

加工时间是开工时间线性函数的两人合作排序 博弈问题

金 霁

(苏州市职业大学 基础部 江苏 苏州 215104)

[摘要] 现实活动中,存在大量的需要由多人合作才能完成某项工作的情况.针对两人合作共同加工一批工件,每人有一台加工机器,每个工件只需加工一次,工件加工时间是开工时间的线性函数的问题建立数学模型,考虑以最小的最大流程时间作为加工成本,确定这批工件的一个划分,把工件分配给两台机器加工.该划分方案不仅考虑到合作双方的效率,而且充分体现公平性原则,从而使双方对相应的合作(加工)收益分配满意,愿意合作.

[关键词] 排序,博弈,合作,收益,最大流程时间,线性函数

[中图分类号] O221.7 [文献标志码] A [文章编号] 1672-1292(2012)04-0087-06

Two Cooperative Game Problem on Scheduling With Linear Processing Time of Its Starting Time

Jin Ji

(Foundation Department, Suzhou Vocational University, Suzhou 215104, China)

Abstract: In the real world, there exist many situation where many persons need cooperate in order to complete a project. We establish a mathematical model of the problem where two persons process a batch of jobs by cooperation. Each person offers a single machine and each job with linear processing time of its starting time just needs to be processed once. If we define the minimized maximum flow time as a processing cost, determine a division of these jobs which not only considers the efficiency of each person but also embodies the fairness principle, to yield a reasonable cooperative(processing) profit allocation scheme acceptable to them.

Key words: scheduling, game, cooperation, profit, maximum flow time, linear function

现实生产活动中常常会遇到需要多“人”(一个自然人或某一个集体、企业、地方政府,甚至是一个国家)合作完成某项工作的情况.如当下国家正在大力推进的保障房建设项目,它需要国家、地方、开发商等多人合作共同完成,每一方都希望通过合作使自己的收益最大.

解决问题的关键在于如何对该项目进行划分,从而使各方都能合作中满意.为此,本文首先建立数学模型:将某项工作中每一个需要完成的相对独立的工作视为工件,则需要通过合作共同完成的某项工作就是这些工件的集合.本文要解决的问题就是如何划分该工件集,使得每一个参与者通过合作加工,获得满意的合作收益.陈全乐博士首先开始研究两人合作加工的排序问题^[1],将纳什博弈解(Nash Bargaining Solution, NBS)^[2,3]应用到此类研究中,并加以推广以此作为优化的目标.陈全乐博士提出的优化目标函数,可以根据实际需要,调节效率与公平的权重,从而使所建的数学模型更具一般性、可行性.必须指出的是,文[1]假设工件加工时间、工期等参数都是整数,因而研究的是离散情况下的排序博弈问题.对这类离散的排序博弈问题的研究还可参见文献[4~9].文[6]和[8]讨论工件加工时间相同情况下,以合作收益函数乘积为优化目标的排序博弈问题,所不同的是,文[8]考虑以最小的最大完工时间为加工成本的排序博弈问题,给出了简洁的

收稿日期:2012-05-08.

基金项目:苏州市职业大学青年基金资助项目(2011SZDQ05).

通讯联系人:金霁,讲师,研究方向:排序论. E-mail: szjinji@126.com

公式化结论;文[6]考虑工件有工期限制的问题,给出了动态规划算法.文[4]和文[7]则考虑工件加工时间不相同情况下的排序博弈问题,分别给出了相应的算法.文[5]考虑合作双方在协商确定工件划分方案时影响力不等同的情况,证明当合作收益函数与工件的排序无关时,该问题等价于背包问题.文[9]考虑工件加工时间与开工时间有关的排序博弈问题,以最小的最大流程时间为加工成本,优化的目标为使合作收益函数乘积最大,给出了相应的定理,从而能直接确定使双方都满意的工件划分方案.

本文也讨论工件加工时间与开工时间有关,以最小的最大流程时间为加工成本的排序博弈问题,与文[9]所不同的是工件加工时间有两项构成,第一项称为工件的基本加工时间,第二项与工件的开工时间 t 有关,即第 j 个工件的加工时间 $p_j = p_0 + f(t)$;优化目标为 $\max: r_1 v_1 v_2 + r_2 \min\{v_1^2, v_2^2\}$,该优化目标函数是文[1]首先提出的.证明该问题是多项式时间可解的,并对任意给定的 (r_1, r_2) 给出了最优解(集)所在的集合.

1 问题的提出

设有工件集 $J = \{1, 2, \dots, n\}$,所有工件在时刻 $t_0 (>0)$ 之后开始加工,每个工件只需加工一次,后一个工件紧接着前一个工件加工.工件 j 的加工时间 p_j 是关于其开始加工时间 $t (t \geq t_0)$ 的函数 $p_j = p_0 + f(t)$,工件 j 的流程时间 $F_j = C_j - t_0$.现在由两人合作一起加工这批工件,假设每人有一台加工机器,每加工单位时间的工件将使第 i 人获得 b_i 个单位的收益.本文以最小的最大流程时间 $\min F_{\max}$ 作为加工成本,定义收益函数为 $u_i = u_i(X_i) = b_i \sum_{j \in X_i} p_j - \min F_{\max}^i$ ($i = 1, 2$).

第2节讨论工件加工时间 $p_j = p_0 + \alpha t$ 的情形,其中 $p_0 (>0)$ 是工件的基本加工时间, $\alpha (>0)$ 为比例系数;

第3节讨论工件加工时间 $p_j = \begin{cases} p_0 + \alpha t & t < T \\ p_0 + \alpha T & t \geq T \end{cases}$ 的情形,其中 $T (>0)$ 是一个给定的常数.无论工件的加工时间是哪种情形,解决问题的关键是要将工件集 J 划分为两个互不相交的子集 X_1 和 X_2 , $X_1 \cup X_2 = J$, $X_1 \cap X_2 = \emptyset$;集合 X_i ($i = 1, 2$)内的工件由第 i 人加工.注意到参数 p_0 、 α 和 t_0 都是常数,因此收益函数 u_i 与 X_i 内工件的加工次序无关,仅与 X_i 内工件个数有关,从而可将 X_1 和 X_2 记为 $X_1 = \{1, 2, \dots, k\}$ 和 $X_2 = \{k+1, k+2, \dots, n\}$ ($1 \leq k \leq n-1$),因此 k 就是问题的决策变量.于是,收益函数

$$u_i = u_i(k) = b_i \sum_{j \in X_i} p_j - \min F_{\max}^i = b_i \sum_{j \in X_i} p_j - F_{\max}^i = (b_i - 1) \sum_{j \in X_i} p_j,$$

合作收益函数

$$v_i = v_i(k) = u_i(k) - e_i \quad (i = 1, 2),$$

其中 (e_1, e_2) 为合作博弈论中的无协议点^[10],满足: $e_1 \geq u_1(0) = 0$, $e_2 \geq u_2(n) = 0$.

本文考虑的是离散情况下合作博弈问题(Discrete Bargaining Problem, DBP),并假设参数 p_0 、 α 、 t_0 、 T 都是正整数, e_1 、 e_2 是非负整数, $b_i \geq 2$ ($i = 1, 2$).优化目标函数为

$$\begin{aligned} P_{(r_1, r_2)} \quad \max z(k) &= r_1 v_1(k) v_2(k) + r_2 \min\{v_1^2(k), v_2^2(k)\} \\ \text{st.} \quad v_i(k) &> 0, \quad i = 1, 2, \quad 1 \leq k \leq n-1. \end{aligned}$$

其中 (r_1, r_2) 是 $\max v_1 v_2$ 与 $\max: \min\{v_1^2, v_2^2\}$ 的权重系数向量, $r_i = 0, 1, \dots$ ($i = 1, 2$).用三参数该问题记为

$$G2 | p_j = p_0 + f(t) | P_{(r_1, r_2)}. \quad (P)$$

对任意给定向量 (r_1, r_2) ,问题(P)可以在 $O(n)$ 时间内解决.事实上,如果存在某个正整数 k ($1 \leq k \leq n-1$),使合作收益函数 $v_i(k) > 0$,那么这样的正整数 k 就是问题(P)的可行解.因而,所求最优解 k^* 满足 $z(k^*) = \max\{z(k) | v_1(k) > 0, v_2(k) > 0, k \in \{1, 2, \dots, n-1\}\}$.

引理1^[7] 对任意向量 (r_1, r_2) ,问题(P)的最优解 k^* 对应的合作收益分配方案 $(v_1^*, v_2^*) = (v_1(k^*), v_2(k^*))$ 是帕累托有效的.

注意到问题(P)的目标函数是 $\max v_1(k) v_2(k)$ 与 $\max: \min\{v_1^2(k), v_2^2(k)\}$ 的线性组合,为此先考虑如下两个目标函数:

$$\begin{aligned} P_{(1,0)} \quad \max z(k) &= v_1(k) v_2(k) \\ \text{st.} \quad v_i(k) &> 0, \quad i = 1, 2, \quad 1 \leq k \leq n-1. \\ P_{(0,1)} \quad \max z(k) &= \min\{v_1^2(k), v_2^2(k)\} \\ \text{st.} \quad v_i(k) &> 0, \quad i = 1, 2, \quad 1 \leq k \leq n-1. \end{aligned}$$

2 基本加工时间相同的线性函数加工时间排序博弈问题

本节中工件 j 的加工时间为 $p_j = p_0 + \alpha t$, 注意到 X_1, X_2 内的工件都从时刻 t_0 ($t_0 > 0$) 开始加工, 所以容易计算 X_1, X_2 中最后一个工件的完工时间分别为

$$C_k = C_{k-1} + p_k = \left(\frac{p_0}{\alpha} + t_0 \right) (1 + \alpha)^k - \frac{p_0}{\alpha},$$

$$C_n = C_{n-1} + p_n = \left(\frac{p_0}{\alpha} + t_0 \right) (1 + \alpha)^{n-k} - \frac{p_0}{\alpha}.$$

因此, 收益函数为

$$u_1 = u_1(k) = (b_1 - 1)(C_k - t_0) = (b_1 - 1) \left(\frac{p_0}{\alpha} + t_0 \right) [(1 + \alpha)^k - 1],$$

$$u_2 = u_2(k) = (b_2 - 1)(C_n - t_0) = (b_2 - 1) \left(\frac{p_0}{\alpha} + t_0 \right) [(1 + \alpha)^{n-k} - 1].$$

由于 $b_i \geq 2$, 所以必有收益函数 $u_i(k) > 0$ ($i = 1, 2$).

合作收益函数为

$$v_1 = v_1(k) = u_1(k) - e_1 = (b_1 - 1) \left(\frac{p_0}{\alpha} + t_0 \right) [(1 + \alpha)^k - A], \quad (1)$$

$$v_2 = v_2(k) = u_2(k) - e_2 = (b_2 - 1) \left(\frac{p_0}{\alpha} + t_0 \right) [(1 + \alpha)^{n-k} - B]. \quad (2)$$

其中 $A = \frac{\alpha e_1}{(b_1 - 1)(p_0 + \alpha t_0)} + 1$, $B = \frac{\alpha e_2}{(b_2 - 1)(p_0 + \alpha t_0)} + 1$.

注意到 $e_i \geq 0$, $b_i > 1$ ($i = 1, 2$), $t_0 > 0$, $p_0 > 0$, 故有 $A \geq 1$, $B \geq 1$.

为方便叙述, 令 $\beta_1 = \frac{\ln A}{\ln(1 + \alpha)}$, $\beta_2 = n - \frac{\ln B}{\ln(1 + \alpha)}$.

性质 1 基本加工时间相同的线性函数加工时间排序博弈问题 $G2 | p_j = p_0 + \alpha t | P_{(r_1, r_2)}$ 有正整数解 k 的充要条件是 $\beta_l \leq \beta_r$; 且若问题有解, 则最优解 k^* 必定在闭区间 $[\beta_l, \beta_r]$ 上, 其中 $\beta_l = \lfloor \beta_1 \rfloor + 1$, $\beta_r = \lceil \beta_2 \rceil - 1$.

证明 因为两人要合作, 所以要满足 $v_i(k) > 0$ ($i = 1, 2$), 从而根据式 (1)、(2) 有 $\beta_1 < k < \beta_2$, 易证明排序博弈问题 $G2 | p_j = p_0 + \alpha t | P_{(r_1, r_2)}$ 有解的充要条件是 $\beta_l \leq \beta_r$.

由 $A \geq 1$, $B \geq 1$, $\alpha > 0$, 知 $\beta_1 \geq 0$, $\beta_2 \leq n$. 注意到 $\beta_1 < k < \beta_2$ 以及 $1 \leq k \leq n-1$, 从而有

$$0 \leq \beta_1 < n-1, 1 < \beta_2 \leq n, \beta_1 < \beta_2, n \geq 2. \quad (3)$$

因此, $1 \leq \beta_l \leq n-1$, $1 \leq \beta_r \leq n-1$. 所以只要满足 $\beta_l \leq \beta_r$, 必有 $[\beta_l, \beta_r] \subseteq [1, n-1]$, 因而最优解 k^* 必定在闭区间 $[\beta_l, \beta_r]$ 上.

由式 (1)、(2) 知

$$v_1(k) v_2(k) = (b_1 - 1)(b_2 - 1) \left(\frac{p_0}{\alpha} + t_0 \right)^2 [(1 + \alpha)^k - A] [(1 + \alpha)^{n-k} - B] =$$

$$(b_1 - 1)(b_2 - 1) \left(\frac{p_0}{\alpha} + t_0 \right)^2 [(1 + \alpha)^n + AB] - (b_1 - 1)(b_2 - 1) \left(\frac{p_0}{\alpha} + t_0 \right)^2 [A(1 + \alpha)^{n-k} + B(1 + \alpha)^k]. \quad (4)$$

当参数 b_i, e_i ($i = 1, 2$), t_0, p_0, α 以及 n 都给定时, 式 (4) 中的第 1 项是常数. 为此, 令 $\varphi(k) = A(1 + \alpha)^{n-k} + B(1 + \alpha)^k$, 只要使 $\varphi(k)$ 最小, 目标函数 $v_1(k) v_2(k)$ 就最大.

注意到 $A(1 + \alpha)^{n-k} > 0$, $B(1 + \alpha)^k > 0$, 所以根据均值不等式, 得

$$\varphi(k) = A(1 + \alpha)^{n-k} + B(1 + \alpha)^k \geq 2\sqrt{AB(1 + \alpha)^n} \quad (\text{定值}). \quad (5)$$

当且仅当 $A(1 + \alpha)^{n-k} = B(1 + \alpha)^k$ 时, 即 $k = \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2)$ 时, $\varphi(k)$ 取到最小值 $2\sqrt{AB(1 + \alpha)^n}$.

事实上, $\frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2)$ 未必是整数, 故令 $\beta = \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2)$, 且由式 (3) 知

$$\frac{1}{2} < \beta < n - \frac{1}{2}. \quad (6)$$

定理1 若排序博弈问题 $G2 | p_j = p_0 + \alpha t | P_{(1 \rho)}$ 满足性质1, 则其最优解为:

(a) 若 $\frac{1}{2} < \beta \leq 1$, 则该排序博弈问题的最优解 $k_{(1 \rho)}^* = 1$.

(b) 若 $1 < \beta < n-1$, 当 β 为整数时, 则该排序博弈问题的最优解 $k_{(1 \rho)}^* = \beta$; 否则, 若 $\varphi(\lfloor \beta \rfloor) < \varphi(\lceil \beta \rceil)$, 则该排序博弈问题的最优解 $k_{(1 \rho)}^* = \lfloor \beta \rfloor$; 若 $\varphi(\lfloor \beta \rfloor) > \varphi(\lceil \beta \rceil)$, 则该排序博弈问题的最优解 $k_{(1 \rho)}^* = \lceil \beta \rceil$; 若 $\varphi(\lfloor \beta \rfloor) = \varphi(\lceil \beta \rceil)$, 则该排序博弈问题的最优解 $k_{(1 \rho)}^* = \lfloor \beta \rfloor$ 或 $k_{(1 \rho)}^* = \lceil \beta \rceil$.

(c) 若 $n-1 \leq \beta < n - \frac{1}{2}$, 则该排序博弈问题的最优解 $k_{(1 \rho)}^* = n-1$.

证明 略, 参见文献[9].

以下考虑第2个目标函数, 即

$$P_{(0, 1)} \quad \max z(k) = \min\{v_1^2(k), v_2^2(k)\} \\ \text{st.} \quad v_i(k) > 0 \quad i=1, 2, \quad 1 \leq k \leq n-1.$$

由性质1知, 若 $\beta_l \leq \beta_r$, 则问题有解, 且最优解 $k_{(0, 1)}^*$ 必定在闭区间 $[\beta_l, \beta_r]$ 上.

令 $W = \{k_{(1 \rho)}^*, k_{(0, 1)}^*\}$, 以下定理2表明问题 $G2 | p_j = p_0 + \alpha t | P_{(r_1 r_2)}$ 的最优解必定在集合 W 内.

定理2 对任意给定的向量 (r_1, r_2) , 若排序博弈问题 $G2 | p_j = p_0 + \alpha t | P_{(r_1 r_2)}$ 满足性质1, 则其最优解 $k_{(r_1 r_2)}^* \in W$.

证明 假设在闭区间 $[\beta_l, \beta_r]$ 上存在一个正整数 $k_{(r_1 r_2)} (k_{(r_1 r_2)} \notin W)$, 使问题 $G2 | p_j = p_0 + \alpha t | P_{(r_1 r_2)}$ 的目标函数 $z(k)$ 最大, 即有

$$r_1 v_1(k_{(r_1 r_2)}) v_2(k_{(r_1 r_2)}) + r_2 \min\{v_1^2(k_{(r_1 r_2)}), v_2^2(k_{(r_1 r_2)})\} > r_1 v_1(k_{(r_1 r_2)}^*) v_2(k_{(r_1 r_2)}^*) + \\ r_2 \min\{v_1^2(k_{(r_1 r_2)}^*), v_2^2(k_{(r_1 r_2)}^*)\}. \quad (7)$$

若 $k_{(r_1 r_2)}^* = k_{(1 \rho)}^*$, 则根据定理1, 有

$$v_1(k_{(r_1 r_2)}^*) v_2(k_{(r_1 r_2)}^*) > v_1(k_{(r_1 r_2)}) v_2(k_{(r_1 r_2)}), \quad (8)$$

由式(7)、(8)知, $\max\{v_1^2(k_{(r_1 r_2)}^*), v_2^2(k_{(r_1 r_2)}^*)\} < \max\{v_1^2(k_{(r_1 r_2)}), v_2^2(k_{(r_1 r_2)})\}$, 即 $k_{(r_1 r_2)}$ 是使目标函数 $P_{(0, 1)}$ 最优的正整数. 从而 $k_{(r_1 r_2)} \in W$, 这与假设矛盾.

若 $k_{(r_1 r_2)}^* = k_{(0, 1)}^*$, 则由定理2知,

$$\max\{v_1^2(k_{(r_1 r_2)}^*), v_2^2(k_{(r_1 r_2)}^*)\} > \max\{v_1^2(k_{(r_1 r_2)}), v_2^2(k_{(r_1 r_2)})\}, \quad (9)$$

从而有 $v_1(k_{(r_1 r_2)}^*) v_2(k_{(r_1 r_2)}^*) < v_1(k_{(r_1 r_2)}) v_2(k_{(r_1 r_2)})$, 即 $k_{(r_1 r_2)}$ 是使问题 $P_{(1 \rho)}$ 最优的正整数, 所以 $k_{(r_1 r_2)} \in W$, 同样与假设矛盾.

所以, 对于给定向量 (r_1, r_2) , 问题 $P_{(r_1 r_2)}$ 的最优解 $k_{(r_1 r_2)}^*$ 必定是集合 W 中的正整数.

3 基本加工时间相同的线性分段函数加工时间排序博弈问题

本节中工件 j 的加工时间为 $p_j = \begin{cases} p_0 + \alpha t & t < T \\ p_0 + \alpha T & t \geq T \end{cases}$. 如果 X_1 和 X_2 内工件开始加工时间 $t_0 \geq T$, 此时工件 j 的

加工时间 $p_j = p_0 + \alpha T$ 是一个固定的常数, 文[8]已经对这类问题进行了研究. 若集合 X_1 和 X_2 内最后一个工件的完工时间分别为 $C_k \leq T, C_n \leq T$, 此时该问题就是第2节中讨论的情形. 因此假定 $t_0 < T$, 且考虑 X_1 、 X_2 内都有临界工件的情况. 注意到参数 p_0 、 t_0 、 α 、 T 都是常数, 所以 X_1 、 X_2 内临界工件位置相同, 不妨设 X_1 、 X_2 内第 ρ 个工件是临界工件, 其中 $2 \leq \rho \leq \min\{k-1, n-k-1\}$. 容易计算 X_1 、 X_2 中最后一个工件的完工时间分别为:

$$C_k = C_\rho + (k-\rho)(p_0 + \alpha T) = \left(\frac{p_0}{\alpha} + t_0\right)(1+\alpha)^\rho - \frac{p_0}{\alpha} + (k-\rho)(p_0 + \alpha T),$$

$$C_n = C_{k+\rho} + (n-k-\rho)(p_0 + \alpha T) = \left(\frac{p_0}{\alpha} + t_0\right)(1+\alpha)^\rho - \frac{p_0}{\alpha} + (n-k-\rho)(p_0 + \alpha T).$$

此时, 收益函数为

$$u_1(k) = u_1(k) = (b_1 - 1)(C_k - t_0) = (b_1 - 1) \left\{ \left(\frac{p_0}{\alpha} + t_0 \right) [(1 + \alpha)^\rho - 1] + (k - \rho)(p_0 + \alpha T) \right\},$$

$$u_2(k) = u_2(X_2) = (b_2 - 1)(C_n - t_0) = (b_2 - 1) \left\{ \left(\frac{p_0}{\alpha} + t_0 \right) [(1 + \alpha)^\rho - 1] + (n - k - \rho)(p_0 + \alpha T) \right\}.$$

根据假设 $b_i \geq 2$, 因而必有 $u_i(k) > 0 (i = 1, 2)$.

合作收益函数为

$$v_1 = v_1(k) = u_1(k) - e_1 = (p_0 + \alpha T)(b_1 - 1)(k - \rho + C), \quad (10)$$

$$v_2 = v_2(k) = u_2(k) - e_2 = (p_0 + \alpha T)(b_2 - 1)(n - k - \rho + D). \quad (11)$$

其中,

$$C = \frac{(p_0 + \alpha t_0) [(1 + \alpha)^\rho - 1]}{\alpha(p_0 + \alpha T)} - \frac{e_1}{(b_1 - 1)(p_0 + \alpha T)},$$

$$D = \frac{(p_0 + \alpha t_0) [(1 + \alpha)^\rho - 1]}{\alpha(p_0 + \alpha T)} - \frac{e_2}{(b_2 - 1)(p_0 + \alpha T)}.$$

因为 $v_i(k) > 0 (i = 1, 2)$, 所以

$$\theta_1 < k < \theta_2. \quad (12)$$

其中 $\theta_1 = \rho - C$, $\theta_2 = n - (\rho - D)$. 又注意到 $2 \leq \rho \leq k - 1$ 且 $2 \leq \rho \leq n - k - 1$, 所以

$$3 \leq k \leq n - 3. \quad (13)$$

且由式(13), 有

$$n \geq 6. \quad (14)$$

结合式(12)、(13), 知

$$\theta_1 < n - 3, \theta_2 > 3, \theta_1 < \theta_2. \quad (15)$$

性质 2 基本加工时间相同的线性分段函数加工时间排序博弈问题 $G2 | p_j = p_0 + \alpha t, t < T; p_j = p_0 + \alpha T, t \geq T | P_{(r_1, r_2)}$ 有正整数解的充要条件是 $\theta_l \leq \theta_r$, 其中 $\theta_l = \lfloor \theta_1 \rfloor + 1$, $\theta_r = \lceil \theta_2 \rceil - 1$.

证明 同性质 1 略.

由式(10)、(11), 得

$$v_1(k) v_2(k) = (p_0 + \alpha T)^2 (b_1 - 1)(b_2 - 1)(k - \theta_1)(\theta_2 - k). \quad (16)$$

即合作收益函数的乘积 $v_1(k) v_2(k)$ 是关于决策变量 k 的二次函数, 且开口向下. 由于其对称轴 $\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)$

未必是整数, 故令 $\theta = \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)$.

定理 3 若排序博弈问题 $G2 | p_j = p_0 + \alpha t, t < T; p_j = p_0 + \alpha T, t \geq T | P_{(1, \rho)}$ 满足性质 2, 则其最优解为:

(a) 当 $\theta \leq 3$ 时, 该排序博弈问题的最优解 $k_{(1, \rho)}^* = 3$.

(b) 当 $3 < \theta < n - 3$ 时, 若 θ 为整数, 则该排序博弈问题的最优解 $k_{(1, \rho)}^* = \theta$; 否则, 若 $\theta - \lfloor \theta \rfloor < \theta - \lceil \theta \rceil$, 则该排序博弈问题的最优解 $k_{(1, \rho)}^* = \lfloor \theta \rfloor$; 若 $\theta - \lfloor \theta \rfloor > \theta - \lceil \theta \rceil$, 则该排序博弈问题的最优解 $k_{(1, \rho)}^* = \lceil \theta \rceil$; 若 $\theta - \lfloor \theta \rfloor = \theta - \lceil \theta \rceil \neq 0$, 则该排序博弈问题的最优解 $k_{(1, \rho)}^* = \lfloor \theta \rfloor$ 或 $k_{(1, \rho)}^* = \lceil \theta \rceil$.

(c) 当 $\theta \geq n - 3$ 时, 该排序博弈问题的最优解 $k^* = n - 3$.

证明 略, 见文献[9].

令 $\lambda = \frac{(b_1 - 1)\theta_1 + (b_2 - 1)\theta_2}{b_1 + b_2 - 2}$. 以下定理 4 对工件加工时间分段的情况, 给出使目标函数

$\min\{v_1^2(k), v_2^2(k)\}$ 最大的正整数解 $k_{(0, \lambda)}^*$.

定理 4 若排序博弈问题 $G2 | p_j = p_0 + \alpha t, t < T; p_j = p_0 + \alpha T, t \geq T | P_{(0, \lambda)}$ 满足性质 2, 则其最优解为:

(a) 当 $\lambda \leq 3$ 时, 该排序博弈问题的最优解 $k_{(0, \lambda)}^* = 3$.

(b) 当 $3 < \lambda < n - 3$ 时, 若 λ 为整数, 则该排序博弈问题的最优解 $k_{(0, \lambda)}^* = \lambda$; 否则, 若 $|v_1(\lfloor \lambda \rfloor) - v_2(\lfloor \lambda \rfloor)| < |v_1(\lceil \lambda \rceil) - v_2(\lceil \lambda \rceil)|$, 则该排序博弈问题的最优解 $k_{(0, \lambda)}^* = \lfloor \lambda \rfloor$; 若 $|v_1(\lfloor \lambda \rfloor) - v_2(\lfloor \lambda \rfloor)| > |v_1(\lceil \lambda \rceil) - v_2(\lceil \lambda \rceil)|$, 则该排序博弈问题的最优解 $k_{(0, \lambda)}^* = \lceil \lambda \rceil$.

$-v_2(\lceil \lambda \rceil)$ 则该排序博弈问题的最优解 $k_{(0,1)}^* = \lceil \lambda \rceil$. 若 $|v_1(\lfloor \lambda \rfloor) - v_2(\lfloor \lambda \rfloor)| = |v_1(\lceil \lambda \rceil) - v_2(\lceil \lambda \rceil)|$ 则该排序博弈问题的最优解 $k_{(0,1)}^* = \lfloor \lambda \rfloor$ 或 $k_{(0,1)}^* = \lceil \lambda \rceil$.

(c) 当 $\lambda \geq n-3$ 时, 该排序博弈问题的最优解 $k_{(0,1)}^* = n-3$.

证明 若排序博弈问题 $G2 | p_j = p_0 + \alpha t \ t < T; p_j = p_0 + \alpha T \ t \geq T | P_{(0,1)}$ 满足性质2, 则问题有解. 令 $v_1(k) = v_2(k)$, 由式(10)、(11)解得 $k = \frac{(b_1-1)\theta_1 + (b_2-1)\theta_2}{b_1+b_2-2}$. 注意到 $\frac{(b_1-1)\theta_1 + (b_2-1)\theta_2}{b_1+b_2-2}$ 未必是整数, 令 $\lambda = \frac{(b_1-1)\theta_1 + (b_2-1)\theta_2}{b_1+b_2-2}$.

由 $\theta_1 < \theta_2$ 知 $\theta_1 < \lambda < \theta_2$, 又注意到问题的可行解是 $[3, n-3]$ 上的整数, 所以对 λ 分上述3种情况进行讨论, 结论显然成立.

定理5 对任意给定向量 (r_1, r_2) , 若排序博弈问题 $G2 | p_j = p_0 + \alpha t \ t < T; p_j = p_0 + \alpha T \ t \geq T | P_{(r_1, r_2)}$ 满足性质2, 则其最优解 $k_{(r_1, r_2)}^* \in H$, 其中 $H = \{k_{(1,0)}^*, k_{(0,1)}^*\}$.

证明 略.

4 结语

本文讨论了工件加工时间与开工时间有关且有相同基本加工时间, 即 $p_j = p_0 + f(t)$ 的两人合作(加工)排序博弈问题. 对 $f(t) = \alpha t$ 和 $f(t) = \begin{cases} \alpha t & t < T \\ \alpha T & t \geq T \end{cases}$ 两种情况进行讨论, 以最小的最大流程时间作为加工费用, 以 $r_1 v_1 + r_2 \min\{v_1^2, v_2^2\}$ 为优化目标, 分别给出了最优解(集)所在的集合. 今后可以对工件加工时间 $p_j = p_0 + \alpha_j t$ 以及带有工期限制的问题进行讨论.

[参考文献](References)

- [1] Chen Q L. A new discrete Bargaining model on job partition between two manufacturers [D]. Hongkong: The Chinese University of Hong Kong, 2006.
- [2] Nash J F. The bargaining problem [J]. *Econometrica*, 1950, 18(2): 155-162.
- [3] Nash J F. Two person cooperative games [J]. *Econometrica*, 1953, 21(1): 128-140.
- [4] Gan X B, Gu Y H, Vairaktarakis G L, et al. A scheduling problem with one producer and the bargaining counterpart with two producers [J]. *Lecture Notes in Computer Science*, 2007, 4614: 305-316.
- [5] Gu Y H, Chen Q L. Some Extended Knapsack Problems Involving Job Partition Between Two Parties [J]. *Appl Math J Chinese Univ Ser B*, 2007, 22(3): 366-370.
- [6] Gu Y H, Fan J, Tang G C, et al. Maximum latency scheduling problem on two-person cooperative games [J/OL]. *Journal of Combinatorial Optimization*, (2011-11-16) [2012-04-18]. <http://www.springerlink.com/content/6mm57855x5598kv8/fulltext.pdf>.
- [7] Gu Y H, Goh M, Chen Q L, et al. A new two-party bargaining mechanism [J/OL]. *Journal of Combinatorial Optimization*, (2011-11-02) [2012-04-18]. <http://www.springerlink.com/content/q40684034261hh62/fulltext.pdf>.
- [8] 金霁, 顾燕红, 唐国春. 最大完工时间排序的两人合作博弈 [J]. *上海第二工业大学学报*, 2011, 28(1): 14-17.
Jin Ji, Gu Yanhong, Tang Guochun. Two-person cooperative games on makespan scheduling [J]. *Journal of Shanghai Second Polytechnic University*, 2011, 28(1): 14-17. (in Chinese)
- [9] 顾燕红, 金霁, 唐国春. 加工时间可变最大流程时间排序的纳什合作博弈 [J]. *重庆师范大学学报: 自然科学版*, 2012, 29(4): 18-23.
Gu Yanhong, Jin Ji, Tang Guochun. Nash bargaining on maximum flow time scheduling with changeable processing time [J]. *Journal of Chongqing Normal University: Natural Science Edition*, 2012, 29(4): 18-23. (in Chinese)
- [10] Muthoo A. Bargaining Theory With Applications [M]. Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press, 1999.

[责任编辑: 严海琳]