

# 伽略金近似方法与数值方法的比较分析

张钧波<sup>1</sup>, 黄庆宏<sup>2</sup>, 张 敏<sup>3</sup>

(1 南京师范大学 泰州学院, 江苏 泰州, 225300; 2 南京师范大学 能源与机械工程学院, 江苏 南京, 210042  
3 南京理工大学 动力工程学院, 江苏 南京, 210094)

[摘要] 针对复杂的非线性热传导问题求解的困难, 在系统地介绍伽略金近似方法基本概念的基础上, 采用伽略金近似方法对直角坐标系的非稳态热传导算例进行计算, 同时与数值解和精确解进行比较分析. 结果表明伽略金近似方法可用于求解各类复杂的非线性热传导问题.

[关键词] 伽略金近似方法, 数值方法, 精确解

[中图分类号] TK 124 [文献标识码] A [文章编号] 1672-1292(2010)03-0052-04

## Comparative Analysis between Galerkin Approximating Method and Numerical Computation

Zhang Junbo<sup>1</sup>, Huang Qinghong<sup>2</sup>, Zhang Min<sup>3</sup>

(1. Taizhou College, Nanjing Normal University, Taizhou 250053, China  
2. School of Energy and Mechanical Engineering, Nanjing Normal University, Nanjing 210042, China  
3. School of Power Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

**Abstract** On the basis of introducing the basic conception of Galerkin method, and with an example of Cartesian coordinate, the unsteady state heat conduction problem were solved and calculated using the finite volume method in structured grid. The results are in agreement when the approximate solution is compared with the numerical and the exact solutions. These prove that Galerkin approximating method is applicable to solve nonlinear heat conduction problem.

**Key words** Galerkin approximating method, numerical simulating method, exact solution

在求解偏微分方程的众多方法中, 伽略金近似方法是行之有效的方法之一, 它不需要写出该问题的变分表达式, 因而, 成为一种更为一般, 更为直接求解边值问题的方法<sup>[1-5]</sup>. 伽略金法对椭圆、双曲线和抛物线型方程, 无论是线性的, 还是非线性的问题都是适用的. 若边值问题存在变分形式, 可以证明, 里兹法与伽略金法是等价的, 并可得到相同的结果. 也就是说, 人们可以把伽略金法直接用于边值问题, 而不必去寻找与给定边值问题等价的变分表达式. 在伽略金近似方法中, 权函数的构造和选取是一个十分关键的问题. 在此, 我们给出一个热传导算例, 针对权函数的选取, 给出近似解, 并将其同数值解与精确解进行比较分析, 为今后采用伽略金近似方法求解该类问题提供有价值的参考和帮助<sup>[1]</sup>.

### 1 基本概念和方程

对于一个非稳态热传导问题, 我们可以用下式来描述<sup>[1]</sup>:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^2 T(r, t) + A(r)T(r, t) + \frac{1}{k}g(r, t) \quad R \text{ 内}, t > 0$$
$$\frac{\partial T}{\partial n} + HT(r, t) = f(r, t) \quad s \text{ 处}, t > 0$$

(1)

其中,  $T = F(r)$ ,  $t = 0$   $R$  内. 或者有:

$$L[T(r, t)] = \nabla^2 T(r, t) + A(r)T(r, t) + \frac{1}{k}g(r, t) - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} = 0 \quad R \text{ 内}$$

$$B[T(r_s, t)] = \frac{\partial T}{\partial n_i} + H_i T = f_i(r_s), \quad \text{边界 } s_i \text{ 处} \quad (2)$$

式中,  $T$  为温度;  $L$  是线性微分算子;  $B$  是线性边值条件算子.

选取近似试探解  $\bar{T}(r, t)$  为:

$$\bar{T}(r, t) = \phi_0(r) + \sum_{j=1}^n c_j \phi_j(r) f(t), \quad R \text{ 内} \quad (3)$$

式中, 试探函数  $\phi_0(r)$  为满足边界条件公式 (2) 的非齐次部分, 而试探函数  $\phi_j(r)$  满足齐次部分, 即  $B[\phi_0] = f(r_s)$ ;  $B[\phi_j] = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$

显然公式 (3) 中试探解满足问题全部边界条件, 但它并不一定满足微分方程式 (1). 若将试探解代入微分方程式 (1) 就会有余量, 因为只有近似试探解是精确解时, 余量才为零. 对于选定的试探函数有几个可调参数组成, 通过对参数  $c_j$  的调整, 可使余量尽可能的小, 则由此得到的解, 对精确解而言可认为是一种很好的近似. 为了确定未知系数  $c_j$ , 伽略金法要求, 在问题所讨论的区域内, 余量的加权平均为零, 即:

$$\int_R [\bar{T}_n(r, t)] w_i(r) dV = \int_R \left[ \phi_0(r) + \sum_{j=1}^n c_j \phi_j(r) f(t) \right] \phi_i(r) dV = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

式中,  $\phi_i(r)$  为权函数. 通过上面关系式会得到一组用于确定  $n$  个系数  $c_1, c_2, \dots, c_n$  的代数方程. 由公式 (4) 所示的表达式可作如下解释: 它等价于表达式  $L[\bar{T}_n]$  与试探函数系  $\phi_j(r)$  的全部函数正交. 权函数 ( $\phi_i(r) \quad i = 1, 2, \dots$ ) 可认为在区域  $R$  内是完备的. 这样, 如若把属于这个完备系的全部权函数  $\phi_i$  都包括进去, 则公式 (4) 成立的必要条件对应着问题的精确解. 然而在伽略金法中, 公式 (4) 考虑的只是这个函数系中的有限个数, 因此, 最终的解将是近似的. 请注意, 试探函数系  $\phi_j(r)$  和权函数  $\phi_i(r)$  是相同正交函数系. 下面通过一个非稳态算例予以说明.

## 2 一维非稳态热传导算例分析

一块平板,  $0 \leq x \leq 1$  初始温度为  $T(x, t) = T_0(1 - x^2)$ ; 在时间  $t > 0$  时,  $x = 0$  处的边界维持绝热,  $x = 1$  处的边界温度维持零度. 现用伽略金法求平板内温度分布  $\bar{T}(x, t)$  的近似解, 并与精确解  $T(x, t)$  作比较. 该问题的数学描述为:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad 0 < x < 1 \quad t > 0 \quad (5)$$

其中,  $\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad x = 0 \quad t > 0; \quad T = 0 \quad x = 1 \quad t > 0; \quad T = T_0(1 - x^2), \quad t = 0 \quad 0 \leq x \leq 1$

将伽略金法用于公式 (5), 对  $x$  求积分得到:

$$\int_0^1 \left[ \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} \right] \phi_i(x) dx = 0 \quad (6)$$

选单项式试探解为:

$$\bar{T}_1(x, t) = T_0 f(t) \phi_1(x) = T_0 f(t) (1 - x^2). \quad (7)$$

公式 (6) 和公式 (7) 中, 试探函数为  $\phi_1(x) = 1 - x^2$ .

函数  $f(t)$  仍是待定的. 显然, 上面所选的试探解满足问题的初始条件及两个边界条件. 积分公式 (6) 有:

$$\int_0^1 [-2T_0 f - (1 - x^2)T_0 f' / \alpha] \cdot (1 - x^2) \cdot dx = 0$$

$$- 2T_0 \int_0^1 (x - x^3/3) f + (x - 2x^3/3 + x^5/5) f' / (2\alpha) dx = 0$$

稍作运算之后可得  $f(t)$  的微分方程为  $\frac{df(t)}{dt} + \frac{5\alpha}{2} f(t) = 0 \quad t > 0 \quad f(t) = 1, \quad t = 0$

$f(t)$  的解为  $f(t) = e^{-(5\alpha/2)t}$ , 且单项式近似解  $\bar{T}(x, t)$  为  $\bar{T}(x, t) / T_0 = (1 - x^2) e^{-(5\alpha/2)t}$ .

此问题的精确解可求得  $T(x, t) / T_0 = 4 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\beta_n^3} e^{-\alpha \beta_n^2 t} \cos \beta_n x$ , 式中  $\beta_n = \frac{(2n+1)\pi}{2}$ .

表 1 对近似解与精确解作了比较. 由表 1 可见, 即便是单项式近似解, 它与精确解也相当一致. 要得到更为完善的近似解, 可选更高阶的试探解, 其形式可为:

$$\tilde{T}_n(x, t) = T_0 \sum_{i=1}^n f_i(t) \phi_i(x).$$

其中: 函数  $\phi_i(t)$  满足问题的边界条件, 函数  $f_i(t)$  ( $f_i(0) = 1$ ) 可从常微分方程中求得, 而该常微分方程是由对变量  $x$  作偏积分的伽略金法中得到.

本文采用的有限体积法作为数值计算方法, 并在参考文献 [2] 中做了具体的介绍. 在数值计算过程中, 所有物性参数单位为国际标准单位, 其中  $T_w = 0, T_0 = 100, k = 0.5, C_p = 1, \rho = 1^{[3-7]}$ .

图 1 为 3 个不同位置温度变化的曲线, 图 2 为 3 个不同时刻温度随时间变化的曲线 (ES 代表精确解, JS 代表近似解, NS 代表数值解). 图 3 为  $t = 0.18\text{ s}$  的精确解与数值解的比较结果, 图中背景云图为数值解, 虚线为精确解. 图 4 为  $t = 0.18\text{ s}$  的近似解与数值解的比较结果, 图中背景云图为数值解, 虚线为近似解. 图 5 为  $t = 0.18\text{ s}$  的近似解与精确解的比较结果, 图中背景云图为精确解, 虚线为近似解. 从图中可以看出数值解、精确解吻合的比较好, 近似解与数值解和精确解相比, 存在一定的误差, 出现这一问题主要是因为权函数的构造, 如果采用其他的权函数构造, 可能会得到更理想的近似解.

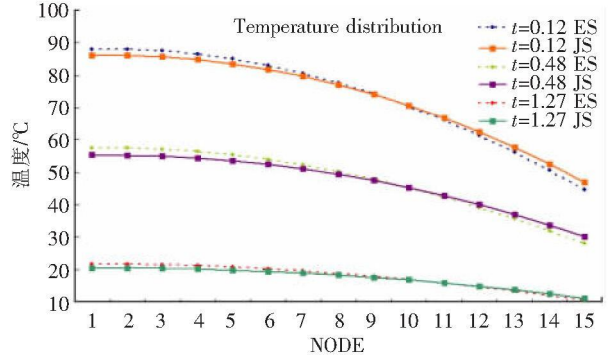


图 1 不同位置的温度场分布图

Fig.1 Temperature distribution of different location

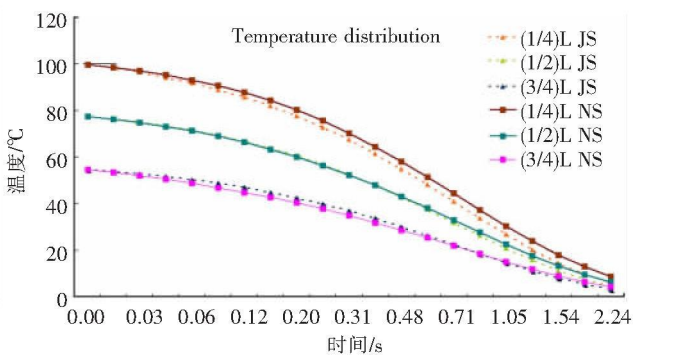


图 2 不同时刻的温度场分布图

Fig.2 Temperature distribution of different time

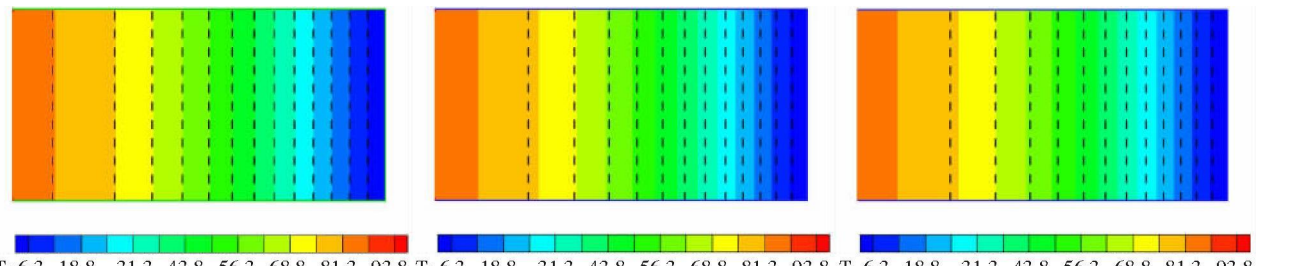


图 3  $t=0.18\text{ s}$  的数值解和精确解温度场分布 图 4  $t=0.18\text{ s}$  的数值解和近似解温度场分布 图 5  $t=0.18\text{ s}$  的精确解和近似解温度场分布

Fig.3 Temperature field profile of numerical solution and exact solution for  $t=0.18\text{ s}$

Fig.4 Temperature field profile of numerical solution and approximation solution for  $t=0.18\text{ s}$

Fig.5 Temperature field profile of exact solution and approximation solution for  $t=0.18\text{ s}$

3 结论

本文介绍了热传导问题的伽略金近似方法. 近似解准确与否是通过将其结果与精确解和数值解的结果作比较分析来评定的. 而要想得到较为准确的近似解, 在选取试探函数的时候可以选取高阶的权函数. 因此, 通过对近似解和精确解及数值解的比较分析, 可以得到: 伽略金近似方法可以用于求解各类复杂的非线性问题.

[参考文献] (References)

- [1] M N 奥齐西克. 热传导 [M]. 俞昌铭, 译. 北京: 高等教育出版社, 1984.  
O zisk M N. Conduction of Heat [M]. Yu Changming Translated. Beijing: Higher Education Press, 1984. (in Chinese)
- [2] 张钧波, 高超声速弹箭头部气动热数值计算 [D]. 南京: 南京理工大学动力工程学院, 2009. 16-23.  
Zhang Junbo. Numerical calculation aerodynamic heating over projectiles' head at hypersonic flow [D]. Nanjing: Nanjing University of Science and Technology, 2009. (in Chinese)
- [3] Patankar S V. Numerical Heat Transfer and Fluid Flow [M]. New York: Hemisphere Publishing, 1981: 20-23.
- [4] 陶文铨. 数值传热学 [M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1988.  
Tao Wenquan. Numerical Heat Transfer [M]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 1988. (in Chinese)
- [5] 徐士良. RORTRAN 常用算法程序集 [M]. 北京: 清华大学出版社, 1997.  
Xu Shiliang. The RORTRAN Algorithm Procedure in Common Use Assembles [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1997. (in Chinese)
- [6] Zhang M. Modeling of radiative heat transfer and diffusion processes using unstructured grid [D]. Tennessee: Tennessee Technological University, 2000.
- [7] 黄庆宏, 张敏, 张钧波. 里兹近似方法与数值方法的比较分析 [J]. 南京师范大学学报: 工程技术版, 2008, 8(3): 21-24.  
Huang Qinghong, Zhang Min, Zhang Junbo. Analysis and comparison of Ritz approximating method and numerical computation [J]. Journal of Nanjing Normal University. Engineering and Technology Edition, 2008, 8(3): 21-24. (in Chinese)

[责任编辑: 刘 健]