

关于 Lyapunov 指数计算方法的比较

张海龙, 闵富红, 王恩荣

(南京师范大学 电气与自动化工程学院, 江苏 南京 210042)

[摘要] 针对常用的几种 Lyapunov 指数数值计算方法, 即定义法、正交法、wolf 法和小数据量法, 以典型的 Lorenz 系统为例, 分别计算 Lorenz 混沌吸引子的 Lyapunov 指数谱或者最大 Lyapunov 指数, 比较各种方法的计算精度、计算复杂度, 并且对含噪声的混沌时间序列给出 Lyapunov 指数计算结果, 比较各种抗干扰能力, 给出了不同计算方法的性能差异、适用场合和选择依据。

[关键词] Lyapunov 指数, Lorenz 系统, 混沌系统

[中图分类号] O415 **[文献标志码]** A **[文章编号]** 1672-4292(2012) 01-0005-05

The Comparison for Lyapunov Exponents Calculation Methods

Zhang Hailong, Min Fuhong, Wang Enrong

(School of Electrical and Automation Engineering, Nanjing Normal University, Nanjing 210042, China)

Abstract: In this paper, the several computational methods of Lyapunov exponents are compared, i. e., the definition method, the orthogonal method, the wolf method and the small data sets. The Lyapunov exponent power and the max-Lyapunov exponent are computed through the above methods for Lorenz system. From the results, the accuracies and the complexity of the above methods are investigated. Furthermore, the max-Lyapunov exponents are also calculated for the chaotic time series including the noise. Finally, numerical results demonstrate that the performances of different computational methods have differences, and some summaries will be presented.

Key words: Lyapunov exponents, Lorenz system, chaos system

混沌从本质上说是指确定性系统中出现的一种貌似无规则、类似随机的现象。混沌系统的基本特点是运动对初值条件极为敏感, 两个靠近的初值产生的轨道随时间推移按指数方式分离, Lyapunov 指数 (LE) 就是定量描述这一现象的量, 是衡量系统动力学特性的一个重要定量指标, 它表征了系统在相空间中相邻轨道间收敛或发散的平均指数率^[1, 2]。

如何快速、准确地计算出 LE 是分析混沌系统的关键, 近年来国内学者对 LE 的计算方法做了很多研究, Yan Wen^[3] 利用定义法求解了 logistic 模型的最大 lyapunov 指数 (LLE)、Liao^[4] 利用 wolf 法计算出几种典型混沌系统 LLE、Wang^[5] 在比较 wolf 法与小数据量法后选择采用小数据量法计算出 logistic 模型的 LLE、Xie^[6] 在实际应用中又提出改进的小数据量法。对于不同系统可以选择不同的计算方法, 虽然各种方法均取得了较好的计算结果, 不同的计算方法可以适用于不同的系统中, 但是目前对多种 LE 计算方法的综合比较和选择依据的说明很少。本文讨论混沌吸引子的 Lyapunov 指数计算问题, 主要是对实际应用中常用的几种方法进行比较, 即定义法、wolf 法、正交法和小数据量法, 以典型的 Lorenz 系统为例, 分别用各种方法计算其 Lyapunov 指数或者最大 Lyapunov 指数, 详细比较出各种求解精度、求解复杂度和抗干扰能力的差异, 从而给出各方法的适用范围和选择依据。关于其他动力学系统的 Lyapunov 指数计算结果, 由于篇幅的限制, 这里不再给出。

1 LE 计算方法简介

1.1 定义法

动力学系统中两个起始点很近的相轨迹, 随着时间推移按指数方式分离, LE 就是定量描述这一现象

收稿日期: 2011-09-01.

基金项目: 国家自然科学基金(51075275)、江苏省研究生创新工程项目(CXLX11_0889)。

通讯联系人: 闵富红, 博士, 副教授, 研究方向: 混沌系统同步与控制. E-mail: minfuhong@njnu.edu.cn

的值. 假设平均每次迭代所引起的指数分离中的指数为 λ , 于是原来相距为 ε 的两起始点经过 n 次迭代后相距为:

$$\varepsilon \cdot e^{n\lambda(x_0)} = |F^n(x_0 + \varepsilon) - F^n(x_0)|, \quad (1)$$

取极限 $\varepsilon \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, 通过化简变形上式为:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \frac{dF(x)}{dx} \right|_{x=x_i}, \quad (2)$$

式中 λ 与初始值的选取没有关系, 称为原动力系统的 LE.

1.2 wolf 法

假设混沌时间序列为 x_1, x_2, \dots, x_n , 嵌入维数 m , 时间延迟 τ , 则重构相空间得到 $Y(t_i) = (x(t_i), x(t_{i+\tau}), \dots, x(t_{i+(m-1)\tau}))$ ($i = 1, 2, \dots, N$). 取初始点 $Y(t_0)$, 设其与最近邻点 $Y_0(t_0)$ 的距离为 L_0 . 追踪这两点的时间演化, 直到 t_1 时刻, 其间距超过某规定值 $\varepsilon > 0, L'_0 = |Y(t_1) - Y_0(t_1)| > \varepsilon$, 保留 $Y(t_1)$, 并在 $Y(t_1)$ 邻近另外找一个点 $Y_1(t_1)$, 使得 $L_1 = |Y(t_1) - Y_1(t_1)| < \varepsilon$, 并且与之夹角尽可能小, 继续上述过程, 直至 $Y(t)$ 到达时间序列的终点 N , 这时追踪演化过程总的迭代次数为 M , 则 LLE 为:

$$\lambda = \frac{1}{t_M - t_0} \sum_{i=0}^M \ln \frac{L'_i}{L_i}. \quad (3)$$

1.3 正交法

采用重正化方法 GSR (Gram-Schmidt) 追踪发散轴行为, 能够得到混沌吸引子的全部 Lyapunov 指数, 具体做法如下:

当 $t = t_0$ 时, 初值为一个中心在 x_0 的小球, 取它的 m 个正交轴 $v_{11}, v_{21}, \dots, v_{m1}$, 其 k 维体积为 $A_k(t_0)$ ($k \leq m$); 当 $t = t_1$ 时, 上述小球演化到中心在 x_1 的椭球, 而 m 个轴变为 $v'_{11}, v'_{21}, \dots, v'_{m1}$, 其中有 $x_1 = F(x_0)$, $v'_{11} = J(x_0)v_{11}$ ($l = 1, 2, \dots, m$), 此时也可计算出对应体积 $A'_k(t_0)$, 利用 GSR 将 $v'_{11}, v'_{21}, \dots, v'_{m1}$ 正交化, 必要时可将其模缩小, 得到向量 $v_{12}, v_{22}, \dots, v_{m2}$, 计算此时的 k 维体积 $A'_k(t_1)$; 当 $t = t_2$, 上述椭球演化为中心在 x_2 的椭球, m 个轴变为 $v'_{12}, v'_{22}, \dots, v'_{m2}$, 其中 $x_2 = F(x_1)$, $v'_{12} = J(x_1)v_{12}$ ($l = 1, 2, \dots, m$). 此时也可计算出 k 维体积 $A'_k(t_2)$, 重复上述做法, 最终得到:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{t_n - t_0} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \frac{A'_k(t_i)}{A_k(t_i)}, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (4)$$

1.4 小数据量法

在实际应用中, 小数据量方法的具体步骤为:

(1) 估计出时间序列 k 维体积 $\{x(t_i) | i = 1, 2, \dots, N\}$ 的重构相空间嵌入维数 m 和时间延迟 τ ;

(2) 根据 m 和 τ 重构相空间 $\{Y_j | j = 1, 2, \dots, M\}$; 找相空间中每个点 Y_j 的最近邻点 Y'_j 并限制短暂分离, 即:

$$d_j(0) = \min \|Y_j - Y'_{j'}\|, |j - j'| > P, \quad (5)$$

P 为时间序列的平均周期.

(3) 对相空间中每个点 Y_j , 计算出该邻点的 i 个离散时间步后的距离 $d_j(i)$:

$$d_j(i) = \min \|Y_{j+i} - Y'_{j'+i}\|, \quad i = 1, 2, \dots, \min(M-j, M-j'); \quad (6)$$

(4) 对每个 i , 求出所有 j 的 $\ln d_j(i)$ 平均 $y(i)$, 即:

$$y(i) = \frac{1}{q\Delta t} \sum_{j=1}^q \ln d_j(i), \quad (7)$$

其中 q 是非零 $d_j(i)$ 的数目, 并用最小二乘法作出回归直线, 得到的直线斜率就是 LLE.

2 Lorenz 系统的 Lyapunov 指数计算

典型的 Lorenz 系统^[7] 的动力学方程为:

$$\begin{cases} \dot{x} = -a(x - y), \\ \dot{y} = -xz + rx - y, \\ \dot{z} = xy - bz. \end{cases} \quad (8)$$

选取系统参数 $a = 10$ $b = 8/3$, 初始值 $x(0) = 1$, $y(0) = 1$ $z(0) = 0$. 利用 Matlab 软件, 基于龙格库塔定步长法进行仿真计算, 步长取为 0.01, 舍去前 1000 个不稳定点, 采取局部最大值法得到如图 1 所示的 Lorenz 系统分岔图. 参数 r 在 1 至 500 之间变化, 可见 Lorenz 方程随参数 r 呈现逆向倍周期分岔, 在 $r = 24$ 处进入混沌区域, 在 $r = 310$ 处发生第一次倍周期分岔.

同样, 令参数 $a = 10$ $b = 8/3$, 使参数 r 在 1 至 500 之间变化, 分别采用上节列举的方法计算 Lorenz 系统的 LE 随参数 r 的变化情况, 数值仿真结果如图 2 所示. 比较 4 幅小图可以看出, 4 种方法求出的 LLE 随参数 r 的变化趋势一致, 都是在 $r = 24$ 处 $\lambda_{\max} > 0$, 在 $r = 220$ 处后 $\lambda_{\max} \approx 0$, 与图 1 所示参数分岔图相吻合, 即混沌运动区域最大 LE 大于零, 4 种方法都正确反映了系统随参数 r 的变化趋势. 相比较而言, 正交法可以计算出每个 LE 的值, 求出的 lyapunov 指数谱更直观、更全面地反映出系统的运动特征.

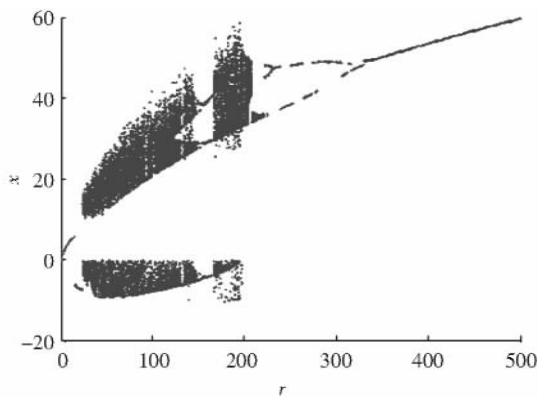
图 1 Lorenz 系统随参数 r 变化的分岔图

Fig.1 The bifurcation of Lorenz system

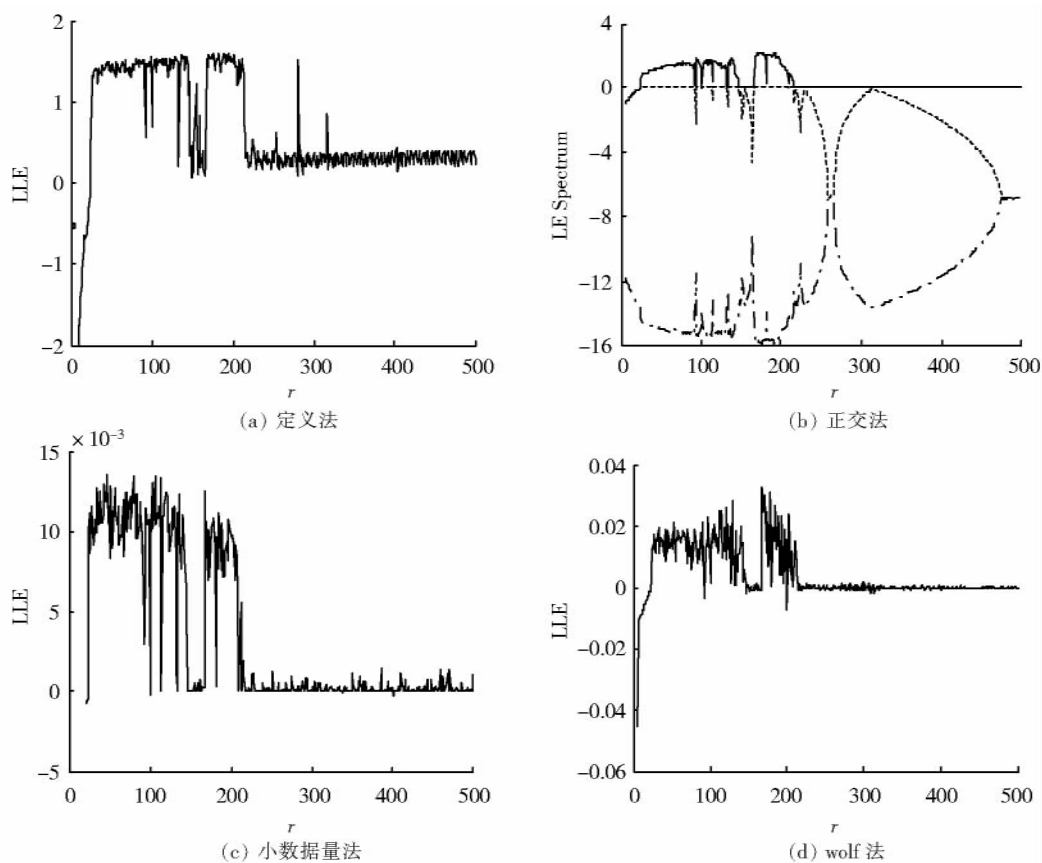


图 2 Lorenz 系统的 Lyapunov 指数图

Fig.2 The Lyapunov exponents of Lorenz system

若取 $a = 10$ $b = 8/3$ $r = 28$, 此时系统处于混沌区域, 可以计算出系统的 3 个 LE 和 LLE 分别为 λ_1 , λ_2 , λ_3 , λ_{\max} , 重构相空间嵌入维数 m 和时间延迟 τ , 由 C-C 法^[8]求得, 嵌入维数 $m = 5$, 嵌入延时 $\tau = 12$, 分别用定义法、wolf 法和小数据量法计算 LLE, 正交法计算出 3 个 Lyapunov 指数, 结果如表 1 所示. 可以看出, 几种方法的计算结果在数值上有差异, 但求得的 LLE 大于 0, 判断出此时出现混沌运动. 同时, 用运行的时间比较各方法的计算复杂度, 定义法用时最短为 0.93 s, 正交法用时 12.4 s, wolf 法和小数据量法用时较长, 都约为 2 min.

表 1 $a = 10$ $b = 8/3$ $r = 28$ 时 Lyapunov 指数比较
Table 1 The comparison of Lyapunov Exponents with $a = 10$ $b = 8/3$ $r = 28$

计算方法	λ_1	λ_2	λ_3	λ_{max}
定义法	\	\	\	1.367 1
Wolf 法	\	\	\	0.022 9
正交法	0.856 4	-0.001 1	-14.518 5	0.856 4
小数据量法	\	\	\	0.024

计算 LE 的关键步骤^[5 9] 是时间序列的相空间重构,需要两个重要参数嵌入维数 m 和时间延迟 τ ,其计算方法有多种,采用不同方法得出的 m 和 τ 不尽相同.如果 LE 计算方法随 m 和 τ 变化产生的波动较大,则又带来新的不确定性,使其求解准确度进一步降低.针对这一问题,本文人为改变根据 C - C 法求解出的 m 和 τ ,比较不同 m 和 τ 下各种方法 LE 计算结果,如表 2 所示,可以看出定义法求得结果没有任何改变,正交法求解结果也未受到 m 和 τ 改变的影响,而 wolf 法和小数据量法均有明显波动,其中小数据量法尤为明显,说明小数据量法对 m 和 τ 的准确性要求较高,一般采用 C - C 法同时求出 m 和 τ .

表 2 嵌入维数和时间延迟变化 Lyapunov 指数比较
Table 2 The comparison of Lyapunov exponents from embedding dimensions and delay times

嵌入维数、时间延迟	定义法	Wolf 法	正交法	小数据量法
$m = 5$ $\tau = 12$	1.367 1	0.022 9	0.856 4	0.024
$m = 5$ $\tau = 14$	1.367 1	0.019 8	0.856 4	0.008 7
$m = 8$ $\tau = 12$	1.367 1	0.024 1	0.856 4	0.045
标准差	0	0.002 2	0	0.018 2

另外,在分析实际的非线性动力系统时,计算机采集的时间序列大多包含一定程度的噪声成分^[10],如果计算方法不能有很好的抗干扰能力,将会使计算结果完全偏离,失去分析的意义.为了比较几种计算方法的抗干扰能力,我们在 Lorenz 时间序列 $\{x_i, i = 1, 2, \cdots, N\}$ 中添加随机噪声序列,仍采用 $m = 5$ $\tau = 12$,分别运用上述 4 种方法计算含噪声时间序列的 LE,并与无噪声时间序列的计算结果比较,如表 3 所示,可以看出小数据量法抗干扰能力最强, wolf 法和正交法受到噪声影响较小,而定义法受到噪声产生的波动最为明显.

表 3 含噪时间序列下 Lyapunov 指数比较
Table 3 The comparison of Lyapunov exponents in noisy time series

计算方法	无噪声序列最大 lyapunov 指数	含噪声序列最大 lyapunov 指数	误差率/%
定义法	1.367 1	1.423 4	4.1
Wolf 法	0.022 9	0.022 3	-2.6
正交法	0.856 4	0.851 4	-0.51
小数据量法	0.024	0.024 1	0.42

3 结论

通过计算 Lorenz 系统的 LLE 和 LE,本文在计算准确性、计算复杂度和抗噪声能力 3 方面比较了定义法、wolf 法、正交法和小数据量法,得到如下的结论:

(1) 根据 4 种数值方法计算得到的 lyapunov 指数随参数变化图的趋势一致,均能与参数分岔图相对应,即都能判断出系统的周期运动与混沌运动区域,此时由于定义法计算复杂度低、抗干扰能力强,应当被优先考虑.

(2) 在非线性动力系统中,当计算分维数、K 熵或者根据 Lyapunov 指数进行预测时,需要得到相应的 Lyapunov 指数谱.由于正交法求出的 Lyapunov 指数谱的精度高、耗时少、抗干扰能力较强,因此优先考虑正交法.

(3) 在实际应用中,系统采集的数据量有限、含有噪声成分,并且只要计算出 LLE 的时候,可以优先考虑小数据量法,需要注意的是小数据量法随嵌入维数 m 和嵌入延迟 τ 的波动较明显,建议采用 C - C 法或改进的 C - C 法计算 m 和 τ ,文中在使用 wolf 法时,主要用来作验证性分析,与其他方法配合使用.

总之,在计算 lyapunov 指数过程中,要根据实际系统、计算目的等因素选择合适的计算方法,目前很多

学者在原有基础上提出了一系列改进的计算方法,都是在实际使用过程中的总结,若能灵活掌握多种 Lyapunov 指数数值计算方法,对有效分析及控制非线性动力系统会起到重要的作用。

[参考文献] (References)

- [1] 吕金虎, 陆君安, 陈士华. 混沌时间序列分析及其应用 [M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2005.
Lü Jinhui, Lu Junan, Chen Shihua. The Analysis and Application for Chaotic Time Series [M]. Wuhan: Wuhan University Press, 2005. (in Chinese)
- [2] 罗利军, 李银山, 李彤, 等. 李雅普诺夫指数谱的研究与仿真 [J]. 计算机仿真, 2005, 22(12): 285-288.
Luo Lijun, Li Yinshan, Li Tong, et al. Research and simulation of Lyapunov's exponents [J]. Computer Simulation, 2005, 22(12): 285-288. (in Chinese)
- [3] 严雯, 遯宗胜. Lyapunov 指数的数值计算方法 [J]. 中国对外贸易, 2010, 55(24): 354.
Yan Wen, Lu Zongsheng. The numerical calculation method of Lyapunov index [J]. China's Foreign Trade, 2010, 55(24): 354-356. (in Chinese)
- [4] 廖德玮, 朱伟强. Lyapunov 指数计算研究及应用 [J]. 温州职业技术学院学报, 2008, 8(4): 39-41.
Liao Dewei, Zhu Weiqiang. Research on lyapunov exponents algorithm and its application [J]. Journal of Wenzhou Vocational and Technical College, 2008, 8(4): 39-41. (in Chinese)
- [5] 王妍, 徐伟, 曲继圣. 基于时间序列的相空间重构算法及验证(一) [J]. 山东大学学报: 工学版, 2005, 35(6): 89-94.
Wang Yan, Xu Wei, Qu Jisheng. The algorithm and check of phase-space reconstruction based on the time series [J]. Journal of Shandong University: Engineering Science Edition, 2005, 35(6): 89-94. (in Chinese)
- [6] Xie Zhongyu, Wang Kejun, Zhang Ling. Improved algorithm for calculating Lyapunov exponent and distinguishing chaos from noise [J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2010, 17(1): 101-104.
- [7] 张政伟. 用 Matlab 分析 Lorenz 系统族 [J]. 现代电子技术, 2004, 31(6): 40-42.
Zhang Zhengwei. Analysis of Lorenz system family with MATLAB [J]. Contemporary Electric Technique, 2004, 31(6): 40-42. (in Chinese)
- [8] Lu Zhenbo, Cai Zhiming. Determination of embedding parameters for phase space reconstruction based on improved C - C method [J]. Journal of System Simulation, 2007, 11(19): 2 527-2 538.
- [9] 陈国华, 马军海, 盛昭瀚. 动力系统实测数据相空间重构的改进方法 [J]. 东南大学学报: 自然科学版, 2000, 30(1): 16-21.
Chen Guohua, Ma Junhai, Sheng Shaohan. A new algorithm of the phase space reconstruction for the data obtained in dynamical systems [J]. Journal of Southeast University: Natural Science Edition, 2000, 30(1): 16-21. (in Chinese)
- [10] 韩敏, 王一颀. 含噪声混沌信号最大 Lyapunov 指数计算 [J]. 控制理论与应用, 2008, 25(5): 898-900.
Han Min, Wang Yijie. Computation of the largest Lyapunov exponent in noisy chaotic signal [J]. Control Theory and Applications, 2008, 25(5): 898-900. (in Chinese)

[责任编辑: 刘 健]