

模糊时滞系统的 $H_\infty / L_2 - L_\infty$ 控制

于卫红, 陆俊玮, 冯春梅

(南京师范大学 电气与自动化工程学院, 江苏 南京 210042)

[摘要] 基于连续的 Takagi-Sugeno (T-S) 模糊模型, 对一类时滞模糊系统进行 $H_\infty / L_2 - L_\infty$ 控制问题的研究. 以线性矩阵不等式 (LMI) 的形式给出了带有时滞的模糊系统 $H_\infty / L_2 - L_\infty$ 控制器存在的充分条件, 以及控制器增益的设计方法.

[关键词] (T-S) 模糊模型, $H_\infty / L_2 - L_\infty$ 控制, 时滞, 线性矩阵不等式

[中图分类号] TP273.4 [文献标识码] A [文章编号] 1672-1292(2010)04-0017-09

$H_\infty / L_2 - L_\infty$ Control for Fuzzy Delayed Systems

Yu Weihong, Lu Junwei, Feng Chunmei

(School of Electrical and Automation Engineering, Nanjing Normal University, Nanjing 210042, China)

Abstract This paper investigates the problem of $H_\infty / L_2 - L_\infty$ control for a class of fuzzy delayed systems via Takagi-Sugeno (T-S) fuzzy model approach. In terms of linear matrix inequalities (LMIs), some sufficient conditions are given for the existence of the $H_\infty / L_2 - L_\infty$ controllers, and the desired controllers are constructed.

Key words (T-S) fuzzy model approach, $H_\infty / L_2 - L_\infty$ control, delays, linear matrix inequality

Takagi-Sugeno (T-S) 模糊系统是一种基于模型的模糊系统, 首先是由 Takagi 和 Sugeno 提出来的^[1], 后来被 Sugeno 和 Kang^[2]进一步研究, 因此又被称为 T-S-K 模糊系统. 最近几十年受到国内外许多专家学者的高度重视, 并取得了丰硕的成果. 例如, 针对连续时间的模糊系统, 文献 [3, 4] 提供了 H_∞ 输出反馈模糊控制器的设计方法; 而文献 [5] 采用模糊 Lyapunov 函数方法研究了离散时间模糊系统的 H_∞ 控制问题, 以 LMI 的形式得到了状态反馈 H_∞ 模糊控制器的存在条件, 并给出了有效的设计方法.

另一方面, 自从 1989 年 Wilson 提出了 $L_2 - L_\infty$ 性能准则后^[6], $L_2 - L_\infty$ 控制问题引起了广泛关注, 并取得了一定的研究成果^[7, 8]. $L_2 - L_\infty$ 控制的本质在于对控制变量的幅值变化进行了较为有效的抑制, 从而使得对干扰输入, 多输出系统的时域响应获得可能得到的最小绝对值, 实现了系统鲁棒稳定. 此种性能指标具有重要的工程实际应用价值. 针对连续时间的 T-S 模糊系统, 文献 [7] 提供了一种 $L_2 - L_\infty$ 滤波器的设计方法, 给出一个较小保守性的结果. 然而, 目前针对连续时间的 T-S 模糊时滞系统的 $L_2 - L_\infty$ 控制问题还没得到充分的研究. 此外, 在实际应用过程中, 往往要求设计的控制器既要使闭环系统稳定, 也要同时具有给定的混合 (H_∞ 和 $L_2 - L_\infty$) 干扰抑制制度.

针对一类 T-S 时滞模糊系统^[9, 10], 本文研究其 $H_\infty / L_2 - L_\infty$ 控制问题. 基于 Lyapunov 稳定性理论和线性矩阵不等式方法, 导出 $H_\infty / L_2 - L_\infty$ 状态反馈模糊控制器的存在条件. 该条件以一组线性矩阵不等式的形式给出, 可以直接用 Matlab 软件中的 LMI 控制工具箱求解. 所要设计的 $H_\infty / L_2 - L_\infty$ 状态反馈模糊控制器可以通过求解一组 LMI 构造得到, 得到的控制器可以保证闭环系统是渐近稳定的且同时满足给定的 H_∞ 与 $L_2 - L_\infty$ 性能指标.

1 问题描述

考虑一类 T-S 模糊时滞系统, 第 i 条模糊规则如下.

收稿日期: 2010-05-04

通讯联系人: 于卫红, 讲师, 研究方向: 电气工程及其自动化. E-mail: 63032@njnu.edu.cn

模糊规则 i

If $\mathbf{x}_1(t)$ is Γ_1^i and... and $\mathbf{x}_n(t)$ is Γ_n^i

Then

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_{di} \mathbf{x}(t - \tau) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t) + \mathbf{D}_i \omega(t), \quad (1)$$

$$\mathbf{z}_1(t) = \mathbf{C}_{1i} \mathbf{x}(t), \quad (2)$$

$$\mathbf{z}_2(t) = \mathbf{C}_{2i} \mathbf{x}(t), \quad (3)$$

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t), \quad t \in [-\tau, 0], i = 1, 2, \dots, r. \quad (4)$$

其中, Γ_j^i 是一个模糊集, $\mathbf{x}(t) \in R^n$ 是系统的状态向量, $\mathbf{u}(t) \in R^m$ 是系统的控制输入向量, $\omega(t) \in R^p$ 是外部扰动, 且 $\omega(t) \in L_2[0, \infty)$, $\mathbf{z}_1(t) \in R^q$ 和 $\mathbf{z}_2(t) \in R^l$ 是被控输出向量, $\mathbf{A}_i, \mathbf{A}_{di}, \mathbf{B}_i, \mathbf{D}_i, \mathbf{C}_{1i}$ 和 \mathbf{C}_{2i} 是具有适当维数的已知常数矩阵, r 是这个模糊模型的模糊规则数, $\tau > 0$ 表示定常时滞, $\Phi(t)$ 是定义在 $[-\tau, 0]$ 上的实值连续向量初始函数.

去模糊化后, 系统 (1) ~ (3) 的全局模糊模型为:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(h) \mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_d(h) \mathbf{x}(t - \tau) + \mathbf{B}(h) \mathbf{u}(t) + \mathbf{D}(h) \omega(t), \quad (5)$$

$$\mathbf{z}_1(t) = \mathbf{C}_1(h) \mathbf{x}(t), \quad (6)$$

$$\mathbf{z}_2(t) = \mathbf{C}_2(h) \mathbf{x}(t). \quad (7)$$

其中, $\mathbf{A}(h) = \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{x}(t)) \mathbf{A}_i, \mathbf{A}_d(h) = \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{x}(t)) \mathbf{A}_{di}, \mathbf{B}(h) = \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{x}(t)) \mathbf{B}_i,$

$$\mathbf{D}(h) = \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{x}(t)) \mathbf{D}_i, \mathbf{C}_1(h) = \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{x}(t)) \mathbf{C}_{1i}, \mathbf{C}_2(h) = \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{x}(t)) \mathbf{C}_{2i}$$

这里 $\mu_i(\mathbf{x}(t)) = \prod_{j=1}^n \Gamma_j^i(\mathbf{x}_j(t)) h_i(\mathbf{x}(t)) = \frac{\mu_i(\mathbf{x}(t))}{\sum_{i=1}^r \mu_i(\mathbf{x}(t))}.$

$\Gamma_j^i(\mathbf{x}_j(t))$ 是 $\mathbf{x}_j(t)$ 在集合 Γ_j^i 中的隶属度函数, $\mu_i(t)$ 的一些基本属性如下:

$$\mu_i(\mathbf{x}(t)) \geq 0, \quad \sum_{i=1}^r \mu_i(\mathbf{x}(t)) > 0, \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

所以, 可以得到 $h_i(\mathbf{x}(t)) \geq 0, \quad \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{x}(t)) = 1, \quad i = 1, 2, \dots, r.$

现在, 考虑如下状态反馈模糊控制器律:

控制器规则: If $\mathbf{x}_1(t)$ is Γ_1^i and... and $\mathbf{x}_n(t)$ is Γ_n^i

Then $\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}_i \mathbf{x}(t), \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (8)$

其中, \mathbf{K}_i 是待求的控制器增益矩阵. 状态反馈控制器 (8) 的全局模型为:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}(h) \mathbf{x}(t), \quad (9)$$

其中, $\mathbf{K}(h) = \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{x}(t)) \mathbf{K}_i.$

将 (9) 代入系统 (5) ~ (7) 得闭环系统:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_c(h) \mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_d(h) \mathbf{x}(t - \tau) + \mathbf{D}(h) \omega(t), \quad (10)$$

$$\mathbf{z}_1(t) = \mathbf{C}_1(h) \mathbf{x}(t), \quad (11)$$

$$\mathbf{z}_2(t) = \mathbf{C}_2(h) \mathbf{x}(t), \quad (12)$$

其中, $\mathbf{A}_c(h) = \mathbf{A}(h) + \mathbf{B}(h) \mathbf{K}(h).$

本文的主要任务是: 设计状态反馈模糊控制器 (9) 使得闭环系统 (10) ~ (12) 满足:

(I) 当 $\omega(t) = 0$ 时, (10) 是渐近稳定的;

(II) 在零初始条件下以及对所有非零的 $\omega(t) \in L_2[0, \infty)$, 闭环系统 (10) 和 (11) 满足如下的 H_∞ 性能指标:

$$\|\mathbf{z}_1(t)\|_2 \leq \gamma \|\omega(t)\|_2, \quad (13)$$

其中, $\gamma > 0$ 是给定的干扰抑制常数;

(III) 在零初始条件下以及对所有非零的 $\omega(t) \in L_2[0, \infty)$, 闭环系统 (10) 和 (12) 满足如下的 L_2 -

L_∞ 性能指标:

$$\|z_1(t)\|_\infty \leq \delta \|\omega(t)\|_2, \quad (14)$$

其中, $\delta > 0$ 是给定的干扰抑制常数.

2 稳定性与性能分析

在本部分, 我们将利用 Lyapunov 函数方法和矩阵变换技巧, 给出保证闭环系统 (10) ~ (12) 渐近稳定且具有 H_∞ 性能界 γ 和 L_2-L_∞ 性能界 δ 的一个充分条件.

定理 1 考虑系统 (10) ~ (12). 给定常数 $\gamma > 0$ 和 $\delta > 0$ 如果存在矩阵 $P > 0$ 和 $Q > 0$ 有下面的矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} P & C_2(h) \\ C_2(h) & \delta^2 I \end{bmatrix} > 0, \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} PA_c(h) + A_c(h)^T P + Q & PA_d(h) & PD(h) & C_1(h)^T \\ * & -Q & 0 & 0 \\ * & * & -I & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0. \quad (16)$$

则系统 (10) ~ (12) 是渐近稳定的, 并且式 (13) 和 (14) 成立.

证明 构造 Lyapunov 泛函

$$V(x_t) = x(t)^T P x(t) + \int_{t-\tau}^t x(s)^T Q x(s) ds, \quad (17)$$

则 $V(x(t))$ 沿 (10) 的全微分为:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) = & x(t)^T [PA_c(h) + A_c(h)^T P + Q] x(t) + 2x(t)^T PA_d(h)x(t-\tau) + \\ & 2x(t)^T PD(h)\omega(t) - x(t-\tau)^T Q x(t-\tau). \end{aligned} \quad (18)$$

下面我们分 3 部分来完成此定理的证明.

(1) 稳定性. 此时, 设 $\omega(t) = 0$ 则由 (18) 得:

$$\dot{V}(x_t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} PA_c(h) + A_c(h)^T P + Q & PA_d(h) \\ * & -Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau) \end{bmatrix}. \quad (19)$$

由 (16) 式很容易得到:

$$\begin{bmatrix} PA_c(h) + A_c(h)^T P + Q & PA_d(h) \\ * & -Q \end{bmatrix} < 0$$

从而由 (19) 得: $\dot{V}(x_t) < 0$

这说明, 当 $\omega(t) = 0$ 时, 系统 (10) 是渐近稳定的.

(2) H_∞ 性能. 对所有非零的 $\omega(t) \in L_2[0, \infty)$ 以及在零初始条件下, 我们来证式 (13) 成立. 构造指标函数:

$$J_1 = \int_0^T [\gamma^{-2} z_1(t)^T z_1(t) - \omega(t)^T \omega(t)] dt \quad (20)$$

式中, $T > 0$ 是任意的正标量. 注意到在零初始条件下 $V(x(0)) = 0$ 所以,

$$\begin{aligned} J_1 = & \int_0^T [\dot{V}(x(t)) + \gamma^{-2} z_1(t)^T z_1(t) - \omega(t)^T \omega(t)] dt - V(x(T)) \leq \\ & \int_0^T [\dot{V}(x(t)) + \gamma^{-2} z_1(t)^T z_1(t) - \omega(t)^T \omega(t)] dt. \end{aligned} \quad (21)$$

由 (11) 和 (18) 得:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) + \gamma^{-2} z_1(t)^T z_1(t) - \omega(t)^T \omega(t) = \\ \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau) \\ \omega(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Phi(h) & PA_d(h) & PD(h) \\ * & -Q & 0 \\ * & * & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau) \\ \omega(t) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

其中, $\Phi(h) = PA_c(h) + A_c(h)^T P + Q + \gamma^{-2} C_1(h)^T C_1(h)$.

对 (16) 应用 Schur 补引理可得:

$$\begin{bmatrix} \Phi(h) & PA_d(h) & PD(h) \\ * & -Q & 0 \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0$$

从而有 $V(x_t) + \gamma^{-2} z_1(t)^T z_1(t) - \omega(t)^T \omega(t) < 0$

再根据 (21) 可得: $J_1 = \int_0^\infty [\gamma^{-2} z_1(t)^T z_1(t) - \omega(t)^T \omega(t)] dt \leq 0$

$$\int_0^\infty z_1(t)^T z_1(t) dt \leq \gamma^2 \int_0^\infty \omega(t)^T \omega(t) dt$$

此式等价于:

$$\|z_1(t)\|_2 \leq \gamma \|\omega(t)\|_2$$

即 (13) 式成立.

(3) $L_2 - L_\infty$ 性能 对所有非零的 $\omega(t) \in L_2[0, \infty)$ 以及在零初始条件下, 我们来证式 (14) 成立. 构造指标函:

$$J_2 = V(x_t) - \int_0^t \omega(s)^T \omega(s) ds. \quad (22)$$

注意到在零初始条件下 $V(x(0)) = 0$ 所以,

$$J_2 = \int_0^t [V(x_s) - \omega(s)^T \omega(s)] ds. \quad (23)$$

由 (12) 和 (18) 得:

$$V(x_s) - \omega(s)^T \omega(s) = \begin{bmatrix} x(s) \\ x(s - \tau) \\ \omega(s) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} PA_c(h) + A_c(h)^T P + Q & PA_d(h) & PD(h) \\ * & -Q & 0 \\ * & * & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(s) \\ x(s - \tau) \\ \omega(s) \end{bmatrix}.$$

由 (16) 很容易得到:

$$\begin{bmatrix} PA_c(h) + A_c(h)^T P + Q & PA_d(h) & PD(h) \\ * & -Q & 0 \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0$$

从而 $V(x_s) - \omega(s)^T \omega(s) < 0$ 故由 (22) 和 (23) 得 $J_2 = V(x_t) - \int_0^t \omega(s)^T \omega(s) ds \leq 0$

即:

$$V(x_t) \leq \int_0^t \omega(s)^T \omega(s) ds \quad (24)$$

又由 (17) 得 $x(t)^T P x(t) \leq V(x_t)$,

所以

$$x(t)^T P x(t) \leq \int_0^t \omega(s)^T \omega(s) ds. \quad (25)$$

对 (15) 应用 Schur 补引理, 得: $P - \delta^{-2} C_2(h)^T C_2(h) > 0$ 此式可改写为:

$$C_2(h)^T C_2(h) < \delta^2 P. \quad (26)$$

由 (12), (25) 和 (26) 得:

$$\begin{aligned} z_2(t)^T z_2(t) &= x(t)^T C_2(h)^T C_2(h) x(t) \leq \delta^2 x(t)^T P x(t) \leq \\ &\delta^2 \int_0^t \omega(s)^T \omega(s) ds \leq \delta^2 \int_0^t \omega(t)^T \omega(t) dt \end{aligned}$$

从而可以得 $\|z_2(t)\|_\infty \leq \delta \|\omega(t)\|_2$ 即是 (14) 式. 综上, 定理得证. (证毕)

在定理 1 中, 直接对闭环系统 (10) ~ (12) 的渐近稳定性、 H_∞ 性能以及 $L_2 - L_\infty$ 性能进行了分析研究, 得到了一组矩阵不等式. 不难看出, 当 $u(t) = 0$ 时, 系统 (5) ~ (7) 就变成了下面的无控制输入的系统:

$$\dot{x}(t) = A(h)x(t) + A_d(h)x(t - \tau) + D(h)\omega(t), \quad (27)$$

$$\mathbf{z}_1(t) = \mathbf{C}_1(h)\mathbf{x}(t), \quad (28)$$

$$\mathbf{z}_2(t) = \mathbf{C}_2(h)\mathbf{x}(t). \quad (29)$$

其中, $\mathbf{A}(h) = \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{x}(t))\mathbf{A}_i$, $\mathbf{A}_d(h) = \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{x}(t))\mathbf{A}_{di}$,

$$\mathbf{D}(h) = \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{x}(t))\mathbf{D}_i, \mathbf{C}_1(h) = \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{x}(t))\mathbf{C}_{1i}, \mathbf{C}_2(h) = \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{x}(t))\mathbf{C}_{2i}$$

对系统 (27) ~ (29), 我们有下面的定理.

定理 2 考虑系统 (27) ~ (29). 给定常数 $\gamma > 0$ 和 $\delta > 0$. 如果存在矩阵 $\mathbf{P} > 0$ 和 $\mathbf{Q} > 0$ 对所有的 $i = 1, 2, \dots, r$ 有下面的线性矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{C}_{2i}^T \\ \mathbf{C}_{2i} & \delta^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0, \quad (30)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}\mathbf{A}_i + \mathbf{A}_i^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} & \mathbf{P}\mathbf{A}_{di} & \mathbf{P}\mathbf{D}_i & \mathbf{C}_{1i}^T \\ * & -\mathbf{Q} & 0 & 0 \\ * & * & -\mathbf{I} & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0. \quad (31)$$

则系统 (27) ~ (29) 是渐近稳定的, 并且式 (13) 和 (14) 成立.

证明 注意到:

$$h_i(\mathbf{x}(t)) \geq 0, \quad \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{x}(t)) = 1, \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

于是有:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{C}_2(h)^T \\ \mathbf{C}_2(h) & \delta^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} & (\sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{x}(t))\mathbf{C}_{2i})^T \\ (\sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{x}(t))\mathbf{C}_{2i}) & \delta^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{x}(t)) \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{C}_{2i}^T \\ \mathbf{C}_{2i} & \delta^2 \mathbf{I} \end{bmatrix}.$$

以及:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}\mathbf{A}(h) + \mathbf{A}(h)^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} & \mathbf{P}\mathbf{A}_d(h) & \mathbf{P}\mathbf{D}(h) & \mathbf{C}_1(h)^T \\ * & -\mathbf{Q} & 0 & 0 \\ * & * & -\mathbf{I} & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}(\sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{x}(t))\mathbf{A}_i) + (\sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{x}(t))\mathbf{A}_i)^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} & \mathbf{P}(\sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{x}(t))\mathbf{A}_{di}) & \mathbf{P}(\sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{x}(t))\mathbf{D}_i) & (\sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{x}(t))\mathbf{C}_{1i})^T \\ * & -\mathbf{Q} & 0 & 0 \\ * & * & -\mathbf{I} & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} =$$

$$\sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{x}(t)) \begin{bmatrix} \mathbf{P}\mathbf{A}_i + \mathbf{A}_i^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} & \mathbf{P}\mathbf{A}_{di} & \mathbf{P}\mathbf{D}_i & \mathbf{C}_{1i}^T \\ * & -\mathbf{Q} & 0 & 0 \\ * & * & -\mathbf{I} & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix}.$$

由 (30) 和 (31), 很容易地可以看到:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{C}_2(h)^T \\ \mathbf{C}_2(h) & \delta^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{P}\mathbf{A}(h) + \mathbf{A}(h)^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} & \mathbf{P}\mathbf{A}_d(h) & \mathbf{P}\mathbf{D}(h) & \mathbf{C}_1(h)^T \\ * & -\mathbf{Q} & 0 & 0 \\ * & * & -\mathbf{I} & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0$$

则, 系统 (27) ~ (29) 是渐近稳定的, 并且公式 (13) 和 (14) 成立. (证毕)

在定理 2 中, 我们给出了保证模糊时滞系统渐近稳定且具有混合 $H_\infty / L_2 - L_\infty$ 性能界的一个充分条件, 该条件以一组线性矩阵不等式的形式给出, 可以很容易地用 Matlab 中的 LM I 控制工具箱来验证.

3 $H_\infty / L_2 - L_\infty$ 模糊控制器设计

我们将运用定理 1 中给出的条件来设计状态反馈模糊控制器 (9), 使得闭环系统 (10) ~ (12) 是渐近稳定的, 并且式 (13) 和 (14) 成立.

定理 3 考虑系统 (5) ~ (7), 给定常数 $\gamma > 0$ 和 $\delta > 0$ 如果存在矩阵 $X > 0$ $Y > 0$ 以及 M_i $i = 1, 2, \dots, r$, 有下面的线性矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} X & XC_{2i}^T \\ C_{2i}X & \delta^2 I \end{bmatrix} > 0 \quad 1 \leq i \leq r, \quad (32)$$

$$\begin{bmatrix} A_i X + X A_i^T + B M_i + M_i^T B_i^T + Y & A_{di} X & D_i & X C_{1i}^T \\ * & -Y & 0 & 0 \\ * & * & -I & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad 1 \leq i \leq r, \quad (33)$$

$$\begin{bmatrix} \Omega_{ij} & (A_{di} + A_{dj})X & D_i + D_j & X(C_{1i}^T + C_{1j}^T) \\ * & -2Y & 0 & 0 \\ * & * & -2I & 0 \\ * & * & * & -2\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad 1 \leq i < j \leq r, \quad (34)$$

其中, $\Omega_{ij} = A_i X + X A_i^T + A_j X + X A_j^T + B M_j + B M_i + M_j^T B_i^T + M_i^T B_j^T + 2Y$

那么, 存在形如 (9) 的状态反馈模糊控制器使得闭环系统 (10) ~ (12) 是渐近稳定的, 并且式 (13) 和 (14) 成立. 此时, 所求的控制器增益为:

$$K_i = M_i X^{-1}, \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (35)$$

证明 注意到:

$$A_c(h) = A(h) + B(h)K(h) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t)) h_j(x(t)) (A_i + B K_j)$$

以及 $K_i X = M_i$ $i = 1, 2, \dots, r$

我们有:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} A_c(h)X + X A_c(h)^T + Y & A_d(h)X & D(h) & X C_1(h)^T \\ * & -Y & 0 & 0 \\ * & * & -I & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} = \\ & \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t)) h_j(x(t)) \begin{bmatrix} A_i X + X A_i^T + B K_j X + X K_j^T B_i^T + Y & A_{di} X & D_i & X C_{1i}^T \\ * & -Y & 0 & 0 \\ * & * & -I & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} = \\ & \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t)) h_j(x(t)) \begin{bmatrix} A_i X + X A_i^T + B M_j + M_j^T B_i^T + Y & A_{di} X & D_i & X C_{1i}^T \\ * & -Y & 0 & 0 \\ * & * & -I & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} = \\ & \sum_{i=1}^r h_i^2(x(t)) \begin{bmatrix} A_i X + X A_i^T + B M_i + M_i^T B_i^T + Y & A_{di} X & D_i & X C_{1i}^T \\ * & -Y & 0 & 0 \\ * & * & -I & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + \end{aligned}$$

$$\sum_{1 \leq i < j \leq r} h_i(\mathbf{x}(t)) h_j(\mathbf{x}(t)) \begin{bmatrix} \Omega_{ij} & (\mathbf{A}_{di} + \mathbf{A}_{dj})\mathbf{X} & \mathbf{D}_i + \mathbf{D}_j & \mathbf{X}(\mathbf{C}_{1i}^T + \mathbf{C}_{1j}^T) \\ * & -2\mathbf{Y} & 0 & 0 \\ * & * & -2\mathbf{I} & 0 \\ * & * & * & -2\gamma^2\mathbf{I} \end{bmatrix}.$$

从而由 (33) 和 (34) 可得:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_c(h)\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A}_c(h)^T + \mathbf{Y} & \mathbf{A}_d(h)\mathbf{X} & \mathbf{D}(h) & \mathbf{X}\mathbf{C}_1(h)^T \\ * & -\mathbf{Y} & 0 & 0 \\ * & * & -\mathbf{I} & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0.$$

对上式同时左乘和右乘下面的矩阵:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{X}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix},$$

得

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}_c(h) + \mathbf{A}_c(h)^T\mathbf{X}^{-1} + \mathbf{X}^{-1}\mathbf{Y}\mathbf{X}^{-1} & \mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}_d(h) & \mathbf{X}^{-1}\mathbf{D}(h) & \mathbf{C}_1(h)^T \\ * & -\mathbf{X}^{-1}\mathbf{Y}\mathbf{X}^{-1} & 0 & 0 \\ * & * & -\mathbf{I} & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0. \quad (36)$$

令

$$\mathbf{P} = \mathbf{X}^{-1}, \mathbf{Q} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{Y}\mathbf{X}^{-1},$$

则 (36) 可改写为:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}\mathbf{A}_c(h) + \mathbf{A}_c(h)^T\mathbf{P} + \mathbf{Q} & \mathbf{P}\mathbf{A}_d(h) & \mathbf{P}\mathbf{D}(h) & \mathbf{C}_1(h)^T \\ * & -\mathbf{Q} & 0 & 0 \\ * & * & -\mathbf{I} & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0. \quad (37)$$

又:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{X}\mathbf{C}_2(h)^T \\ \mathbf{C}_2(h)\mathbf{X} & \delta^2\mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{X}\left(\sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{x}(t))\mathbf{C}_{2i}\right)^T \\ \left(\sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{x}(t))\mathbf{C}_{2i}\right)\mathbf{X} & \delta^2\mathbf{I} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{x}(t)) \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{X}\mathbf{C}_{2i}^T \\ \mathbf{C}_{2i}\mathbf{X} & \delta^2\mathbf{I} \end{bmatrix}.$$

由 (32) 可得:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{X}\mathbf{C}_2(h)^T \\ \mathbf{C}_2(h)\mathbf{X} & \delta^2\mathbf{I} \end{bmatrix} > 0, \quad (38)$$

对上式同时左乘和右乘矩阵 $\begin{bmatrix} \mathbf{X}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix}$,

并注意到 $\mathbf{P} = \mathbf{X}^{-1}$, 我们有:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{C}_2(h)^T \\ \mathbf{C}_2(h) & \delta^2\mathbf{I} \end{bmatrix} > 0. \quad (39)$$

由 (37) 和 (39), 再根据定理 1 可知, 当条件 (32) ~ (34) 成立时, 存在形如:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{x}(t))\mathbf{M}_i\mathbf{X}^{-1}\mathbf{x}(t),$$

的状态反馈模糊控制器使得闭环系统是渐近稳定的, 并且式 (13) 和 (14) 成立. (证毕)

注 1: 针对模糊时滞系统 (5) ~ (7), 以一组线性矩阵不等式的形式, 定理 3 给出了混合 $H_\infty / L_2 - L_\infty$ 状态反馈模糊控制器的存在条件. 所求的模糊控制器可以由线性矩阵不等式 (32) ~ (34) 的可行解构造得到.

4 数值算例

考虑如下的 T-S 模糊系统:

If $x_1(t)$ is θ_i , Then

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_i x(t) + A_{di} x(t - \tau) + B_i u(t) + D_i \omega(t) \\ z_1(t) &= C_{1i} x(t) \\ z_2(t) &= C_{2i} x(t), \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$

系统各参数为:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, A_{d1} = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.4 \\ 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.1 \end{bmatrix}, C_{11} = \begin{bmatrix} -0.4 & 0.1 \\ 0.1 & 0.4 \end{bmatrix}, \\ C_{12} &= \begin{bmatrix} -0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 \end{bmatrix}, D_1 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.3 \end{bmatrix}, \\ A_2 &= \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, A_{d2} = \begin{bmatrix} 0.3 & -0.3 \\ 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0.12 & 0.2 \\ 0.3 & 0.13 \end{bmatrix}, C_{21} = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}, \\ C_{22} &= \begin{bmatrix} -0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}, D_{22} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

则模糊系统的全局模型为:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^2 h_i(s(t)) \{A_i x(t) + A_{di} x(t - \tau) + B_i u(t) + D_i \omega(t)\}, \\ z_1(t) &= \sum_{i=1}^2 h_i(s(t)) C_{1i} x(t), \\ z_2(t) &= \sum_{i=1}^2 h_i(s(t)) C_{2i} x(t), \end{aligned}$$

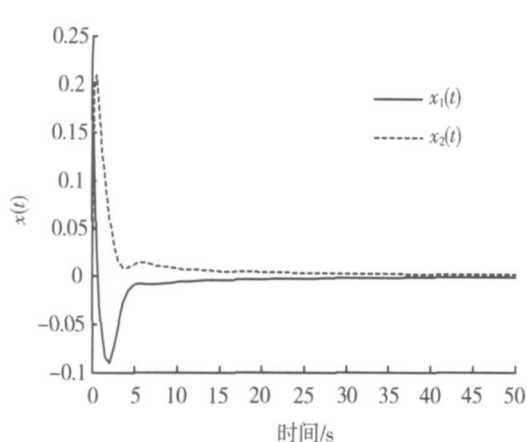
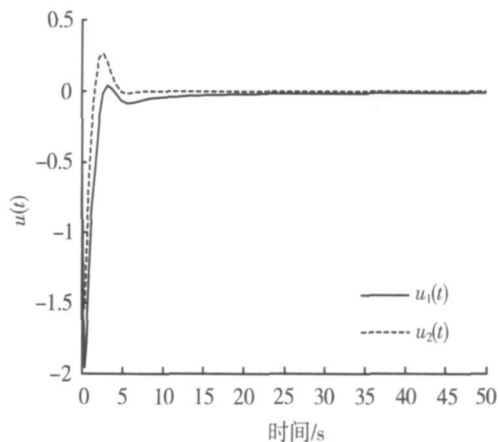
其中,

$$\begin{aligned} h_1(x_1(t)) &= \begin{cases} \frac{1}{3} & x_1 < -1 \\ \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x_1 & |x_1| \leq 1 \\ 1 & x_1 > 1 \end{cases} \\ h_2(x_1(t)) &= \begin{cases} \frac{2}{3} & x_1 < -1 \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x_1 & |x_1| \leq 1 \\ 0 & x_1 > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

本例中, 令 $\gamma = 0.8$, $\delta = 1$, $\tau = 1$. 根据定理 3 利用 Matlab LM 工具箱求解式 (32) ~ (34) 可得相应的控制器参数如下:

$$\begin{aligned} K_1 &= \begin{bmatrix} -2.9864 & -7.5240 \\ -5.8109 & -6.3793 \end{bmatrix}, \\ K_2 &= \begin{bmatrix} -3.8108 & -9.2506 \\ -5.1196 & -1.0601 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

利用所设计的反馈控制器控制系统 (1) ~ (4), 系统状态响应的仿真结果在图 1 中给出, 图 2 中给出控制输入. 从图中可以看出, 本文所设计的模糊输出反馈控制器既能保证系统是渐近稳定的且同时满足给定的混合干扰抑制制度.

图1 状态响应 $x(t)$ Fig.1 State response of $x(t)$ 图2 控制输入 $u(t)$ Fig.2 Control input $u(t)$

5 结语

本文研究了一类 T-S 模糊时滞系统的 H_∞/L_2-L_∞ 控制问题. 利用 Lyapunov 稳定性理论和矩阵变换技术, 首先得到了保证闭环系统渐近稳定且同时满足 H_∞ 和 L_2-L_∞ 性能条件的充分条件, 在此基础上, 又以一组线性矩阵不等式的形式得到了 H_∞/L_2-L_∞ 状态反馈模糊控制器的存在条件, 同时给出了所求控制器的设计方法. 本文给出的设计结果是严格的线性矩阵不等式, 可以直接用 Matlab 软件中的 LM I 控制箱求解.

[参考文献] (References)

- [1] Takagi T, Sugeno M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control [J]. IEEE Trans on Systems Man, and Cybernetics, 1985, 15(1): 116-132
- [2] Sugeno M, Kang G T. Structure identification of fuzzy model [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1988, 28: 15-33
- [3] Nguang S K, Shi P. H_∞ fuzzy output feedback control design for nonlinear systems: an LM I approach [J]. IEEE Trans Fuzzy Systems, 2003, 6: 331-340
- [4] Liu X, Zhang Q. New approaches to H_∞ controller designs based on fuzzy observers for T-S fuzzy systems via LM I [J]. Automatica, 2003, 39(9): 1571-1582
- [5] Zhou S, Feng G, Lam J et al. Robust H_∞ control for discrete-time fuzzy systems via basis-dependent Lyapunov functions [J]. Information Sciences, 2005, 174(3/4): 197-217.
- [6] Wilson D A. Convolution and hankel operator norms for linear systems [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1989, 34(1): 94-97.
- [7] Li Z, Xu Shengyuan. Fuzzy weighting-dependent approach to robust L_2-L_∞ filter design for delayed fuzzy systems [J]. Signal Processing, 2009, 89(4): 463-471
- [8] Wu L, Wang Z. Robust L_2-L_∞ control of uncertain differential linear repetitive processes [J]. Systems and Control Letters, 2008, 57(5): 425-435
- [9] Cao Y Y, Frank P M. Analysis and synthesis of nonlinear time-delay systems via fuzzy control approach [J]. IEEE Trans Fuzzy Syst, 2000, 8(2): 200-211.
- [10] Cao Y Y, Frank P M. Robust H_∞ disturbance attenuation for a class of uncertain discrete-time fuzzy systems [J]. IEEE Trans Fuzzy Syst, 2000, 8(4): 406-415.

[责任编辑: 刘健]