

动力系统双曲对称的高效生成方法

陈 露

(南京师范大学教育科学学院,江苏 南京 210097)

[摘要] 对对称模型分形图形自动生成方法的探索一直是动力系统研究的一个重要分支. 本文提出了一种利用动力系统方法自动生成丰富的双曲图案的算法. 通过构造动力系统群下具有同变性属性的映射方程,将单位圆内的点变换到基本域内,通过动力系统群的映射,由基础域上的图形及其变换,就可得到覆盖整个区域且仅在边界处重叠的图像. 根据连续两点间的双曲距离给点附颜色,这种颜色方案不仅反映了通过特定数目迭代后各个轨迹点的收敛速率,而且由于动力系统群的同变性属性,对称点拥有相同的颜色,所以生成的图像具有对称性,增强了生成图案的艺术感染力. 使用该方法可以生成一系列双曲模型图案.

[关键词] 双曲几何,动力系统,同变性映射,颜色方案

[中图分类号] TP391 [文献标志码] A [文章编号] 1672-1292(2014)01-0076-06

Efficiently Generating Hyperbolic Symmetries of Dynamic Systems

Chen Lu

(School of Educational Sciences, Nanjing Normal University, Nanjing 210097, China)

Abstract: Exploration on automatic generation of symmetric patterns of fractals has been an important branch in the study of dynamical systems. In this paper, a new and fast algorithm is presented for automatically generating hyperbolic patterns using dynamical systems method. By employing the construction of equivariant mappings under the dynamical system groups, the method maps points in the unit circle to a fundamental region. We can get the entire space without overlapping except at the boundaries with the fundamental region and its transformed copies. Colors of the points is decided based on the hyperbolic distance between two consecutive points on the same orbit. It not only reflects the convergence rate of after a specific number of iterations, but also makes the symmetrical points having the same color and causing the picture to symmetry, thus enhancing the artistic appeal of the generated image. The method can generate a series of hyperbolic model patterns.

Key words: hyperbolic patterns, dynamical systems, equivariant mappings, color scheme

19 世纪上半叶,双曲几何的研究最先出现在 Gauss 等人的作品里^[1]. 双曲模型与欧几里得平面模型相比展现出截然不同的视觉化效果. 1958 年,荷兰图形艺术家 Escher 尝试在有限的区域展示无限的概念,创造了著名的有限圆周期绘制 I-IV^[2]. 由于双曲模型具有复杂的几何构造和数值计算,所以计算机成为了克服这些困难的合适工具. Dunham^[3]写了一些在 Poincare 模型下生成双曲模型的程序. 而 Escher 和 Dunham 都是用手工绘制这些图案的.

图形展示有利于人们理解复杂的动力行为,其中对称是作为一个基本的概念^[4,5]. 许多工作着力于研究对称模型的自动生成^[6-12],一个观点就是利用动力系统生成模型. Field 和 Golubitsky^[6]研究了对称和动力系统的共存,从而生成反角壁纸模型. Brisson^[7]等人生成了三维空间具有球面对称的彩色混沌吸引子. 以上研究的关键思想是构建同变性映射,无论是通过多项式方程还是三角方程来映射,其颜色方案都是基于在混沌吸引子作用下的像素点的访问频率. 然而,这种方法拓展到非欧几里得对称会有一些限制,因为同变性映射将不再是这些简单的形式,非欧几里得群的阶乘也将趋于无限. 这种颜色方案也将使一个对称模型重叠的部分拥有不同的颜色. Chung 等人^[8]研究了双曲模型的自动生成,用任意的方程包括多项式方

程和三角方程来构建同变性映射,使用大量的群元素来逼近一个双曲群. 颜色方案利用了流行的收敛时间方案. 利用这个方法,重叠的复本将是同种颜色. 然而,由于构造过程使用逼近,会使 Poincare 模型在靠近边界处有明显的变形. 由于计算中包含上百的群元素,想要搜索出合适的模型十分耗时. 双曲模型^[9-13]也可通过迭代函数系统方法生成,虽然算法容易实现,但唯一适合的颜色方案只有像素点的访问频率法. 文献[10,12]同样拥有无限阶的模群对称,通过研究基本域边界的连续性情况,构造非欧几里得等变换映射,不再利用其元素去逼近. 在国内,叶瑞松等提出了利用动力系统结合扩张模群自动生成彩色对称图形^[14].

本文基于文献[8,12]中的方法,提出一种新的利用动力系统自动生成二维双曲图案的快速算法. 本文首先描述双曲几何的两个流行模型和双曲群的分类;其次通过构建同变性映射,采用铺嵌技术展示双曲对称. 由于这种构建要求满足基本域边界的连续性条件,只将两三种生成群添加进计算中,因此更加快速.

1 双曲几何模型及相应双曲群

二维的双曲几何经常被模型化到一个单位圆

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}, \quad (1)$$

或上半平面

$$H^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}. \quad (2)$$

在单位圆模型中,双曲线都是正交于圆的圆弧,包括直径. 至于上半平面模型,双曲线是正交于 x 轴的半圆弧,包括垂直线. 这两个模型通过映射 $\Pi: D \rightarrow H^2$ 关联:

$$\Pi(z) = \frac{1-zi}{z-i}, \quad \Pi^{-1}(z) = \frac{zi+1}{z+i}. \quad (3)$$

双曲模型的对称是重叠或等距,保持了双曲距离且能将其变换到自身. 在单位圆模型中,由双曲映射组成的对称不是通过单位圆直径的欧几里得平面映射,也不是对应各个正交圆弧的反演映射. 这个模型的对称群是这个模型所有对称的一个集合.

双曲平面的一般铺嵌 $\{p, q\}$ 可被表示成一般双曲 p 边形围绕顶点相遇 q 次,约束条件如下^[15]:

$$(p-2)(q-2) > 4. \quad (4)$$

图1所示为铺嵌 $\{6, 4\}$, 拥有相同双曲面积的六边形展示了相等的双曲距离,表现到欧几里得距离即六边形逐步趋向单位圆边缘,双曲距离逐步递减.

群 Γ 中特定元素 g_1, g_2, \dots, g_n 若可表示成它们幂的有限乘积,即可被称为一个生成集. 这里3种基本的映射组成了双曲群. 在图2中,让 Q 和 Q_1 各自作为中心 p 边形一条边的顶点和中点,则有以下3条基本映射:(1)是过中心 p 边形弧 $\widehat{QQ_1}$ 的映射;(2)是过半径线 $\overline{OQ_1}$ 的映射;(3) C 是过 x 轴的映射.

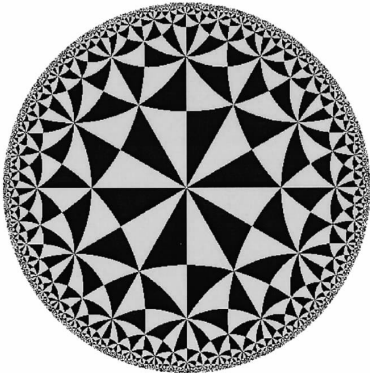


图1 一个普通的 $\{6, 4\}$ 双曲铺嵌

Fig. 1 A regular hyperbolic tessellation

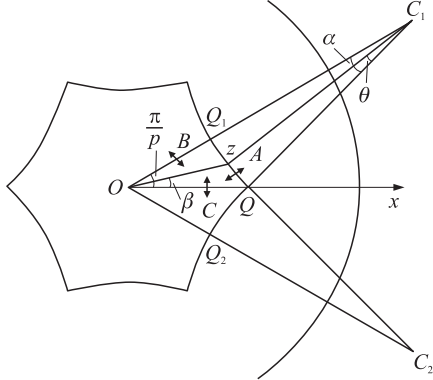


图2 3个基本映射 A, B, C 以及中心 p 边形的基础域

Fig. 2 The three basic reflections A, B, C and a fundamental region of the central p -gon

在单位圆模型中,对于 $z \in D$,映射 A, B, C 可表示为:

$$Az = \frac{te^{i(\pi/p)}\bar{z}-1}{z-te^{-i(\pi/p)}}, \quad Bz = e^{i(2\pi/p)}\bar{z}, \quad Cz = \bar{z},$$

其中,

$$t=\frac{\cosh b}{\sinh b}, \quad \cosh b=\frac{\cos(\pi/q)}{\sin(\pi/p)}. \tag{5}$$

在[12]中双曲群的分类有 3 种,即 $[p,q], [p,q]^+, [p^+,q], p,q$ 满足式(4). $[p,q]$ 表示双曲铺嵌对称群,相应于 p 边形在顶点处相遇 q 次,由下列映射生成:

$$S=BC=e^{i(2\pi/p)}, \tag{6}$$

$$T=CA, \quad Tz=\frac{te^{-i(\pi/p)}-1}{z-te^{i(\pi/p)}}. \tag{7}$$

在图 2 中, S 绕原点逆时针旋转 $2\pi/p$, T 绕顶点 Q 逆时针旋转 $2\pi/q$. $[p,q]^+$ 由 S 和 T 生成, $[p^+,q]$ 由 S 和 A 生成.

在这里不加证明地陈述一些运用到等变换映射构建的基本几何结论. 在图 2 中,既然 Q 是 T 变换下的不动点,由式(7)得到:

$$Q=TQ=\frac{te^{-i(\pi/p)}Q-1}{Q-te^{i(\pi/p)}}=t\cos\frac{\pi}{p}-\frac{\sin(\pi/q)}{\sinh b}. \tag{8}$$

让 Q_2 为中心 p 边形边的中点,即 $Q_2=\overline{Q_1}$. 令 C_1, C_2 为包含弧 $\widehat{QQ_1}$ 和 $\widehat{QQ_2}$ 的圆的圆心,则

$$C_1=te^{i(\pi/p)}, \quad C_2=te^{-i(\pi/p)}, \tag{9}$$

$$\angle QC_1Q_1=\angle QC_2Q_2=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{p}+\frac{\pi}{q}\right). \tag{10}$$

若 $z=Re^{i\beta}\widehat{QQ_1}$, 又 $\angle QC_1z=\theta$, 则:

$$Tz=Re^{-i\beta}\in\widehat{QQ_2}, \tag{11}$$

$$R=t\cos\left(\frac{\pi}{p}-\beta\right)-\sqrt{t^2\cos^2\left(\frac{\pi}{p}-\beta\right)-1}, \tag{12}$$

$$\tan\theta=\frac{t\cos\left(\frac{\pi}{p}+\frac{\pi}{q}\right)-r\cos\left(\frac{\pi}{q}+\beta\right)}{t\sin\left(\frac{\pi}{p}+\frac{\pi}{q}\right)-r\sin\left(\frac{\pi}{q}+\beta\right)}. \tag{13}$$

当 $\beta=\pi/p, z=Q_1$ 时,由式(12)可得:

$$Q_1=\left(t-\frac{1}{\sinh b}\right)e^{i(\pi/p)}.$$

包含弧 $\widehat{QQ_1}$ 的圆半径为:

$$|C_1-Q_1|=\frac{1}{\sinh b}. \tag{14}$$

2 动力系统下的颜色铺嵌

本文考虑构建动力系统,其轨迹展示了双曲群 $\Gamma=[p,q]^+$ 的对称,并讨论相应颜色铺嵌的自动生成.

2.1 动力系统的同变性

将迭代映射 F 限制在范围 D 内,即

$$z_{n+1}=F(z_n), \quad z_n\in D, \quad n=0,1,2,\cdots.$$

一系列迭代点 z_1, z_2, z_3, \cdots 就是映射 F 的轨迹,而轨迹展示对称的充要条件是:

$$F\circ\gamma=\gamma\circ F, \quad \gamma\in\Gamma. \tag{15}$$

2.2 Γ 同变性方程的构造

考虑群 Γ 下基本区域 U 上 F 的构造. 一个基本区域是一个连续集,它的变换复本覆盖整个区域且除边界没有重叠. 图 2 中群 $[p,q]^+$ 的基本区域 U 是以线段 $\overline{OQ_1}, \overline{OQ_2}$ 和弧 $\widehat{QQ_1}, \widehat{QQ_2}$ 为边界的区域. 让 V, W 作为区域 D 定义为:

$$V = \left\{ z \in D \mid -\frac{\pi}{p} \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{p} \right\}, \quad (16)$$

$$W = \left\{ z \in D \mid |z - C_i| \geq \frac{1}{\sinh b} \text{ for } i = 1, 2 \right\}. \quad (17)$$

基本区域给定为:

$$U = \{ z \in D \mid z \in V \cap W \}. \quad (18)$$

首先构造弧 $\widehat{QQ_1}$ 和 $\widehat{QQ_2}$ 上的映射 F ,让 $z(\theta)$ 为弧 $\widehat{QQ_1}$ 上的点,即有 $\angle QC_1 z = \theta$.将 $G(\theta)$ 记为 $F[z(\theta)]$,则有 $G(0) = Q, G(\alpha) = Q_1, \alpha = (\pi/2) - [(\pi/p) + (\pi/q)]$,所以 $G(\theta)$ 可由任意方程 $g(\theta)$ 表示为:

$$G(\theta) = Q + g(\theta)(Q_1 - Q), \quad 0 \leq \theta \leq \alpha. \quad (19)$$

且有如下条件:

$$g(0) = 0, \quad g(\alpha) = 1. \quad (20)$$

所以选择一个方程 $g(\theta)$ 满足式(20),则 $G(\theta)$ 就决定了弧 $\widehat{QQ_1}$ 上的映射 F .注意到弧 $\widehat{QQ_1}$ 由 T 变换到弧 $\widehat{QQ_2}$,由式(11)可知,弧 $\widehat{QQ_2}$ 上 $\bar{z} = Tz(\theta)$, $\angle QC_2 \bar{z} = \theta$.所以,弧 $\widehat{QQ_2}$ 上的点 z 可由一个负 θ 表示,即 $z(\theta) = T\bar{z}(-\theta)$, $-\alpha \leq \theta \leq 0$.利用这个参数化得到, $z(\theta) \in \widehat{QQ_1}(0 \leq \theta \leq \alpha)$ 和 $z(\theta) \in \widehat{QQ_2}(-\alpha \leq \theta \leq 0)$.所以,对于负 θ 有 $G(\theta) = F[z(\theta)] = F[T\bar{z}(-\theta)] = TG(-\theta)$.由式(19)和上述等式得

$$G(\theta) = \begin{cases} Q + g(\theta)(Q_1 - Q), & 0 \leq \theta \leq \alpha; \\ TG(-\theta), & -\alpha \leq \theta \leq 0. \end{cases} \quad (21)$$

一旦在 $0 \leq \theta \leq \alpha$ 选定 $g(\theta)$,同变性映射 F 将同时作用于弧 $\widehat{QQ_1}$ 和 $\widehat{QQ_2}$.选择

$$g(\theta) = a + b \cos\left(\frac{\pi\theta}{\alpha}\right) + c \sin\left(\frac{\pi\theta}{\alpha}\right), \quad 0 \leq \theta \leq \alpha, \quad (22)$$

将式(20)代入式(22)得到 $a = b = 1/2, c = 0$,得到

$$g(\theta) = \frac{1}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{\pi\theta}{\alpha}\right) \right], \quad 0 \leq \theta \leq \alpha.$$

接下来考虑在整个 U 上 F 的构造.令 $z = re^{i\beta}$ $\beta \geq 0 (\beta < 0)$ 为一个 U 上的点, $Q_z = Re^{i\beta}$ 为延伸半径线 \overline{Oz} 与弧 $\widehat{QQ_1}(\widehat{QQ_2})$ 的交点.而 R 值和角度 $\theta = \angle QC_1 Q_z (\theta = -\angle QC_2 Q_z)$ 可分别由式(12)和式(13)得到.所以,映射 $F: U \rightarrow D$ 可表示为

$$F(z) = G(\theta) + H(z).$$

$G(\theta)$ 已由式(21)给出,而 $H: U \rightarrow C$ 需满足下列边界条件:

$$(1) H(z) = 0, \quad z \in \widehat{QQ_1} \cup \widehat{QQ_2};$$

$$(2) e^{i(2\pi/p)} H(z) = H(\bar{z}), \quad z \in \widehat{OQ_2}.$$

为满足以上条件, H 可以是如下形式:

$$H(re^{i\beta}) = e^{i\beta} [h(Re^{i\beta}) - h(re^{i\beta})], \quad (23)$$

其中, R 已由式(12)给出.将式(12)带入到式(23),经变换可得:

$$h(re^{-i\pi/p}) = h(re^{i\pi/p}). \quad (24)$$

从式(24)可知, h 是一个以 $\frac{2\pi}{p}$ 为周期的 β 周期函数,简单选择 $h(re^{i\beta}) = a(r) + b(r) \cos(p\beta) + c(r) \cdot \sin(p\beta)$.这里, $a(r), b(r), c(r)$ 都是 $\sin\{[d_1 r + d_2 \cos(e_1 r) + d_3][d_4 + \sin(e_2 r)]\}$ 的形式,有着不同的实参数值 $d_1, d_2, d_3, d_4, e_1, e_2$.

最后,考虑基本区域 U 外 F 的构建.对于点 $z \notin U$,其遵循基本域属性,即存在 $\gamma \in \Gamma$ 和 $z' \in U$ 有 $z' = \gamma z$.由同变性得, $F(z) = \gamma^{-1} F(\gamma z) = \gamma^{-1} F(z')$,若 γ 已知,则整个区域 D 上的 F 也就确定了.对于在 U 外的点 z ,以下算法决定了 γ 和在 U 上的点 z' .当点 z 在 U 外,先通过 S 变换对点进行旋转,直到其落在式(16)定义的范围,此时 $z \in V$.若点仍在 U 外,则对点进行 T 变换,绕 Q 点旋转直到其落入式(17)定义的范围 W 内,最终图像将落入区域 U 内. γ 是所有变换的乘积,即可得到 Γ 同变性映射 F :

$$F(z)=\begin{cases} G(\theta)+H(z), & z\in U; \\ \gamma^{-1}F(\gamma z), & z\notin U,\gamma z\in U. \end{cases}$$

2.3 Γ 颜色的确定

颜色的确定考虑轨迹连续两点间的双曲距离,根据双曲距离 $\rho(z,z')$ 定义^[16]

$$\tanh\left[\frac{1}{2}\rho(z,z')\right]=\eta(z,z'),\eta(z,z')=\left|\frac{z-z'}{1-\overline{z}z'}\right|,$$

对于初始点的一个轨迹,定义 $\eta^i(z_0)$:

$$\eta^i(z_0)=\eta(F^{i-1}(z_0),F^i(z_0)).$$

由这种颜色方案生成的图像反映了通过特定数目迭代后各个轨迹点的收敛速率. 再加上方程 η 具有群 Γ 不变性,即 $\eta(z,z')=\eta(\gamma z,\gamma z')(\gamma\in\Gamma)$,故对称点 z 和 γz 拥有相同的颜色,生成的图像具有 Γ 对称.

3 实验结果与分析

3.1 实验结果

本文采用 Microsoft Visual C++ 6.0 在配置为 Pentium Dual E2160 (1.80 GHz),并装有 Microsoft Windows XP Professional 操作系统的平台上实现了相关算法. 图 3 为本文算法运行生成的图形. 在实现本方法的同时,本文也实现了[6]中所用方法,并对实现结果所用时间加以对比. 表 1 所示为对比结果.

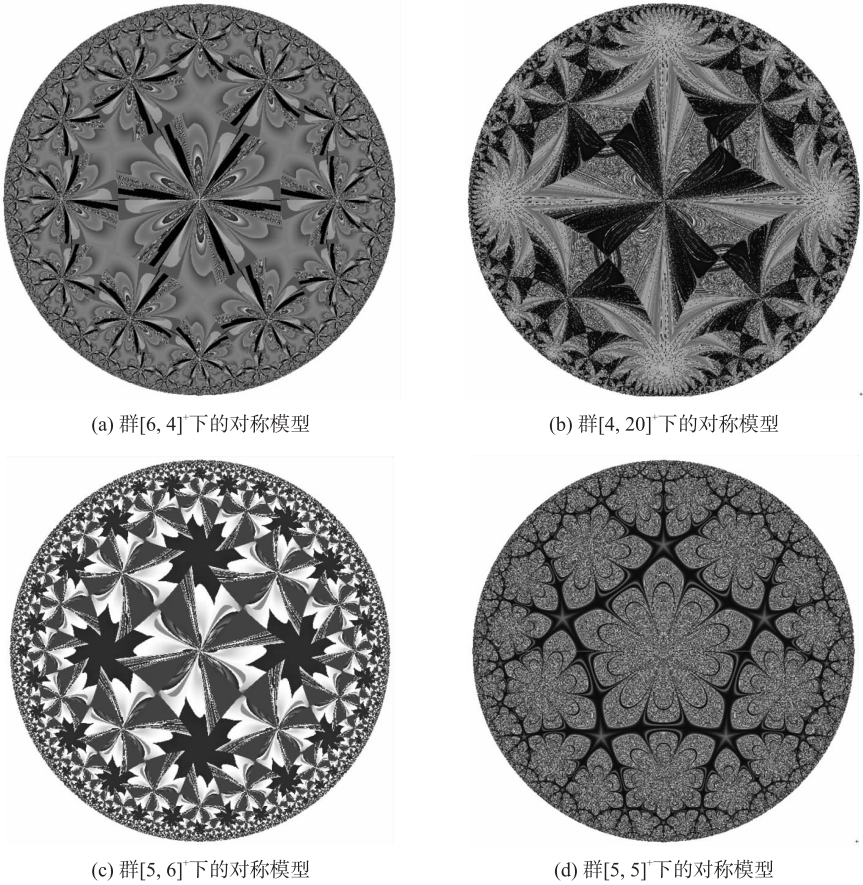


图 3 算法运行效果

Fig.3 The results of the algorithm

表 1 两种算法运行时间比较

Table 1 Comparison of the two algorithms' running time

算法	实现结果所用时间/s					平均时间
	1	2	3	4	5	
文献[6]算法	45	41	43	42	44	43
本文算法	11	10	11	12	13	12

4 结语

本文提出了利用动力系统方法自动生成丰富的双曲对称模型的一种快速新颖的算法,尽管文献[8]中描述的算法也是基于同变形映射的构建,然而计算过程中需要考虑大量群元素,因而要搜寻出一个合适的模型将变得非常耗时.本文提出的算法考虑了基本域边界的连续性情况,且计算过程中仅包括双曲群生成因子,所以改善了搜索模型所用时间,且在单位圆边缘处不会出现扭曲,同时复杂性降低.本文也描述了一个改进的收敛时间方案,虽然比依据像素点的访问频率确定颜色多了双曲距离的计算,但不影响总体生成时间,能极大地增强生成图像的艺术吸引力.由于本文是基于双曲群生成因子的同变形映射构建,该映射中函数的选取较为重要且有难度,需多次尝试来获取最好的效果.

[参考文献](References)

- [1] Trudeau R J. The Non-Euclidean Revolution[M]. Boston: Birkhauser, 1987.
- [2] Escher M C. Escher on Escher: Exploring the Infinity[M]. New York: Harry N Abrams, 1989.
- [3] Dunham D. Hyperbolic symmetry[J]. Computers and Mathematics with Applications, 1986, 12B(1/2): 139–153.
- [4] King G, Stewart I. Nonlinear Equations in the Applied Sciences[M]. New York: Academic Press, 1992: 257–315.
- [5] Chung K W, Chan H S. Symmetrical patterns from dynamics[J]. Computer Graphics Forum, 1993, 12(1): 33–40.
- [6] Field M, Golubitsky M. Symmetry in Chaos[M]. New York: Oxford University Press, 1992.
- [7] Brisson G F, Gartz K M, McCune B J. Symmetric attractors in three-dimensional space[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 1996, 7(7): 1 033–1 051.
- [8] Chung K W, Chan H S, Wang B N. Hyperbolic symmetries from dynamics[J]. Computers and Mathematics with Applications, 1996, 30(2): 33–47.
- [9] Chan H S Y, Chung K W, Wang B N. Computer generation of symmetrical patterns from dynamical systems[C]//Proceedings of the International Conference of Chinagraph. Hangzhou, 1996(96): 497–501.
- [10] Chung K W, Chan H S Y, Wang B N. Tessellation with the modular group from dynamics[J]. Computer and Graphics, 1997, 21(4): 523–534.
- [11] Carter K W, Eagles R L, Grimes S M. Chaotic attractors with discrete planar symmetry[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 1998, 9(12): 2 031–2 054.
- [12] Chung K W, Chan H S, Wang B N. Tessellation in three-dimensional hyperbolic space from dynamics and the quaternions[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2001, 12(10): 1 941–1 945.
- [13] Adcock B, Jones K C, Reiter C A. Iterated function systems with symmetry in the hyperbolic symmetry[J]. Computer and Graphics, 2000, 24(5): 791–796.
- [14] 叶瑞松, 欧阳培昌. 动力系统结合扩张模群自动生成彩色对称图形[J]. 汕头大学学报: 自然科学版, 2005, 20(4): 14–19.
Ye Ruisong, Ouyang Peichang. Automatic generation of colored symmetric patterns by dynamical systems with the extended modular group[J]. Journal of Shantou University: Natural Science Edition, 2005, 20(4): 14–19. (in Chinese)
- [15] Coxeter H S M, Moser W O J. Generators and Relations for Discrete Groups[M]. 4th ed. New York: Springer, 1980.
- [16] Beardon A F. The Geometry of Discrete Groups[M]. New York: Springer, 1983.

[责任编辑: 严海琳]