

# 热传导方程伽略金近似解与数值解的比较分析

黄庆宏<sup>1</sup>, 王 柯<sup>2</sup>, 张 敏<sup>2</sup>

(1. 南京师范大学 能源与机械工程学院, 江苏 南京 210042)

(2. 南京理工大学 动力工程学院, 江苏 南京 210094)

**[摘要]** 在对称域或非对称域中, 用结构化或非结构化网格中有限容积方法对稳态热传导问题进行数值求解. 同时, 采用伽略金近似方法分别对不同形状域求其近似解, 并与精确解或数值解进行比较分析. 在此基础上对几种计算方法所得结果进行误差分析, 通过比较计算结果可以得到令人满意的一致性. 这些都充分证明伽略金近似方法和本文给出的数值方法的可靠性和实用性.

**[关键词]** 伽略金近似解, 数值计算, 非结构化网格

**[中图分类号]** TK124 **[文献标志码]** A **[文章编号]** 1672-1292(2012)01-0025-04

## Analysis and Comparison of Galerkin Approximating Method and Numerical Computation

Huang Qinhong<sup>1</sup>, Wang Ke<sup>2</sup>, Zhang Min<sup>2</sup>

(1. School of Energy and Mechanical Engineering, Nanjing Normal University, Nanjing 210042, China)

(2. School of Energy and Power Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

**Abstract:** On bounded symmetry and asymmetry domains, the steady state heat conduction equations were solved and calculated by using the finite volume method in structured or unstructured meshes. Also, the approximate solutions of different domains were derived on the basis of the concept of Galerkin method. Compared with these calculation results, there is a good agreement between them. These proved that Galerkin approximating method and numerical calculation are believable and practical.

**Key words:** Galerkin approximate method, numerical calculation, unstructured mesh

在 1915 年, 伽略金提出求解热传导边值问题的近似方法之前, 人们一般采用里兹变分近似方法求解热传导的近似问题. 里兹方法可以使用的前提是必须有一个变分表达式, 并且该表达式与主导微分方程相等价. 而伽略金提出的一种求解边值问题的近似方法, 它不需要写出该问题的变分表达式, 因而成为一种更为一般, 更为直接求解边值问题的方法<sup>[1]</sup>. 伽略金法对椭圆、双曲线和抛物线型方程, 无论是线性的, 还是非线性的问题都适用.

本文将在伽略金方法的基本原理下和在非对称有限区域内, 求解稳态热传导问题. 同时我们也给出数值解的比较结果. 若读者要进一步探讨伽略金法的理论和应用可参阅文献 [2-4].

## 1 伽略金近似方法的基本理论

对于一个稳态热传导问题, 我们可以用下式来描述.

$$L[T(r)] = \nabla^2 T(r) + A(r)T(r) + \frac{1}{k}g(r) = 0, \quad \text{在区域 } R \text{ 内}, \quad (1)$$

$$B[T(r)] = \frac{\partial T}{\partial n_i} + H_i T = f_i(r_s), \quad \text{在边界 } s_i \text{ 处}, \quad (2)$$

式中,  $T$  为温度;  $L$  是线性微分算子;  $B$  是线性边值条件算子. 选近似试探解  $\bar{T}(r)$  为:

$$\bar{T}(r) = \psi_0(r) + \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j(r), \quad \text{区域 } R \text{ 内}. \quad (3)$$

收稿日期: 2011-11-08.

通讯联系人: 黄庆宏, 副教授, 研究方向: 数值仿真. E-mail: huangqinhong@njnu.edu.cn

试探函数  $\psi_0(r)$  为满足边界条件式(1.2)的非齐次部分, 试探函数  $\phi_j(r)$  满足齐次部分, 即:

$$B[\psi_0] = f(r_s), \quad B[\phi_j] = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

为确定未知系数  $c_j$ , 伽略金法要求在问题所讨论的区域内, 余量的加权平均为0.

$$\int_R L[\bar{T}_n(r)] w_i(r) dV = \int_R L[\psi_0(r) + \sum_{j=1}^n c_j \phi_j(r)] \phi_i(r) dV = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (4)$$

式中  $\phi_i(r)$  为权函数. 通过上面关系式会得到一组用于确定  $n$  个系数  $c_1, c_2, \dots, c_n$  的代方程. 如若把属于这个完备系的全部权函数  $\phi_i$  都包括进去, 则式(4)成立的必要条件对应着问题的精确解. 然而在伽略金法中, 式(4)考虑的只是这个函数系中的有限个数, 因此最终的解将是近似的. 试探函数系  $\phi_j(r)$  和权函数  $\phi_i(r)$  是相同正交函数系.

## 2 试探 / 权函数的构造

构造的函数  $\phi_j(r)$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) 应是一组在所讨论区域内完备的函数, 即它们是连续的, 而且有连续的一阶和二阶导数. 它们可以是多项式、三角函数、柱函数或球函数, 但应满足问题边界条件中的齐次部分. 下面简要地介绍构造试探 / 权函数的一些基本的原则. 当全部边界条件都是第一类边界时, 可设辅助几何函数  $w(x, y)$  是连续的, 并满足式(5)的条件:

$$w(x, y) > 0, \quad \text{在 } R \text{ 边界上}; \quad w(x, y) = 0 \text{ 在区域 } R \text{ 内}. \quad (5)$$

针对这一类问题, 试探 / 权函数  $\phi_j(x, y)$  可以构造如下式:

$$\phi_1 = w, \quad \phi_2 = wx, \quad \phi_3 = wy, \quad \phi_4 = wxy, \quad \phi_5 = wx^2 \dots \quad (6)$$

这是直角坐标系, 但其他坐标系有类似的结果. 一般情况下区域边界为:

$$F_1 = a_1x + b_1y + d_1 = 0, \quad F_2 = a_2x + b_2y + d_2 = 0, \quad \dots, \quad F_n = a_nx + b_ny + d_n = 0. \quad (7)$$

则我们可取辅助几何函数  $w$  为:

$$w(x, y) = \pm F_1(x, y) F_2(x, y) \dots F_n(x, y). \quad (8)$$

对于其他类型边界条件, 我们没有一般的规律能使试探 / 权函数适合于包括各种边界条件的情形. 但有一点需要保证, 这就是试探 / 权函数及其导数要是连续的.

## 3 算例计算与分析

a) 矩形区域  $(-a, a; -b, b)$  内具有恒定强度  $g/(W/m^3)$  的内热源, 全部边界均维持在零度. 稳态热传导问题的数学描述形式为:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{1}{k}g = 0, \quad -a < x < a, \quad -b < y < b, \quad (9)$$

$$T = 0, \quad x = \pm a \text{ 和 } y = \pm b. \quad (9a)$$

用伽略金法解该问题, 根据式(4), 可写作:

$$\int_{x=-a}^a \int_{y=-b}^b \left[ \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2} + \frac{1}{k}g \right] \phi_i(x, y) dx dy = 0. \quad (10)$$

取单项式试探解,

$$\bar{T}_1(x, y) = c_1 \phi_1(x, y), \quad \phi_1(x, y) = (a^2 - x^2)(b^2 - y^2), \quad (11)$$

将此试探解代入式(10), 进行积分整理得单项式近似解为:

$$\bar{T}_1(x, y) = \frac{3}{4} \frac{(g/k)}{(a^2 + b^2)} \{ (a^2 - x^2)(b^2 - y^2) \}, \quad (12)$$

则该问题的精确解为:

$$T(x, y) = \frac{g}{k} \left\{ \frac{a^2 - x^2}{2} - 2a^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\beta_n^3} \frac{\cosh(\beta_n y/a) \cos(\beta_n x/a)}{\cosh(\beta_n b/a)} \right\} \\ \beta_n = \frac{(2n+1)\pi}{2}. \quad (13)$$

首先取一个矩形域  $(a = 2, b = 1)$ , 为了方便计算采用区域的四分之一来进行数值模拟. 物性参数为  $T_w = 0, k = 1, g = 5$  (国际标准单位). 图1和图2背景云图分别为数值解与精确解, 虚线为近似解. 两者进

行比较,显然单项式试探解吻合较好.

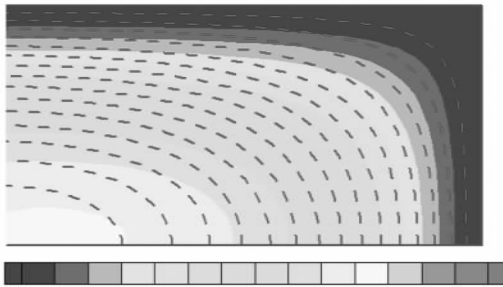


图1 数值解和近似解温度场分布

Fig.1 Temperature field distribution of numerical solution and approximate solution

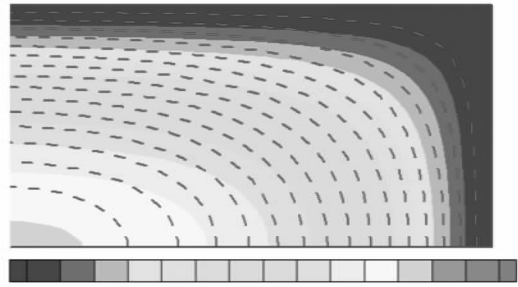


图2 精确解和近似解温度场分布

Fig.2 Temperature field distribution of exact solution and approximate solution

b) 两个相交圆所构成的月牙形区域,内有恒定强度  $g/(W/m^3)$  的内热源,全部边界均维持在零度,问题的数学描述为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{g}{k} &= 0, \quad -R_1 < x < L - R_1, \quad -R_1 < y < R_1. \\ T &= 0, \quad x^2 + y^2 = R_1^2 \text{ 和 } (x - L)^2 + y^2 = R_2^2. \end{aligned} \quad (14)$$

用伽略金法解该问题可写成:

$$\begin{aligned} \int_{-R_1}^R \int_0^h \left[ \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2} + \frac{g}{k} \right] \phi_i(x, y) dx dy - \int_0^B \int_{x=L-h_3}^h \left[ \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2} + \frac{g}{k} \right] \phi_i(x, y) dx dy &= 0, \\ B &= \sqrt{[(R_1 + R_2)^2 - L^2][L^2 - (R_1 - R_2)^2]} / (2L)^2, \\ h_1 &= \sqrt{R_1^2 - x^2}, \quad h_2 = \sqrt{R_1^2 - y^2}, \quad h_3 = \sqrt{R_2^2 - y^2}. \end{aligned} \quad (15)$$

取单项式试探解为:

$$\bar{T}_1(x, y) = c_1 \phi_1(x, y) = c_1 (R_1^2 - x^2 - y^2) [R_2^2 - (x - L)^2 - y^2]. \quad (16)$$

将此试探解代入式(15)进行积分,其中令权函数  $\phi_i(x, y) = 1$  得:

$$\begin{aligned} A &= D/2L, \quad D = R_1^2 + R_2^2 - L^2, \quad H_{12} = H_1 + H_2, \\ H_1 &= (AB + R_1^2 \arcsin(B/R_1))/2, \quad H_2 = (AB + R_2^2 \arcsin(B/R_2))/2, \\ H_3 &= (BR_2^2 |A - L| + R_2^4 \arcsin(B/R_2) - 2B |A - L|^3)/8. \end{aligned} \quad (17)$$

最后得单项式近似解为:

$$\bar{T}_1(x, y) = \frac{(\pi R_1^2 - 2H_{12} + 2LB)(R_1^2 - x^2 - y^2)[R_2^2 - (x - L)^2 - y^2](3g/4k)}{3R_1^2(2\pi R_1^2 - 8H_1 - \pi D) - 2(4L^2 + 6D - 3)LB - 2(4R_2^2 H_2 + 8H_3 - 3DH_{12})}. \quad (18)$$

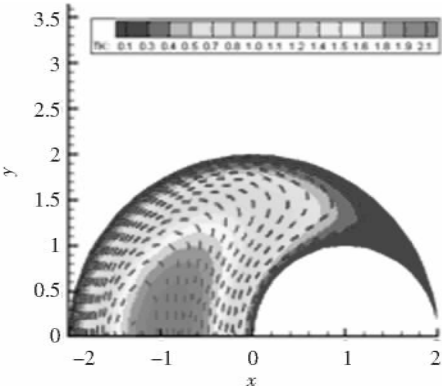


图3 数值解和近似解温度场分布

Fig.3 Temperature field distribution of numerical solution and approximate solution

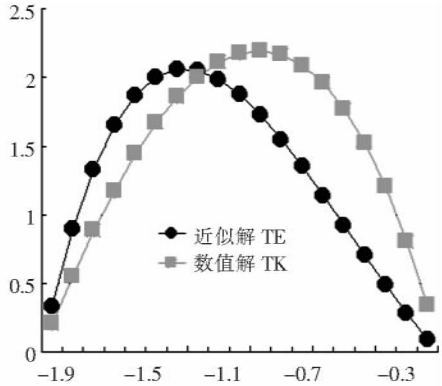


图4 数值解和近似解的比较

Fig.4 Comparison of numerical solution and approximate solution

采用相同算例一的物性参数,图3背景云图为数值解,虚线为式(18)的近似解.图4所示为月牙形区

域对称轴上数值解( TK) 和近似解( TE) 的比较结果. 通过分析可以看出数值解和近似解在中心处误差较大, 而在边界处较小.

c) 三角域中伽略金方法的应用, 如图 5 所示, 其边界条件为:

$$T_w = 0, \quad y - \alpha x = 0, \quad y + \beta x = 0 \text{ 和 } L - x = 0. \quad (19)$$

用伽略金法解该问题可写成:

$$\int_0^L \int_{-\beta x}^{\alpha x} \left[ \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2} + \frac{1}{k} g \right] \varphi_i(x, y) dx dy = 0. \quad (20)$$

取单项式试探解为:

$$\bar{T}_1(x, y) = c_1 \varphi_1(x, y), \quad \varphi_1(x, y) = (y - \alpha x)(y + \beta x)(L - x), \quad (21)$$

当  $\alpha = 1, \beta = 2, L = 1$  时, 单项式近似解为:

$$\bar{T}_1(x, y) = -\frac{3}{16} \frac{g}{k} [(y - x)(y + 2x)(1 - x)]. \quad (22)$$

图6中背景云图为数值解, 实线为近似解. 从图6可以看出两者吻合但仍具有一定的偏差, 平均误差为 1.7%. 可见对非对称的三角域, 单项式试探解只能大致反应温度场的分布规律. 故针对非对称的三角域, 需要进一步引进二项式试探解, 以增加其准确度. 二项式试探解的温度分布可取式(23)的形式:

$$T(x, y) = (c_1 + c_2 x^2)(y - \alpha x)(y + \beta x)(L - x). \quad (23)$$

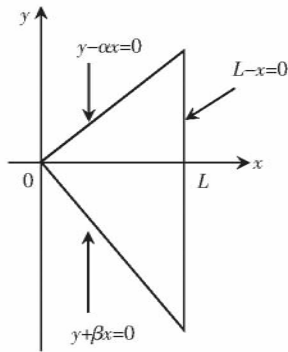


图 5 非对称三角区域几何图  
Fig.5 Geometric figure of asymmetric triangular region

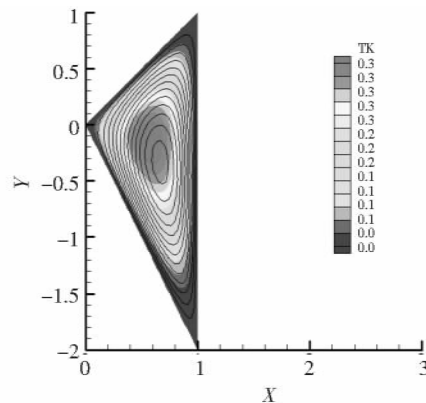


图 6 数值解和近似解的温度场分布  
Fig.6 Temperature field distribution of numerical solution and approximate solution

用上述同样的方法进行计算, 即可求得系数  $c_1$  和  $c_2$ . 因篇幅有限在此不再做详细的讨论, 有兴趣的读者可做进一步的分析计算.

## 4 结论

本文介绍了热传导问题的伽略金近似方法. 通过 3 个具体的算例分别在对称域和非对称域中, 求得其伽略金近似解, 对其温度场分布的精确解、数值解和近似解进行比较分析. 从这些分析比较中, 不难看出数值传热计算的优越性和它的巨大发展潜力. 作为加权余量法的一种试探函数选取形式, 伽略金法所得到的只是在原求解域内的一个近似解, 在单向式试探解还是具有一定的误差, 如果要获得较高的精确度, 二项式试探解的采用是十分重要的.

## [参考文献] (References)

- [1] 奥齐西克 M N. 热传导[M]. 俞昌铭, 译. 北京: 高等教育出版社, 1984.  
Ozisk M N. Conduction of Heat [M]. Yu Changming, Translated. Beijing: Higher Education Press, 1984. (in Chinese)
- [2] Zhang M. Modeling of radiative heat transfer and diffusion processes using unstructured grid[D]. USA: Tennessee Technological University, 2000.
- [3] Patankar S V. Numerical Heat Transfer and Fluid Flow[M]. New York: Hemisphere Publishing, 1981.
- [4] 陶文铨. 数值传热学[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1988.  
Tao Wenquan. Numerical Heat Transfer[M]. Xian: Xian Jiaotong University Press, 1988. (in Chinese)

[责任编辑: 刘 健]