

基于有限元分析的棒球最佳击球点问题

倪睿¹,袁静¹,王琪¹,尹静²,庄建军¹

(1 南京大学 电子科学与工程学院,江苏 南京 210093 2 上海建桥学院 信息技术系,上海 201319)

[摘要] 针对棒球运动中的球棒最佳击球点问题,首先以梁振动模型为基础,研究了两端自由均匀杆振动能量的传递,得到了振动能量损失最小的受力区域.接着运用有限元分析法,将不规则的棒球棒模型细化为 752 个规则三角形进行受力分析,结合振动方程和边界条件,求出前 3 种振动模式下的振动节点,将振动能量损失最小的击球区域定位于基波节点与二次谐波节点之间.研究表明,以标准棒球棒 (81.3 cm) 为例,其最佳击球区域为: 62.4~70.8 cm,该结论为棒球运动员选择最佳击球区域提供了可靠的理论依据.

[关键词] 棒球棒,最佳击球点,梁振动模型,振动节点,有限元分析

[中图分类号] O 325 [文献标识码] A [文章编号] 1672-1292(2010) 03-0035-05

Analysis of the Sweet Zone on a Bat Based on the Finite Element Model

Ni Rui¹, Yuan Jing¹, Wang Qi¹, Yin Jing², Zhuang Jianjun¹

(1 Department of Electronic Science and Engineering Nanjing University, Nanjing 210093, China
2 Department of Information Technology, Shanghai Jianqiao College, Shanghai 201319, China)

Abstract In search of the optimal hit region in a running baseball bat based on the beam vibration model, this paper analyzes the energy transmission of the vibration for a uniform beam and obtains the zone where there is least energy loss. Then the finite element analysis is applied in which the irregularly shaped bat is meshed into 752 regular triangles to be analyzed, and the vibration equation together with boundary conditions is used to calculate its first three vibration nodes. Finally, the sweet zone is determined which is located between the base wave and the second order harmonic nodes. Taking the standardized baseball bat (81.3 cm) for an example, the sweet zone ranges from 62.4 cm to 70.8 cm from the thinner end, which provides a theoretical foundation for baseball players to choose an optimal hitting region and get a desirable effect.

Key words baseball bat, sweet zone, beam vibration model, vibration node, finite element analysis

棒球运动中,大多数运动员击球靠的是经验和感觉,而棒球棒中有一个特殊的区域,球击打在这个区域内会飞得又高又远,该区域被称为最佳击球区域(甜蜜点, sweet zone),对于最佳击球区域普遍有以下 3 种解释^[1]:

- (1) 球棒自由振动的基波节点与二次谐波节点之间,即振动能量传递最小的区域.
- (2) 击打过程中,手撞击感最小的区域,即撞击中心.
- (3) 手撞击感最小点与自由振动的基波节点之间(即综合考虑以上两种解释).

通过研究发现,球棒击球过程中,球棒的振动是整个击球过程中能量损耗的主要因素,因此应该尽量减小这部分能量的损失.本文以第 1 种解释为出发点,以梁振动模型为基础,研究了棒球棒的自由振动模型,并且运用有限元分析法详细地计算了棒球棒的振动参数,最终得到了棒球棒击球过程中振动能量损失最小的受力区域.

1 梁振动模型

实验证明,在棒球和球棒撞击的小于 1 μs 的瞬间球棒承受幅度约为 2 267.985 kg 的力,该撞击激发了

球棒的振动. 这种振动会导致球棒动能的损失, 进而影响到击球的效果. 此外, 这种振动还会导致运动员手腕处产生刺痛感^[2].

下面我们以梁振动模型为基础来分析棒球棒的自由振动过程, 主要分析其基波、二次谐波、三次谐波在球棒中的传递(忽略高次谐波), 从而找出振动最小的区域.

在击打过程中球棒与棒球正碰, 没有受到扭转力与纵向挤压力的作用, 从而忽略纵振动和扭转振动. 在击打的一瞬间, 由于作用时间极短, 从而忽略了手对球棒的影响, 这样我们就将棒球模型简化为两端自由的均匀杆, 如图 1 所示:

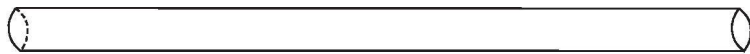


图 1 简化模型

Fig.1 Simplified model

杆的横振动的波动方程如下^[3]:

$$\frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} + \frac{1}{C^2 K^2} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

其中, η 是杆横振动位移量 /m; C 是波在杆中的传播速度 /(m/s); E 是杨氏模量 /Pa; ρ 是杆的材料密度 /(kg/m³); K 为截面回转半径 /m (对于半径为 a 的圆形截面 $K^2 = \frac{a^2}{4}$); S 是横截面积 /m².

用分离变量法, 首先把 $\eta(x, t)$ 分解为:

$$\eta(x, t) = Y(x)T(t). \quad (2)$$

联立 (1), (2) 可得:

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + w^2 T(t) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{d^4 Y(x)}{dx^4} - \frac{w^2}{C^2 K^2} Y(x) = 0 \quad (4)$$

两端自由杆振动模型的边界条件为^[4]:

$$\left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right]_{x=0} = 0 \quad \left[\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \right]_{x=0} = 0 \quad \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right]_{x=l} = 0 \quad \left[\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \right]_{x=l} = 0$$

将边界条件代入 (1), 解得:

$$A \left[\cosh \left[\frac{w}{v} l \right] - \cos \left[\frac{w}{v} l \right] \right] + B \left[\sinh \left[\frac{w}{v} l \right] - \sin \left[\frac{w}{v} l \right] \right] = 0 \quad (5)$$

$$A \left[\sinh \left[\frac{w}{v} l \right] + \cos \left[\frac{w}{v} l \right] \right] + B \left[\cosh \left[\frac{w}{v} l \right] - \cos \left[\frac{w}{v} l \right] \right] = 0 \quad (6)$$

式中 A, B 不全为 0 且满足:

$$\cosh \left[\frac{w}{v} l \right] \cos \left[\frac{w}{v} l \right] - 1 = 0. \quad (7)$$

(7) 这个条件限制 w 只能取一系列离散的值. 定义函数 $f(x) = \cosh(x) \cos(x) - 1$, 假设 $f(x) = 0$ 的解为 μ_n , 则 $\mu_n \cosh(\mu_n) \cos(\mu_n) - 1 = 0$, $\left[\frac{w_n}{v_n} l = \mu_n \right]$. 又, $w = 2\pi f$, $\frac{w_n}{v_n} l = \mu_n$, 解得:

$$f_n = \frac{CK}{2\pi l^2} \mu_n^2 \quad (8)$$

用函数 FindRoot[cos[x]*cosh[x]-1,{x,4}] 来找到前 3 个零点的位置, 得到前 3 个振动模式的频率为: $u_1 = 4.73$ $u_2 = 7.85$ $u_3 = 11$

$$f_1 = 3.56 \frac{CK}{l^2}, \quad f_2 = 2.75 f_1, \quad f_3 = 5.41 f_1. \quad (9)$$

球棒究竟是怎样振动的, 也就是波在球棒上的传播模型, 这就要解出上面波动方程的解. 从 (5), 可以解出 A 和 B 之间的关系如下:

$$B_n = \frac{\sinh u_n + \sin u_n}{\cosh u_n - \cos u_n} A_n \tag{10}$$

联立 (4), (10), 可以解得:

$$Y(x) = A \left\{ \left[\cosh \left(\frac{u_n}{l} x \right) + \cos \left(\frac{u_n}{l} x \right) \right] + \frac{\sinh u_n + \sin u_n}{\cosh u_n - \cos u_n} \left[\sinh \left(\frac{u_n}{l} x \right) + \sin \left(\frac{u_n}{l} x \right) \right] \right\} \tag{11}$$

$Y(x)$ 就是振动的幅度大小, 它乘以时间因子 $\cos(\omega t - \varphi)$, 就可以得到波动方程 $\eta(x, t)$ 的特解. 先把上面的 u_n 值带入 $Y(x)$, 可得 (假设 $A = 1$):

$$Y_n = \cosh \left[u_n \frac{x}{l} \right] + \cos \left[u_n \frac{x}{l} \right] - 0.982 \left[\sinh \left[u_n \frac{x}{l} \right] + \sin \left[u_n \frac{x}{l} \right] \right], \quad (u_1 = 4.73 \quad u_2 = 7.85 \quad u_3 = 11). \tag{12}$$

这里只考虑了前 3 种振动模式, 因为能量大部分集中在这 3 种振动模式中, 如图 2 所示.

下面列出了这几种振动模式的零点, 这些点类似于驻波中的波节点.

$$N = 1 \quad x_{11} = 0.224 \quad x_{12} = 0.776 \text{ (零点 } x \text{ 均是以归一化长度为 1 得到)}$$
$$N = 2 \quad x_{21} = 0.132 \quad x_{22} = 0.498 \quad x_{23} = 0.900$$
$$N = 3 \quad x_{31} = 0.094 \quad x_{32} = 0.356 \quad x_{33} = 0.643$$
$$x_{34} = 0.928$$

球撞击在零点上就不会激发相应模式下的振动, 为了使总振动能量损失尽量小, 忽略了高次谐波的影响, 综合考虑前 3 种振动模式, 将最佳击球区域定义为基波的第一个节点和二次谐波的第一个节点之间 ($0.776 \sim 0.868l$), 在这个区域撞击均匀杆所激发的振动幅度较小, 因杆振动造成的能量损失较小.

2 有限元分析

真实球棒是一个不规则、上粗下细的棒子, 为了很好地模拟出振动能量在真实球棒中的传递, 我们基于上面的梁振动模型, 利用有限元分析法^[5], 分析球棒的最佳击球区域.

为了简化模型, 这里忽略了微小的纵振动和扭转振动, 借助 MATLAB 中的 PDE 工具箱建立平面的有限元分析模型. 经过一次网格划分“Initialize mesh”和两次细化“Refine mesh”^[6], 把不规则的棒球棒模型划分成了 447 个顶点和 752 个简单的三角形来进行细化受力分析, 求出精细的振动模式, 如图 3 所示:

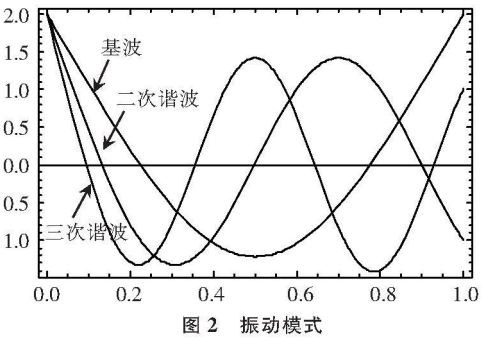


图 2 振动模式

注: 横坐标是杆的归一化长度, 纵坐标是振动横向位移量的归一化长度 (最大值为 2)

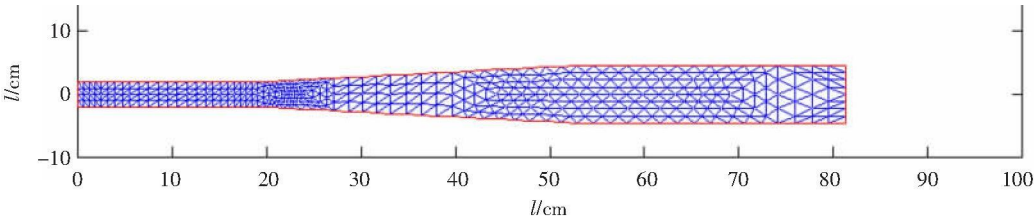


图 3 球棒网格划分

Fig.3 Meshed division of the bat

基于梁振动模型中已经求出的边界条件: $\left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right] = 0$ $\left[\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \right] = 0$ 以及内部作用的偏微分方程:

$$\frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} + \frac{1}{C^2 K^2} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0$$

用特征值法求解基波的振动形式^[7], 找到了 77 个特征值, 这里选择前 3 个 λ 特征值, 并且画出它们对应反映在球棒上的横振动模式^[8], 前 3 个谐波分别如图 4 图 5 图 6 所示.

下面根据有限元振动分析色图, 利用数据来找出基波、二次谐波、三次谐波的最小振动节点.

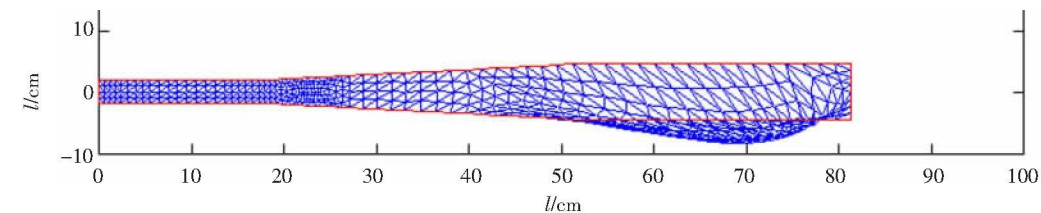


图 4 基波 $\lambda_1=0.127\ 5$
Fig.4 Base wave $\lambda_1=0.127\ 5$

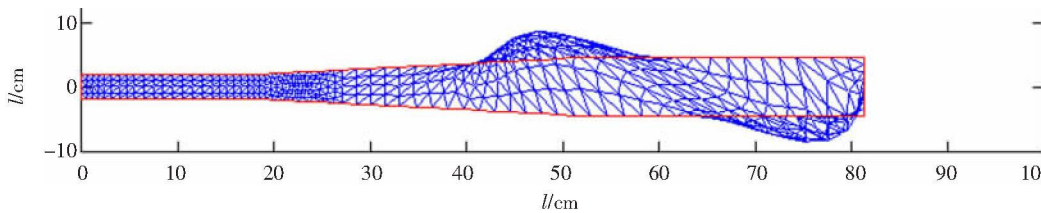


图 5 二次谐波 $\lambda_2=0.149\ 9$
Fig.5 Second order harmonic $\lambda_2=0.149\ 9$

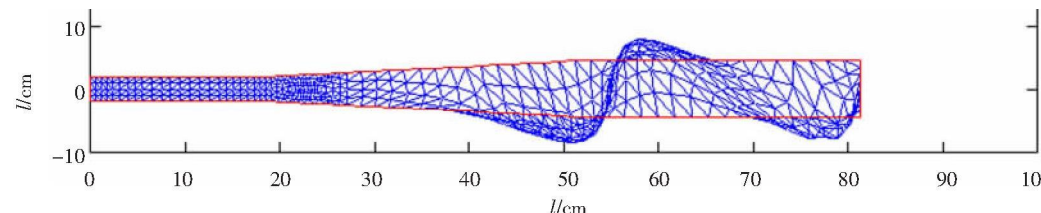


图 6 三次谐波 $\lambda_3=0.181\ 4$
Fig.6 Third order harmonic $\lambda_3=0.181\ 4$

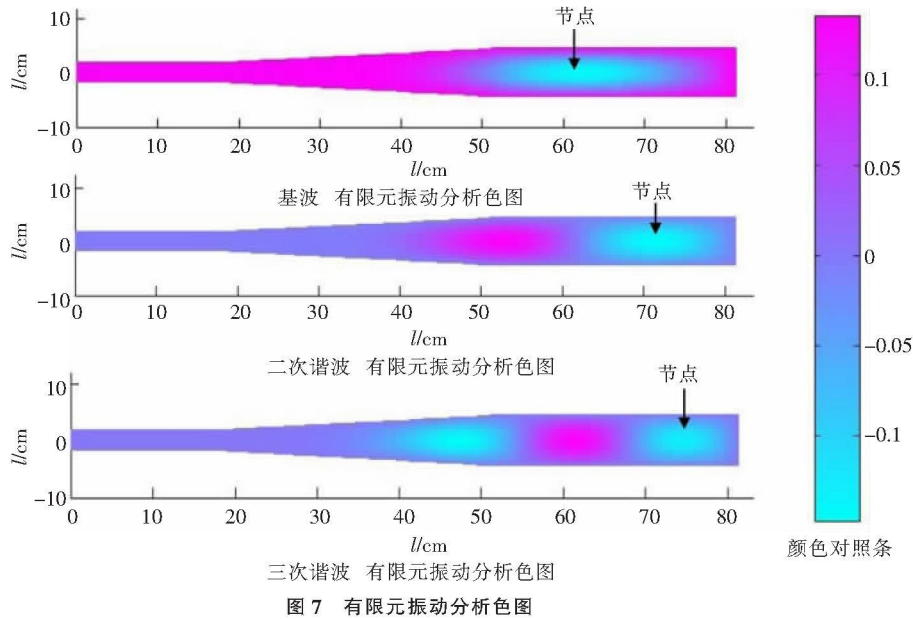


图 7 有限元振动分析色图
Fig.7 Mapping of the vibration by the finite element analysis

由图 7 可知,较亮区域振动参数小,为振动节点区域^[9].对球棒上 447 个顶点的振动参数进行分析,求得基波节点为 62.5 cm,二次谐波节点为 70.8 cm,三次谐波节点为 74.1 cm.所以得出标准棒球棒(81.3 cm)的最佳击球区域为:62.4~70.8 cm,由此可以看出有限元分析法研究不规则物体的优越性,它可将复杂的物体进行细化处理,使求解更加精确^[10].

3 结论

本文以梁振动模型为理论基础,运用有限元分析法,将不规则的棒球棒模型划分成 752 个可受力分析

— 38 —

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

的规则三角形, 结合振动方程与边界条件, 求出了前 3 种振动模式下节点的位置, 将振动能量损失最小的击球区域定位于基波节点与二次谐波节点之间. 通过计算得到了标准棒球棒 (81.3 cm) 的最佳击球区域为: 62.4~70.8 cm. 运动员在这个区域内击球, 击球过程中损失的振动能量最小, 手腕处的刺痛感最小, 能够击打出最远的距离, 该研究结论为棒球运动员选择最佳击球区域提供了可靠的理论依据.

[参考文献] (References)

[1] 申兵辉, 祁铮. 棒球中的物理学 [J]. 现代物理知识, 1995 9(6): 1-8
Shen Binghui, Qi Zhen. Physics in baseball [J]. Modern Physics, 1995 9(6): 1-8 (in Chinese)

[2] 闵行, 诸文俊. 材料力学 [M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2009 113-131.
Ming Hang, Zhu Wenjun. Mechanics of Materials [M]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 2009 113-131. (in Chinese)

[3] Alan M Nathana. Dynamics of the baseball-bat collision [J]. Am J Phys, 2000 68(11): 3-10

[4] Rod Cross. The sweet spot of a baseball bat [J]. Am J Phys, 2006 66(9): 56-62

[5] 赵阳, UDPA Lalita, UDPA Satish. 电磁场有限元分析的快速数值方法研究 [J]. 南京师范大学学报: 工程技术版, 2006 6(4): 1-4
Zhao Yang, UDPA Lalita, UDPA Satish. finite element analysis of fast numerical methods [J]. Journal of Nanjing Normal University: Engineering and Technology Edition, 2006 6(4): 1-4

[6] 王琼. 有限元计算前后处理控件的设计与开发 [J]. 南京师范大学学报: 工程技术版, 2003 3(2): 71-74
Wang Qiong. Finite element postprocessing before the design and development control [J]. Journal of Nanjing Normal University: Engineering and Technology Edition, 2003 3(2): 71-74 (in Chinese)

[7] Kattan P I. MATLAB 有限元分析与应用 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2004 150-175.
Kattan P I. Finite Element Analysis and Applications [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004 150-175. (in Chinese)

[8] Howard Brody. Models of baseball bats [J]. Am J Phys, 2007 58(8): 45-52

[9] Martin P A. Waves in wood [J]. Wave Motion, 2004 40(19): 387-398

[10] Rod Cross. Center of percussion of hand-held implements [J]. Am J Phys May, 2004 72(5): 622-630

[责任编辑: 刘 健]