

基于小波变换的非平稳信号分析与处理

张 晗 博¹, 殷 奕², 殷 奎 喜¹

(1. 南京师范大学物理科学与技术学院, 江苏 南京 210023)
(2. 南京师范大学计算机科学与技术学院, 江苏 南京 210023)

[摘要] 针对傅里叶变换在非平稳信号分析中的难点问题, 将小波变换和短时傅里叶变换应用于典型的非平稳信号, 进行时频分析研究, 所获得的特性比普通的傅里叶变换构成的频谱分析结果更清晰、准确, 表明这两种时频分析方法独有的优越性、正确性、实用性. 小波的多分辨特性更使得分析结果优于短时傅里叶变换. 在此基础上用该方法对小波时频分析方法的抗噪性能进行研究, 从小波基函数的性质和实际仿真效果两方面设定参数, 得出最优分析结果, 改善了小波时频分析方法在高频处频率不易确定的问题.

[关键词] 短时傅里叶变换, 小波变换, 非平稳信号, 时频分析

[中图分类号] TN95 [文献标志码] A [文章编号] 1672-1292(2014)01-0063-07

Non-Stationary Signals Analysis and Processing Based on Wavelet Transform

Zhang Hanbo¹, Yin Yi², Yin Kuixi¹

(1. School of Physics and Technology, Nanjing Normal University, Nanjing 210023, China)
(2. School of Computer Science and Technology, Nanjing Normal University, Nanjing 210023, China)

Abstract: For the limitation of the Fourier transform, the wavelet transform and short-time Fourier transform are applied to typical non-stationary signals. The time-frequency characteristics obtained is more clear and accurate than traditional FFT spectrum analyze, indicating that the two time-frequency analysis methods are practical and advanced. And the multi-resolution feature makes the analysis results better than short time Fourier transform. On the basis, study the anti-noise performance and choose appropriate parameter to get optimal results, improving the problem of poor frequency resolution at high frequencies of wavelet time-frequency analysis method.

Key words: STFT, WT, non-stationary, time-frequency analysis

传统信号处理理论的研究对象大多局限于平稳信号,最常用的分析和处理方法便是傅立叶(Fourier)变换. Fourier 变换及其反变换是连接信号时域和频域的桥梁,实现了信号在时域和频域的相互转换. 但 Fourier 变换是一种全局变换,无法表明信号的瞬态频率是如何随时间发生变化的. 然而,许多实际信号,如雷达、地震、生物医学信号等,都是典型的非平稳信号,它们持续时间有限,且自相关函数和功率谱密度一般都是随时间变化的. 这时仅仅通过 Fourier 变换了解信号在时域或者频域的单一全局特性是不够的,还需了解信号的频谱随时间的变化情况. 为了弥补 Fourier 变换的不足,实现非平稳信号的局部分析,半个多世纪以来,人们不断研究,发展出了一系列新的信号处理理论,联合时频分析就是其中一种针对非平稳信号的重要处理方法. 时频分析的基本思想是构造关于时间和频率的联合函数,将一维的时间信号映射到二维的时间尺度(时频)上,同时描述信号在不同时间和频率的能量密度和强度. 它克服了 Fourier 分析在时域和频域完全分离的缺陷,较准确地定位出某一时刻对应的频率分量,以及某一频率分量所对应的时间位置^[1-3].

非平稳信号分析与处理是现代信号处理的一个重要研究内容和发展方向,在通信、雷达、地震勘测和故障诊断等领域有着广泛的应用. 目前常见的时频分析方法包括:短时傅里叶变换(STFT)、Gabor 变换、小波变换、Wigner 分布等,其中最为典型的两种方法是 STFT 和 Wigner 分布. STFT 和 Gabor 变换的原理均是加窗傅

里叶变换,但受窗口大小影响,分析效果较差且易受各种噪声影响. Wigner 分布的时频分辨率较高,且具备边缘分布、有限时频支撑等许多优良特性,但其最大缺陷就是在多分量之间存在严重的交叉项,产生虚假信号,易导致无法确定真实信号,且当信噪比较低时,其分布受噪声影响更为严重,以致无法区分信号. 所以研究者常将 Wigner 分布和其他方法结合,改善分析效果,但过程较为复杂. 而小波变换从基函数出发,吸取 FFT 中三角基与 STFT 中时移窗特点,形成震荡、衰减的基函数,采用变尺度的时频原子(小波族函数)分解信号,对信号不同频段实现多尺度和变频率分辨率分析,因此小波在非平稳信号处理的理论和技术中受到众学者的广泛关注. 本文以典型非平稳信号——雷达中的频率步进(SF)信号和线性调频(LFM)信号作为研究对象,用小波对其进行时频分析,并在此基础上进行参数优化及性能分析. 实验结果表明,该方法计算复杂度低,分辨率高且无交叉项,在非平稳信号的分析与处理方面具有明显优势,有很强的实用性^[4-10].

1 小波变换与时频分析

小波变换是一种窗口可自适应调节的时频分析方法,当检测高频信息时,时间窗自动变窄,而当检测低频信号时,时间窗又自动变宽. 这使得小波变换在高频处具有较高的时间分辨率和较低的频率分辨率,在低频处具有较高的频率分辨率和较低的时间分辨率. 因此,小波变换被誉为“数学显微镜”. 也正是由于这种多分辨率的优良特性,小波变换一经提出便很快成为非平稳信号研究中的一大热点,在信号的奇异点检测、波形定位、特征提取等方面获得了良好的应用.

1.1 小波变换基本原理

设函数 $\psi(t) \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$, 且 $\hat{\psi}(0)=0$, 即 $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt=0$, 则称 $\psi(t)$ 为一个基本小波或母小波. 对母小波 $\psi(t)$ 伸缩、平移得:

$$\psi_{a,b}(t)=\frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right), a,b \in \mathbf{R}, a \neq 0. \tag{1}$$

式中,变量 a 为尺度因子,变量 b 为平移因子, $\psi_{a,b}(t)$ 为依赖于 a, b 的小波函数,简称小波. a 反映函数的尺度(或宽度), b 则检测小波函数在 t 轴的平移位置. 一般地,母小波 $\psi(t)$ 的能量集中在原点,小波函数 $\psi_{a,b}(t)$ 的能量集中在 b 点^[7].

1.2 连续小波变换

在实际信号处理中,常选用离散小波及其逆变换对信号进行分解和重构,但是在时频分析中常选用连续小波变换(CWT).

连续小波变换的表达式为:

$$WT_f(a,b)=\langle f,\psi_{a,b} \rangle=\frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) dt, \tag{2}$$

式中, b, t 均为连续变量, $\psi^*(t)$ 表示 $\psi(t)$ 的复共轭.

当基本小波满足容许条件时,其逆变换为:

$$f(t)=\iint W_f(a,b)\psi_{a,b}(t) db da. \tag{3}$$

可见,连续小波变换是将 $L^2(R)$ 空间的函数 $f(t)$ 在小波基下展开,实质上也就是将信号向一系列小波基函数上投影,用这一系列的基函数逼近信号. 小波基不唯一,且小波基中又包含尺度因子 a 和平移因子 b 两个参数,所以信号经过小波变换,便可将一个时间函数投影到时间——尺度平面上,从而同时获得信号的时间和尺度分量,实现信号的时间尺度分析.

虽然引入的尺度因子 a 与频率 f 没有直接关系,但是 a 越小,小波周期越小,对应的频率越高; a 越大,小波周期越大,对应的频率越低. 所以小波变换中的“尺度 a ”具有“频率 f ”的含义,小波变换属于一种伪时频分析方法,尺度 a 对应的实际频率可按下式计算:

$$f_a=f_c \frac{f_s}{a}, \tag{4}$$

式中, f_c 是小波的中心频率,为近似为小波的傅氏频谱的最大振幅值所对应的频率; f_s 为采样频率.

2 线性调频信号的时频特性分析

小波变换在信号的瞬态分析、故障检测、特征提取等方面有着重要的应用. 为了进一步研究小波时频分析方法的特征, 将之应用于典型的雷达信号分析, 并加入噪声研究小波时频分析方法的抗噪性.

2.1 LFM 信号的分析

假设使用幅度为 1 的单分量线性调频(LFM)信号:

$$S(t) = e^{j2\pi(f_0 t + \frac{1}{2}kt^2)}. \quad (5)$$

这种信号是雷达、声呐和地震等探测系统中常采用的一种高距离分辨率信号, 它通过在脉冲持续期间内频率的连续线性变化来获取大的信号带宽. 通常, 将雷达信号遇到作等加速运动的目标时, 反射回来得到的雷达回波信号近似看作为线性调频信号.

计算机模拟一个在 100 ns 内频率由 0 Hz 线性变化到 1 MHz, 即调频斜率 $k=1 \times 10^{10}$ 的余弦波信号, 采样频率 $f_s=10$ MHz, 采样时间为 100 ns. 原信号的波形图及变换结果如图 1 所示.

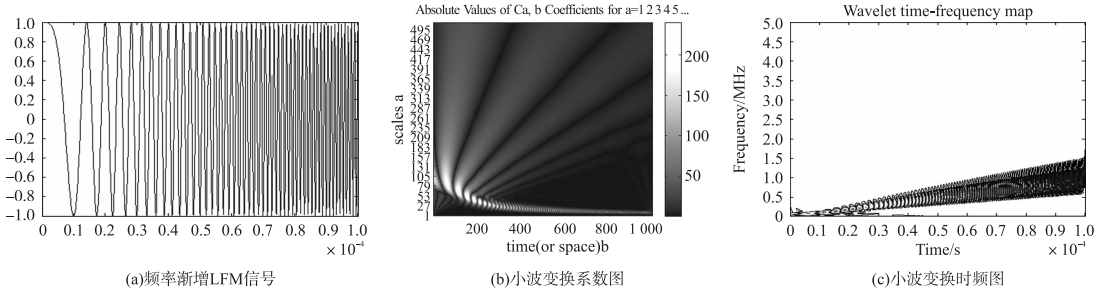


图 1 频率渐增 LFM 信号的小波变换

Fig. 1 The wavelet time-frequency analysis of LFM signal

图 1 中(a)为频率渐增的线性调频信号, (b)为小波变换系数图, (c)为小波变换时频图. 从图中可以看出, 小波变换能较清晰地区分信号所包含的频率成分. 小波变换系数图中, 亮度越高的地方对应的小波系数越大, 根据亮度的变换情况, 可以大致了解小波系数在时间-尺度平面上的分布. 而(c)中则反映了原信号频率随时间变化的情况, 且随着信号频率的递增, 小波变换在时域上的取样步长自动调节变小, 从而使得信号的高频分量获得较高的时间分辨率和较低的频率分辨率, 而低频分量具备较高的频率分辨率和较低的时间分辨率. 可见, 小波变换具备自适应性, 能根据信号的变化特性自动调整时窗和频窗大小, 从而有效地实现信号的时频分析.

2.2 SF 信号的分析

在计算连续小波变换时, 实际上也是用离散的数据进行计算的, 只是所用的缩放因子和平移参数较小. 不难想象, 对复杂信号连续小波变换存在计算量大的问题. 鉴于此, 增加步进频率信号(SF)描述. SF信号也是近年来高分辨率雷达体制的研究重点之一, 与 LFM 信号一样, 用大带宽实现距离高分辨率, 但并不是在每一次脉冲发射期间把所有的信号带宽全部发射出去, 而是将总带宽 B 离散为一系列点频, 通过 N 个脉冲分别发送, 大大减轻了信号处理机的工作负担.

将组成带宽 B 的 N 个脉冲称为一帧信号, 则步进频率雷达一帧的发射信号为:

$$x(t) = \sum_{i=0}^{N-1} p\left(\frac{t - iT_r - \frac{\tau}{2}}{\tau}\right) e^{[-j2\pi(f_0 + i\Delta f)t]}, \quad (6)$$

式中, N 为频率步进数, τ 为发射脉冲宽度, T_r 为脉冲重复周期, f_0 为载频起始频率, Δf 为频率步进间隔. 本文模拟 SF 信号由 4 段持续时间相同 ($50 \mu\text{s}$)、频率不同 (依次为 0.1 MHz、0.3 MHz、0.5 MHz、0.7 MHz) 的余弦信号组成, 如式(7)所示:

$$x(t) = \begin{cases} \cos(2\pi \cdot 1 \times 10^5 t), & 0 < t < 50; \\ \cos(2\pi \cdot 3 \times 10^5 t), & 50 < t < 100; \\ \cos(2\pi \cdot 5 \times 10^5 t), & 100 < t < 150; \\ \cos(2\pi \cdot 7 \times 10^5 t), & 150 < t < 200. \end{cases} \quad (7)$$

对其做小波变换并对之进行时频分析,其小波变换系数图及时频分析如图 2(b)、(c)所示. 图中,4 种频率成分被清楚地区分开;且频率随时间的变化规律,以及小波变换的时窗可变性——频率高时窗口窄而长,频率低时窗口宽而短,在小波时频图中都得到很好的体现.

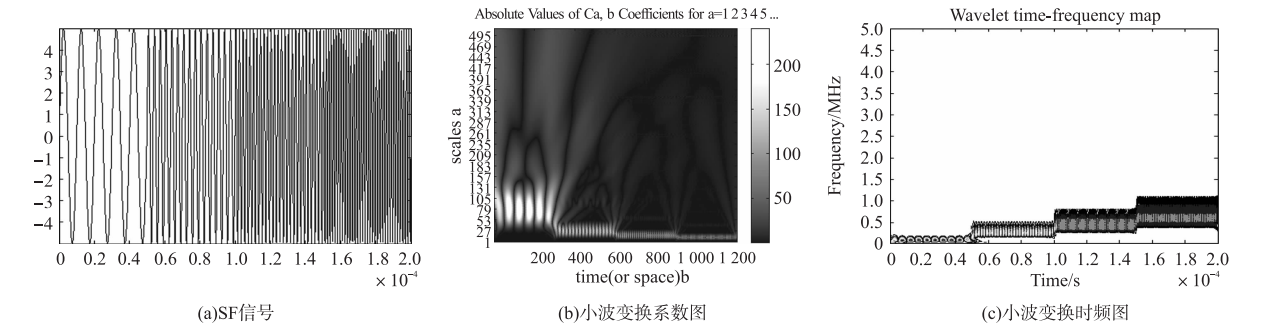


图 2 SF 信号的时频分析

Fig. 2 The time-frequency joint analysis of SF signal

2.3 参数的选择

小波分析虽然具有多分辨率特性,但也在一定程度上影响了高频处的频率分辨率,所以应选择最佳参数,改善分析结果. 常用小波基的特性如表 1 所示,根据非平稳位移、频率的突变性特点,一般选择具有紧支撑、正则性以及一定阶数消失矩的小波基,如 Db 小波基、Sym 小波基、Coif 小波基等. 其中,Db 小波基因为其在正交性、紧支撑性、支撑长度等方面都优于其他小波基,所以常被选择对回波信号进行分析. 但也有学者提出 Meyer 小波对暂态信号的检测,有着比 Db 更好的效果. 另外,相关文献也提到 Morlet 小波的时频局部性较好^[11-14]. 为了更系统地比较不同小波基的时频特性,得到最优结果,分别选取以上小波基对线性调频信号进行时频分析,变换后的效果分别如图 3 所示.

表 1 常用小波基函数的主要特征

Table 1 The main characteristics of common wavelet basis function						
小波函数	正则性	对称性	紧支性	消失矩	CWT	DWT
Haar	有	有	有	1	有	有
Morlet	无	有	无	—	有	—
Symlets	有	近似	有	N	有	有
Coiflets	有	近似	有	2N	有	有
Meyer	有	有	无	—	有	有
Daubechies	有	近似	有	N	有	有

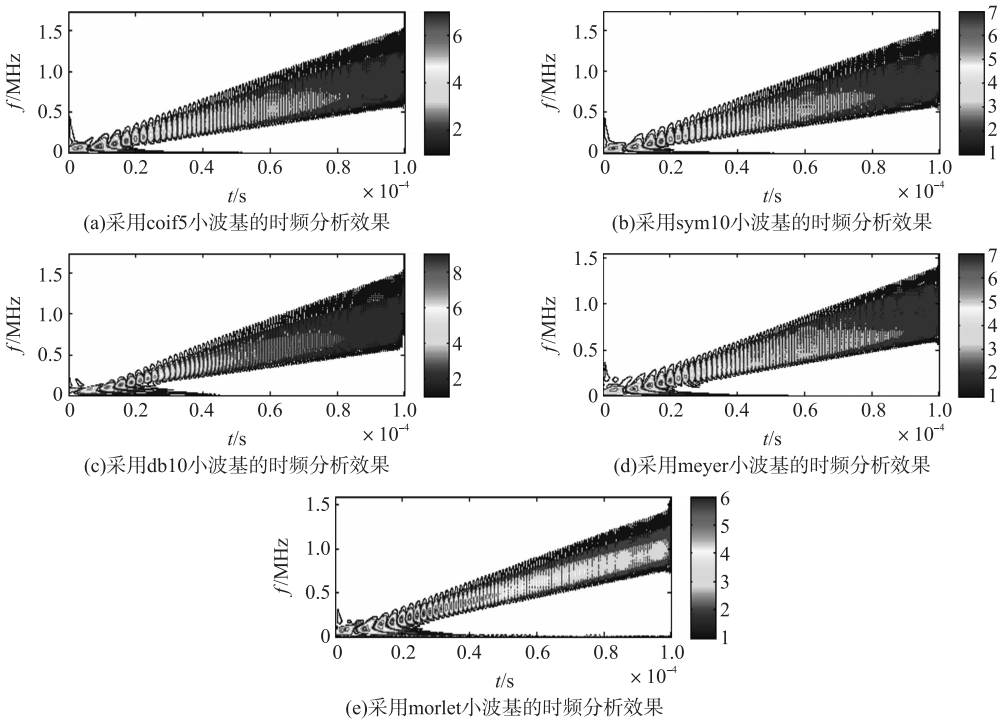


图 3 采用不同小波基对原信号小波分析的效果

Fig. 3 The time-frequency analysis result of LFM signal using different wavelet basis

不同小波基的时频特性不同,因此同一信号选用不同的小波基函数,所得的时频分析效果也就不同. 对此 LFM 信号,采用 db10 小波基虽然已经能够得到理想的时频分析效果图,但 Meyer 小波基和 Morlet 小波基的时频聚焦性相对更好些. 尤其是 Morlet 小波基,虽然不具备紧支性,但它的时频局部性较好,对信号的分辨率明显更高一些. 所以,就此频率渐增 LFM 信号而言,选择 Morlet 小波基效果是最好的,这时高频处的频率对应高能量的中心值. 可见,最优小波基的选取并不是绝对的,常需要根据信号本身的性质和分析要求及各小波的自身特性来选择基本小波的类型、尺度及位移,使变换后的小波系数更稀疏,从而更易于信号的分析与处理,并通过计算机仿真的实际效果进一步确定最佳参数,最好能具备自适应性. 因此,小波基的非唯一性使得小波变换具有独特的灵活性,尤其是对非平稳信号的分析与处理,有着明显的优势.

2.4 含噪声的信号分析

在图 1 的 chirp 信号中分别加入信噪比为 5 dB 和 0 dB 的高斯白噪声,选用 Morlet 小波进行小波分析,分析结果分别如图 4、图 5 所示. 噪声分布对系数图和信号的时频分布都有明显的影响,虽然所加噪声较为强烈,小波变换仍然能够较为准确地表达出线性跳频信号所含频率成分及其随时间的变化情况,且具备较好的时频分辨率. 可见小波变换对含噪的信号仍具有良好的聚焦特性,具有很好的抗噪性能,实用性强.

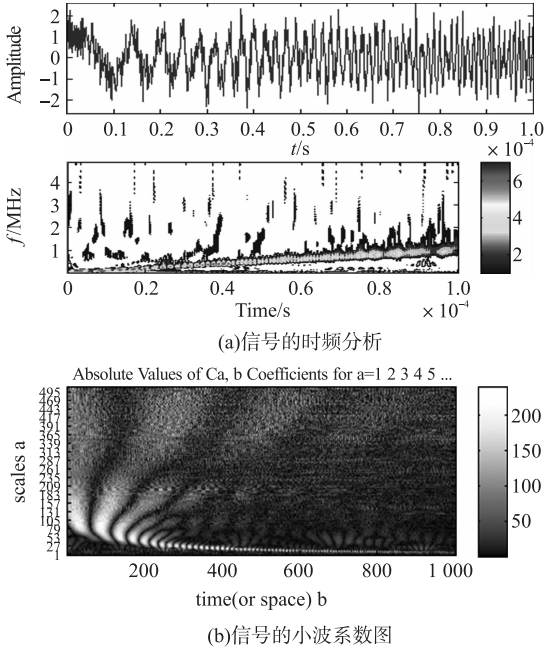


图 4 含噪 LFM 信号(5 dB)的小波变换

Fig. 4 The wavelet transform of noisy LFM signal(5 dB)

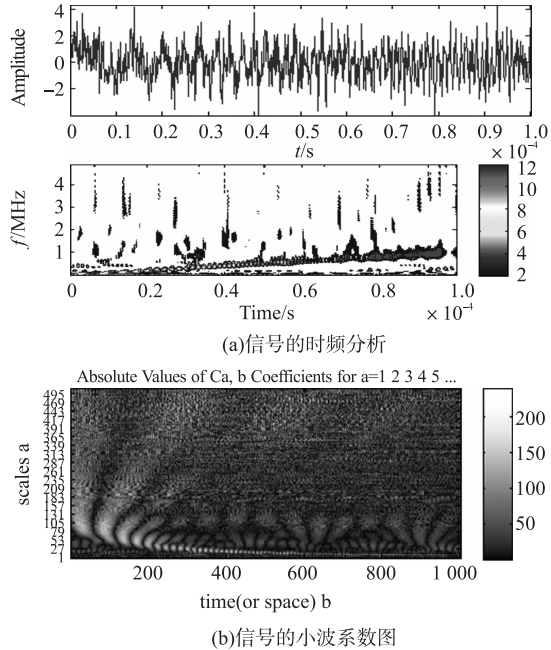


图 5 含噪 LFM 信号(0 dB)的小波变换

Fig. 5 The wavelet transform of noisy LFM signal(0 dB)

3 小波变换与传统变换方法的比较

3.1 小波变换与 Fourier 变换

选取与图 1 信号及持续时间相同、频率递减的 LFM 信号进行 Fourier 变换,结果如图 6 所示,其频谱分布和幅度完全一致. 可见,Fourier 变换对信号的表征完全在频域,反映的是信号的总体平均信息,只能说

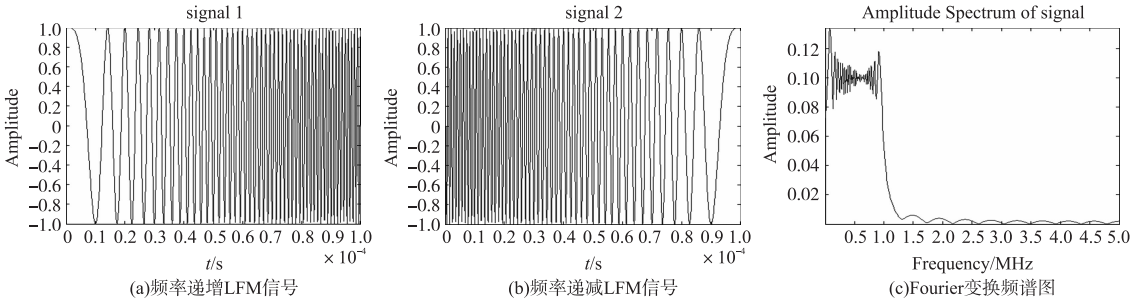


图 6 两组长短不同的线性信号及对应的相同频谱图

Fig. 6 Two different linear signals and the same corresponding amplitude spectrum

明信号的基本频率组成,却无法表达信号频率随时间的变化情况. 因此,Fourier 变换是一种全局变换,无法表达信号的时频局部特性,以 Fourier 变换为基础的传统信号分析方法也只适用于平稳信号,而小波分析则具有很好的时间定位特性,能有效反映出信号的频率和时间位置关系.

3.2 小波变换与短时傅立叶变换

短时傅立叶变换是一种最常用的时频分析方法,其定义如下:

$$s_f(\omega,b)=[f,W_{\omega,b}]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)W_{\omega,b}^*(t)dt.$$
 (8)

由定义可知,STFT 实际上是用窗函数 $W_{\omega,b}$ 给 $f(t)$ 加窗,假设窗内信号平稳,并对其进行 Fourier 变换得到信号在时间窗 $[t^*+b-\Delta_g,t^*+b+\Delta_g]$ 内的频谱信息. 然后沿时间轴移动窗函数,得到整个信号频率随时间的变化关系,即信号的时频分布. 如图 7 为一频率渐增 LFM 信号的 STFT 结果,虽然也可以反映原信号的频率随时间的变化情况,在时频分布上比 Fourier 变换有了明显的优势,但是由于窗函数同时对信号的时域和频域起到限制作用,所以一旦窗函数选定,便只能改变窗口在时频平面的位置,而改变不了其形状大小,所以变换后的时频图形状大小始终一样. 而在实际应用中往往希望在信号的高频处有较高的时间分辨率(即窗宽较小),在信号的低频处有较高的频率分辨率(即窗高较小),显然 STFT 无法兼顾两者,而小波变换的窗口具有自适应性,满足非平稳信号的分析要求.

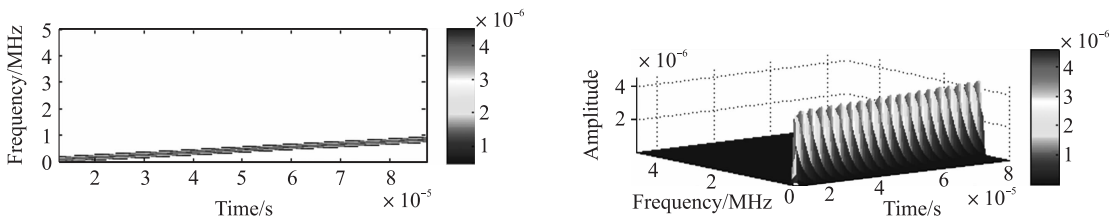


图 7 LFM 信号的 STFT 时频分析结果及等高图
Fig. 7 The LFM signal's STFT time-frequency map and three-dimensional map

4 结语

本文将小波变换应用到典型的非平稳信号中,准确地描述了信号的时频分布特征,并同时获得较佳的时间、频率分辨率,对信号具有良好的自适应性且对噪声不敏感. 这不仅解决了传统 Fourier 变换在时域和频域不能同时表达的问题,同时克服了短时 Fourier 变换窗口固定、分辨率单一的缺点. 针对小波分析在高频处频率分辨率不佳的缺点,从小波基函数的性质及实际仿真效果两方面讨论,最终选取 Morlet 小波基作为最优参数,得到最佳分析结果. 通过本文的研究表明,小波时频分析方法无交叉项,对不同时间或频率的信号具有较高的分辨能力和识别精度,且参数选择灵活,计算复杂度低,在非平稳信号的分析与处理方面具有明显的优势,具有很强的实用性. 这为小波变换在雷达信号等实际信号中的分析与处理提供了理论和实验依据,对非平稳信号研究具有一定意义.

[参考文献](References)

[1] 孙延奎. 小波变换与图像、图形处理技术[M]. 北京:清华大学出版社,2012.
Sun Yankui. Wavelet Transform and Image Processing Technology[M]. Beijing:Tsinghua University Press,2012. (in Chinese)

[2] 倪林. 小波变换与图像处理[M]. 合肥:中国科学技术大学出版社,2010.
Ni Lin. Wavelet Transform and Image Processing[M]. Hefei:China Science and Technology University Press,2010. (in Chinese)

[3] Gabor D. Theory of communication[J]. IEEE,1946,93(3):429-457.

[4] 张威斌,曹继华,石和平,等. 两种时频分析算法的分析比较[J]. 科技创新导报,2011,35(3):79-82.
Zhang Weibin, Cao Jihua, Shi Heping, et al. The comparison of two time-frequency analysis algorithm[J]. Science and Technology Innovation Herald,2011,35(3):79-82. (in Chinese)

[5] 苏峰,曲长文,简涛. 时频分布的分辨率比较[J]. 舰船电子对抗,2011,34(1):26-29.
Su Feng, Qu Changwen, Jian Tao. Comparison of the resolution of time-frequency distribution[J]. Shipboard Electronic Countermeasure,2011,34(1):26-29. (in Chinese)

- [6] 陶海印,任明秋,王新,等. 基于时频分布技术的雷达信号分析[J]. 舰船电子对抗,2011,34(4):42-45.
Tao Haiyin, Ren Mingqiu, Wang Xin, et al. Analysis of radar signal based on time-frequency distribution technology[J]. Shipboard Electronic Countermeasure, 2011, 34(4): 42-45. (in Chinese)
- [7] 徐磊,陈宪麦,徐伟昌,等. 基于小波和 Wigner-Ville 分布的轨道不平顺特征识别[J]. 中南大学学报:自然科学版, 2013, 44(8): 3 344-3 350.
Xu Lei, Chen Xianmai, Xu Weichang, et al. Explored of track irregularity's characteristic identification based on wavelet method and Wigner-Ville distribution[J]. Journal of Central South University: Science and Technology Edition, 2013, 44(8): 3 344-3 350. (in Chinese)
- [8] 王见,李金同,卢华玲,等. 采用 STFT-Wigner 变换抑制 Wigner-Ville 分布交叉项[J]. 重庆大学学报:自然科学版, 2013, 36(8): 15-36.
Wang Jian, Li Jintong, Lu Hualing, et al. Using STFT-Wigner transform to suppress the cross terms in Wigner-Ville distribution [J]. Journal of Chongqing University: Natural Science Edition, 2013, 36(8): 15-36. (in Chinese)
- [9] 王荣. 一种消除威格纳分布交叉干扰项的方法[J]. 信息技术, 2013(5): 140-143.
Wang Rong. A method to eliminate the cross-interferenceterms in the Wigner distribution[J]. Information Technology, 2013 (5): 140-143. (in Chinese)
- [10] 张国渊,卫军朝,闫秀天. 非平稳信号短时快变过程的时频分析方法及实现[J]. 机械科学与技术, 2012, 31(5): 735-734.
Zhang Guoyuan, Wei Junchao, Yan Xiutian. Short rapid process time-frequency analysis method and its implementation for the non-stationary signals[J]. Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering, 2012, 31(5): 735-734. (in Chinese)
- [11] 谭善文,秦树人,汤宝平. 小波基时频特性及其在分析突变信号中的应用[J]. 重庆大学学报:自然科学版, 2001, 24(2): 12-17.
Tan Shanwen, Qin Shuren, Tang Baoping. Time-frequency characteristic of wavelet base and its application transient signal detection[J]. Journal of Chongqing University: Natural Science Edition, 2001, 24(2): 12-17. (in Chinese)
- [12] Brito N S D, Souza B A, Pires F A C. Daubechies wavelets in quality of electrical power[C]//The 8th International Conference on Harmonics and Quality of Power(ICHQP'98). Athens: IEEE, 1998: 511-515.
- [13] Poisson O, Riou P, Meunier M. Detection and measurement of power quality disturbances using wavelet transform[J]. IEEE Trans on Power Delivery, 2001, 15(3): 1 039-1 044.
- [14] Mceachem A. Roles of intelligent systems in power quality monitoing, past present and future[C]//Power Engineering Society Summer Meeting. Vancouver, BC: IEEE, 2011: 1 103-1 105.

[责任编辑:严海琳]