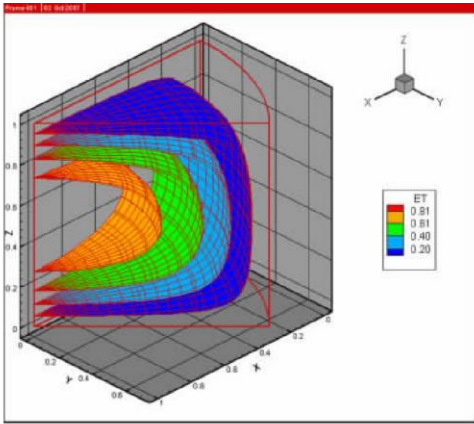


图 3 三维程序计算的温度场分布

Fig.3 Temperature distributions of numerical solutions with three-dimension program

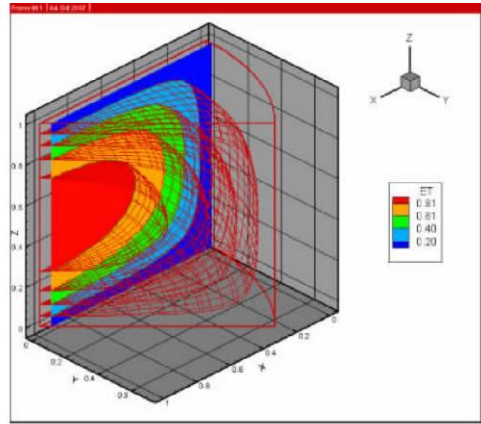


图 4 二维截面上的温度场分布

Fig.4 Temperature distributions of two-dimension section

3 结语

本文分别通过二维程序和三维程序, 求解含内热源多维稳态热传导问题, 并且与其精确解相比较, 得到了令人满意的一致性. 这些不仅可以证明二维程序、三维程序以及精确解的正确性, 同时更可体现出分离变量法和数值计算方法相结合的优越性, 并且为人们求解这类问题提供了有益的参考.

[参考文献] (References)

- [1] M N 奥齐西克. 热传导 [M]. 俞昌铭, 译. 北京: 高等教育出版社, 1984.
O z i k M N. Heat Conduction [M]. Yu Chang n g Translated Beijing H gh Education Press, 1984. (in Chinese)
- [2] 徐士良. FORTRAN 常用算法程序集 [M]. 北京: 清华大学出版社, 1997.
Xu Shi liang FORTRAN Common A lgorithm and Program [M]. Beijing Tsinghua University Press, 1997. (in Chinese)
- [3] Patankar S V. Computation of Conduction and Duct Flow Heat Transfer [M]. New York: Innovative Research, Inc, 1991
- [4] Patankar S V. Numerical Heat Transfer and Fluid Flow [M]. New York: Hemisphere Press, 1981.
- [5] 陶文铨. 数值传热学 [M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2001.
Tao Wen quan Numerical Heat Transfer [M]. Xi ' an Xi ' an Jiaotong University Press, 2001. (in Chinese)
- [6] Zhang M. Modeling of radiative heat transfer and diffusion processes using unstructured grid [D]. USA: Tennessee Technological University, 2000.

[责任编辑: 刘 健]