

# 分数阶混沌系统的追踪同步与电路实现

闵富红, 吴薛红, 曹 弋

(南京师范大学 电气与自动化工程学院, 江苏 南京 210042)

**[摘要]** 针对一个新型四维整数阶混沌系统, 设计合适的线性反馈控制器, 实现分数阶超混沌系统的所有状态向量与不同信号的追踪同步, 并以追踪三角波信号、任意不动点以及整数阶超混沌  $Q_i$  系统为例, 将分数阶混沌信号控制到期望的周期轨道或平衡点, 以及实现分数阶混沌系统与整数阶混沌系统的异结构追踪同步, 这为混沌系统在保密通信等方面的应用提供了技术基础. 另外, 基于 Multisim10 电路软件, 设计分数阶超混沌系统的电路图以及反馈控制器的电路模块, 进行电路模拟, 从而证实了理论分析和数值仿真的有效性.

**[关键词]** 分数阶系统, 混沌系统, 电路实验图, 追踪控制

**[中图分类号]** O415 **[文献标志码]** A **[文章编号]** 1672-4292(2011) 02-0013-06

## Circuit Realization and Tracking of New Fractional-Order Chaotic System

Min Fuhong, Wu Xuehong, Cao Yi

(School of Electrical and Automation Engineering, Nanjing Normal University, Nanjing 210042, China)

**Abstract:** In this paper, a new fractional-order four dimensional system is firstly investigated numerically by using frequency domain technique. Based on the stability theory of the fractional-order system, a linear feedback controller is designed to make full states of the fractional order system to track control all kinds of signals, including chaotic signals and non-chaotic signals. Here sinusoidal waves, arbitrarily fixed point and  $Q_i$  chaotic system are chosen as examples. The technique provides a foundation for the application of chaotic system in secure communications. In addition, the electronic circuits are designed to realize the tracking control for this novel fractional system using Multisim10. The results are presented to demonstrate the effectiveness of the proposed method.

**Key words:** fractional order system, chaotic system, circuit experiment, tracking control

分数阶微积分把传统整数阶微积分的阶次推广到分数甚至复数领域, 因而极大地拓展了传统微积分的概念. 分数阶模型比整数阶模型更能反映动力系统的性能, 从而促进了分数阶系统的研究以及分数阶微积分理论的发展. 近年来, 分数阶混沌系统的研究已经引起了学者们广泛的兴趣, 并用分数阶方程描述动力系统, 从而出现了一些分数阶混沌, 从三维的分数阶 Lorenz 系统、分数阶 Rössler 系统、分数阶 Liu 混沌系统, 到四维的分数阶 Lü 超混沌系统等, 它们的混沌动力学行为, 以及分数阶混沌系统的同步和控制等都有了一些研究<sup>[1-9]</sup>. 但是, 对于高维分数阶混沌系统的追踪控制同步以及电路实验的研究还不多, 尤其是分数阶混沌系统与任意信号或整数阶混沌系统的异结构追踪同步研究鲜见. 将分数阶混沌应用于保密通讯、信号处理等领域, 由于系统模型自身的复杂性, 会比整数阶混沌系统具有更强的保密性和抗破译能力, 因而分数阶混沌系统会有广泛的应用前景.

本文以具有复杂混沌行为的新颖 Tang 混沌吸引子为研究对象, 设计新型的线性反馈控制器, 基于分数阶动力系统的稳定性理论, 得到控制参数的选择范围, 实现分数阶混沌系统的每个状态向量与任意不同信号的追踪同步控制, 以及分数阶混沌系统与整数阶混沌系统的异结构追踪同步. 最后, 构造电路图, 实现分数阶混沌系统的电路模拟与仿真.

收稿日期: 2010-12-28.

基金项目: 国家自然科学基金(51075275).

通讯联系人: 闵富红, 博士, 副教授, 研究方向: 混沌系统同步与控制. E-mail: minfuhong@njnu.edu.cn

# 1 新型分数阶系统模型与问题描述

对于提出的四维整数阶超混沌系统,仅具有 3 个平衡点,与以往的混沌吸引子都不拓扑等价,所以是新型的系<sup>[10]</sup>统. 本文主要研究该混沌系统的分数阶动力学行为,数学模型如下:

$$\begin{cases} \frac{d^q x}{dt^q} = -ax + by, \\ \frac{d^q y}{dt^q} = cx - xz - dy - u, \\ \frac{d^q z}{dt^q} = xy - ez - fx + gu, \\ \frac{d^q u}{dt^q} = h(yz - u). \end{cases} \quad (1)$$

当参数  $a = 20.5$   $b = 68.8$   $c = 42$   $d = 0.6$   $e = 4$   $f = 4.5$   $g = 5$   $h = 0.8$  ,分数阶算子  $q = 1$  时,出现整数阶混沌吸引子. 当  $q \neq 1$  时,系统如(4) 式为分数阶混沌系统.

采取同样的系统参数,逼近误差为 2 dB. 图 1 中表示了分数阶混沌吸引子的相图.

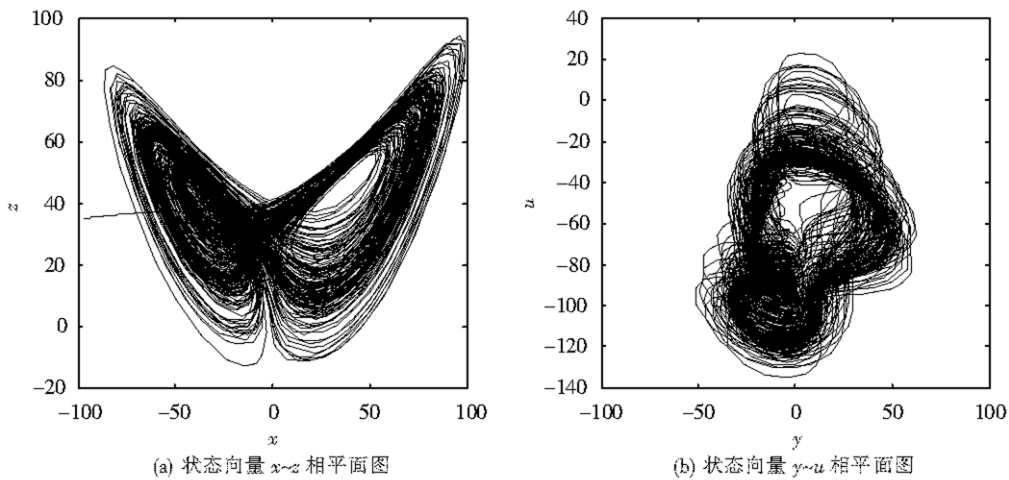


图 1 新型分数阶混沌吸引子( $q=0.3, 2$  dB 误差逼近)  
Fig.1 The attractors for fractional-order system in phase plane

本文目的是设计合适的线性反馈控制器,使得新型分数阶混沌系统如(4) 式的状态向量,能够与任意混沌信号或非混沌信号追踪同步,假设希望同时追踪的同步信号为 $(x^* \ y^* \ z^* \ u^*)$ ,其中每个信号可以是不同的信号,包括不动点、周期信号、混沌信号等有界信号. 对于新型分数阶混沌系统(1),按照如下的反馈控制方式,受控系统的模型如下:

$$\begin{cases} \frac{d^q x}{dt^q} = -ax + by + (k_1 + a)(x - x^*) + \phi_1, \\ \frac{d^q y}{dt^q} = cx - xz - dy - u + (k_2 + d)(y - y^*) + x^*(z - z^*) + z^*(x - x^*) + \phi_2, \\ \frac{d^q z}{dt^q} = xy - ez - fx + gu + (k_3 + e)(z - z^*) - y^*(x - x^*) - x^*(y - y^*) + \phi_3, \\ \frac{d^q u}{dt^q} = h(yz - u) + (k_4 + h)(u - u^*) - hz^*(y - y^*) - hy^*(z - z^*) + \phi_4, \end{cases} \quad (2)$$

式中,

$$\begin{cases} \phi_1 = ax^* - by^*, \\ \phi_2 = -cx^* + x^*z^* + dy^* + u^*, \\ \phi_3 = -x^*y^* + ez^* + fx^* - gu^*, \\ \phi_4 = -hy^*z^* - hu^*, \end{cases} \quad (3)$$

且  $k_i (i = 1, 2, 3, 4)$  为线性反馈控制增益.

下面分析当系统如(2)式稳定输出时,控制参数  $k_i (i = 1, 2, 3, 4)$  的满足范围.

根据分数阶受控混沌系统如(2)式和(3)式,得到系统如(2)式在稳定输出状态时,雅可比矩阵为:

$$J = \begin{bmatrix} k_1 & b & 0 & 0 \\ c & k_2 & 0 & -1 \\ f & 0 & k_3 & g \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

那么其特征方程为:

$$(\lambda - k_3)(\lambda - k_4)[\lambda^2 - (k_1 + k_2)\lambda + k_1k_2 - bc] = 0, \quad (5)$$

系统的特征值分别为:

$$\lambda_{1,2} = \frac{(k_1 + k_2) \pm \sqrt{(k_1 - k_2)^2 + 4bc}}{2}, \quad \lambda_3 = k_3, \quad \lambda_4 = k_4. \quad (6)$$

因为系统参数  $b > 0$  和  $c > 0$ ,只要控制参数满足以下不等式:

$$k_1 + k_2 + \sqrt{(k_1 - k_2)^2 + 4bc} < 0, \quad k_3 < 0, \quad k_4 < 0, \quad (7)$$

则  $\lambda < 0$ , 且  $|\arg(\lambda_i)| = \pi, i = 1, 2, 3, 4$ .

考虑分数阶微分动力系统为<sup>[9]</sup>:

$$\frac{d^q X(t)}{dt^q} = AX(t), \quad x(0) = x_0, \quad (8)$$

当其系统矩阵  $A$  特征值幅角大于  $q\pi/2$ , 即  $|\arg(\text{spec}(A))| > q\pi/2$ , 是渐近稳定的.

根据分数阶动力系统如(8)式的稳定条件,只要选择合适的控制参数满足不等式(7),就可使得雅可比矩阵(3)的特征值满足  $|\arg(\lambda_i)| > q\pi/2, i = 1, 2, 3, 4$ , 从而使得分数阶混沌系统如(2)式稳定,且可以追踪任意的输出信号  $x^*, y^*, z^*, u^*$ , 包括追踪不动点、周期信号、混沌信号等.

## 2 数值仿真及电路实验

下面采用几种典型的信号,即正弦信号、余弦信号、不同的不动点、超混沌 Qi 系统等,作为任意参考信号,实现分数阶混沌信号与这些非混沌信号以及混沌信号的追踪同步控制.同时,构造电路图实现追踪同步的电路模拟.

### 2.1 新型分数阶混沌系统同时追踪正弦信号、余弦信号以及不动点

这里对新型分数阶混沌系统实现控制,将其向量控制到周期轨道或任意期望的平衡点.

选取参考输出为  $x^* = 5, y^* = -10, z^* = \sin(2\pi t), u^* = 2\cos(\pi t)$ . 其中,正弦信号及余弦信号的周期和幅值都不一样.分数阶微分算子  $q = 0.3$ , 2 dB 误差逼近,进行数值仿真.选取反馈控制增益  $(k_1, k_2, k_3, k_4) = (-10, -10, -10, -10)$ . 定义误差曲线  $e_1 = x - x^*, e_2 = y - y^*, e_3 = z - z^*, e_4 = u - u^*$ . 数值仿真结果如图 2 所示.可见,追踪控制速度很快,误差小.

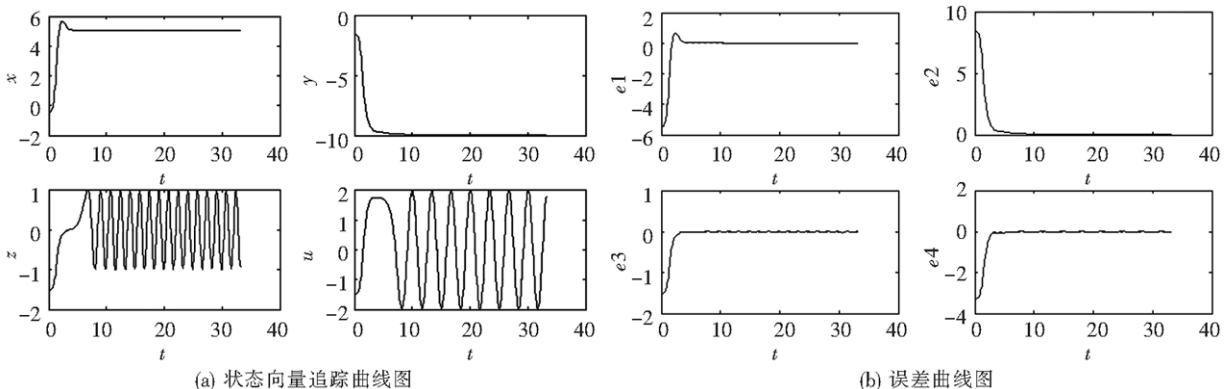


图 2 受控的新型分数阶混沌系统追踪仿真结果

Fig.2 The simulation results for tracking of fractional-order chaotic system

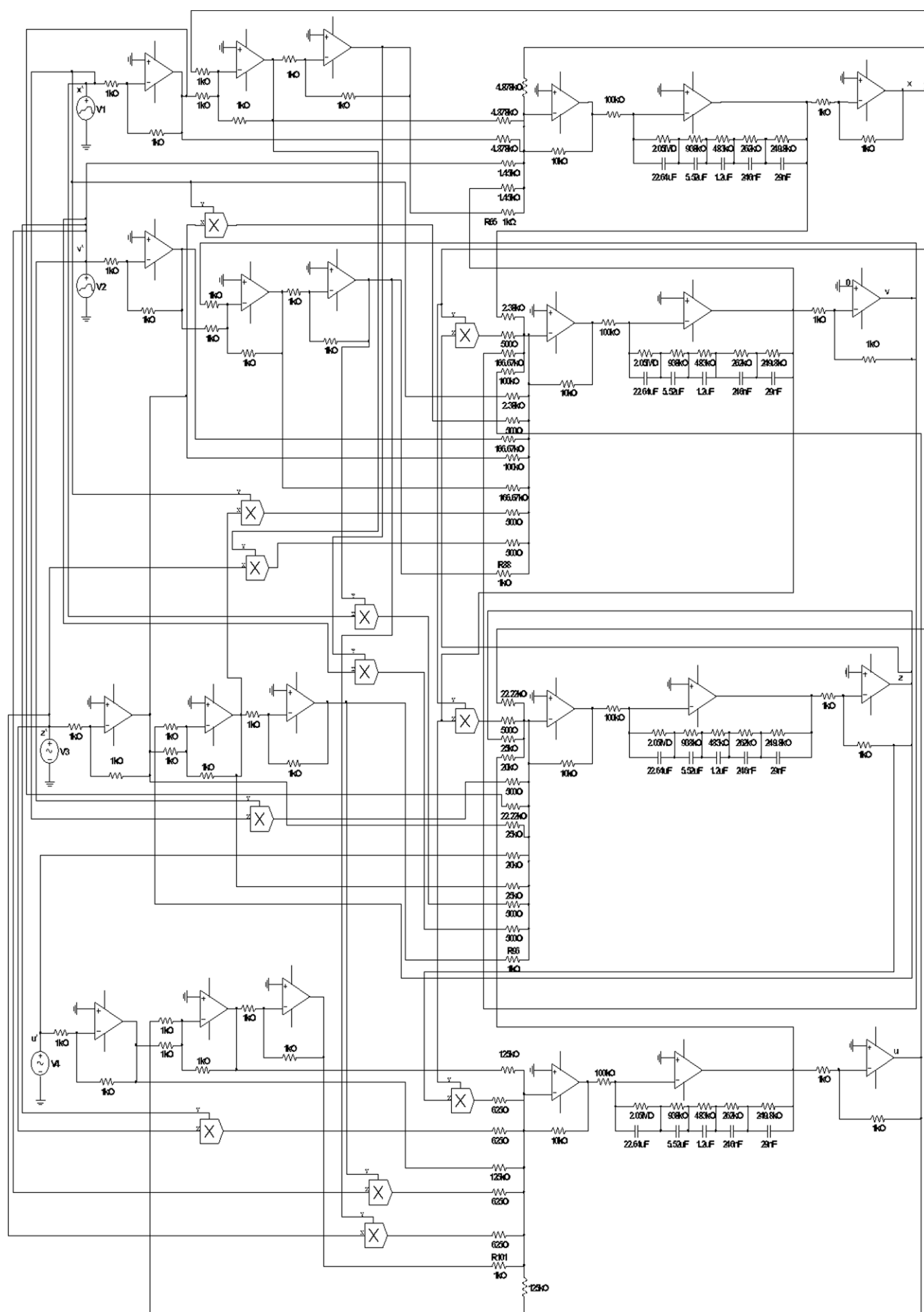


图 3 新型超混沌分数阶系统的追踪控制电路图

**Fig.3 The circuits of tracking control for new fractional-order hyper-chaotic system**

接着 利用电路软件 ,设计新型分数阶混沌系统追踪同步控制的电路图 ,电路图原理参照(2) 式和(3) 式. 运放选取 LF353 型号 ,乘法器为 AD633 型号. 利用多个 RC 模块串联的单元等效电路<sup>[6,7]</sup>. 如图3 所示 ,其中所有反馈控制器的增益均可由电阻值来设定 ,即电阻  $R_{65}$ 、 $R_{88}$ 、 $R_{96}$ 、 $R_{101}$  的大小 ,分别对应于控制增益  $k_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) ,通过改变这些电阻值 ,可以调节控制器的大小 ,计算公式如下:

$$k_i = -\frac{10^5}{100k} \frac{10k}{R} = -\frac{10^4}{R}, \quad (9)$$

$R$  可代表电阻  $R_{65}$ 、 $R_{88}$ 、 $R_{96}$ 、 $R_{101}$ . 设  $R_{65} = R_{88} = R_{96} = R_{101} = 1\text{ k}\Omega$   $k_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ )  $= -10$ . 其中 ,取追踪输出信号为:  $x^*$  恒为  $5\text{V}$  的电信号 ,  $y^*$  恒为  $-10\text{V}$  的电信号. 为了更好地从示波器中观察追踪效果 ,将追踪的正弦信号和余弦信号的频率分别扩大 10 倍 ,即  $z^*$  为峰值  $1\text{V}$ 、频率  $10\text{ Hz}$  的正弦波信号  $\mu^*$  为峰值  $2\text{V}$ 、频率  $5\text{ Hz}$  的余弦波信号. 经过仿真 ,得到了如图 4 所示的追踪结果 ,可以看到在不同时刻的追踪情况以及误差大小 ,响应速度快. 由于响应曲线误差很小 ,所以初始的不稳定过程 ,几乎看不出 ,只能从示波器中观察到稳态情况. 将图 4 与图 2 进行比较 ,电路实验结果图与数值仿真图形 ,在稳态阶段基本是一致的 ,说明了该电路设计的有效性.

## 2.2 新型分数阶混沌系统与整数阶超混沌 Qi 系统的异结构追踪同步

这里将整数阶超混沌 Qi 系统<sup>[11]</sup> 的全部状态向量作为参考信号 ,从而实现分数阶混沌系统与整数阶 Qi 混沌系统的异结构追踪同步.

超混沌 Qi 系统数学模型为:

$$\begin{cases} \dot{w}_1 = a(w_2 - w_1) + w_2 w_3, \\ \dot{w}_2 = b(w_1 + w_2) - w_1 w_3, \\ \dot{w}_3 = -cw_3 - ew_4 + w_1 w_2, \\ \dot{w}_4 = -dw_4 + fw_3 + w_1 w_2, \end{cases} \quad (10)$$

当参数  $a = 50$   $b = 25$   $c = 13$   $d = 8$   $e = 33$   $f = 30$  时 ,该系统呈现超混沌状态.

选取  $[x^* \ y^* \ z^* \ \mu^*] = [w_1 \ w_2 \ w_3 \ w_4]$  为参考输出信号. 由于该超混沌系统信号比较强 ,为了使得控制效果更好 ,选取控制增益大一些 ,为  $(k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4) = (-100, -100, -20, -20)$ . 首先 ,进行数值仿真. 其次 ,构造受控的新型分数阶混沌系统如(5) 式和整数阶超混沌 Qi 系统的追踪控制电路图. 由于篇幅的限制 ,这里省略数值仿真图与电路图. 电路图仿真得到的向量追踪效果如图 5 所示. 可见 ,通过选取合适的控制增益 ,新型分数阶混沌系统如(4) 式的所有状态向量也都能够快速地追踪到期望的混沌状态 ,系统响应快 ,稳定性能好.

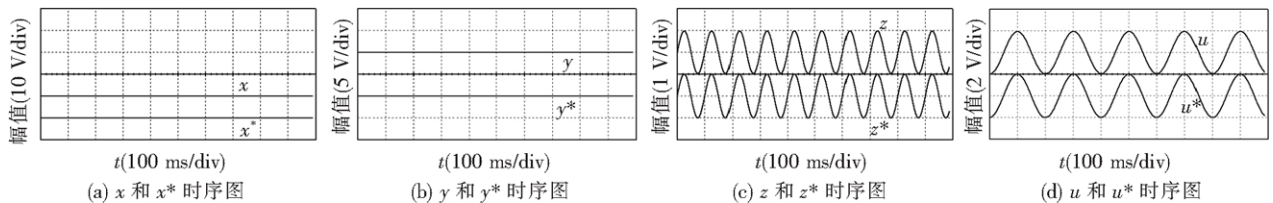


图 4 追踪控制新型分数阶混沌系统的电路实验结果

Fig.4 The experiment results of tracking control for different signals

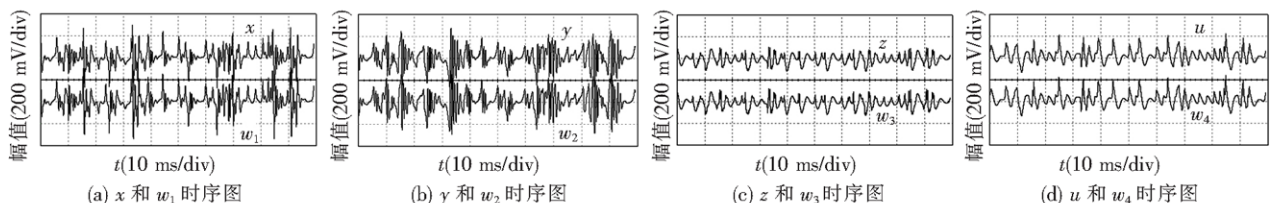


图 5 新型分数阶混沌系统与整数阶 Qi 混沌系统的异结构同步电路实验结果

Fig.5 The experiment results of the synchronization for two different fractional-order chaotic systems

### 3 结论

本文设计合适的反馈控制器,成功实现了分数阶混沌系统的所有状态向量与不同任意信号的追踪控制.当追踪信号为任意期望的不动点、正弦信号或者余弦信号时,可以将分数阶混沌系统控制到期望的周期轨道或平衡态;当追踪信号为不同的混沌信号时,可以实现分数阶混沌系统与整数阶混沌系统的异结构同步,同步效果好,误差曲线衰减快.此外,构造了追踪反馈控制同步的电路图,通过调节电阻值的大小,改变控制效果,电路实验结果与数值仿真结果一致.可见,如果将该方法应用到图像隐藏以及保密通信方面,将会具有很强的抗破译能力,有一定的潜在价值.

### [参考文献](References)

- [1] Peng G J. Synchronization of fractional order chaotic systems[J]. *Physics Letters A*, 2007, 363(9): 426-432.
- [2] 单梁,李军,闵富红,等.新分段分数阶混沌系统的同步控制[J].*系统工程与电子技术*, 2010, 32(10): 2 198-2 202.  
Shang Liang, Li Jun, Min Fuhong, et al. Synchronization control of new piecewise fractional-order chaotic systems[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2010, 32(10): 2 198-2 202. (in Chinese)
- [3] Li C G, Chen G R. Chaos and hyperchaos in the fractional-order Rössler equations[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2004, 341(10): 55-61.
- [4] Wu X J, Li J, Chen G R. Chaos in the fractional order unified system and its synchronization[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2008, 345(6): 392-401.
- [5] 张若洵,杨世平,刘永利.基于线性控制的分数阶统一混沌系统的同步[J].*物理学报*, 2010, 59(3): 1 549-1 553.  
Zhang Ruoxun, Yang Shiping, Liu Yongli. Synchronization of fractional-order unified chaotic system via linear control[J]. *Acta Physica Sinica*, 2010, 59(3): 1 549-1 553. (in Chinese)
- [6] Wang X Y, He Y J, Wang M J. Chaos control of a fractional order modified coupled dynamos system[J]. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 2009, 71(12): 6 126-6 134.
- [7] 闵富红,单梁,王执铨.分数阶 Qi 混沌系统投影同步和电路实现[J].*东南大学学报:自然科学版*, 2009, 39(9): 158-162.  
Min Fuhong, Shan Liang, Wang Zhiqian. Circuit implementation and project synchronization of fractiona order Qi chaotic systems[J]. *Journal of Southeast University: Natural Science Edition*, 2009, 39(9): 158-162. (in Chinese)
- [8] Lu J G. Chaotic dynamics of the fractional-order Lü system and its synchronization[J]. *Physics Letters A*, 2006, 354(6): 305-311.
- [9] Chen A M, Lu J A, Lü J H, et al. Generating hyperchaotic Lüattractor via state feedback control[J]. *Physics A*, 2006, 364(5): 103-110.
- [10] 唐良瑞,李静,樊冰.一个新四维超混沌系统及其电路实现[J].*物理学报*, 2009, 58(3): 1 446-1 455.  
Tang Liangrui, Li Jing, Fan Bing. A new four dimensional hyperchaotic system and its circuit simulation[J]. *Acta Physica Sinica*, 2009, 58(3): 1 446-1 455. (in Chinese)
- [11] Qi G Y, Chen G R, Zhang Y H. On a new asymmetric chaotic system[J]. *Chaos Solitons Fract*, 2008, 37(6): 409-423.

[责任编辑:刘 健]