

单一驱动多响应分数阶混沌系统的完全同步

黄雯迪, 闵富红

(南京师范大学电气与自动化工程学院, 江苏 南京 210042)

[摘要] 基于复杂的分数阶异构系统同步问题, 采用完全同步控制法设计非线性控制器, 从而实现用一个新型的三维分数阶混沌系统, 同时驱动整数阶 Duffing 系统和分数阶超混沌 Lorenz 系统. 利用分数阶稳定性定理对所设计的控制器给予理论证明, 并通过数值仿真验证了方案的有效性.

[关键词] 分数阶混沌系统, 同步, 不等阶, 完全同步控制

[中图分类号] TP391.9 [文献标志码] A [文章编号] 1672-1292(2015)02-0001-08

Complete Synchronization of Single-Drive and Multiple-Response Fractional-Order Chaotic System

Huang Wendi, Min Fuhong

(School of Electrical and Automation Engineering, Nanjing Normal University, Nanjing 210042, China)

Abstract: To synchronize the complex fractional chaotic systems of different structures, the complete synchronization control method is adopted to design a nonlinear controller which is used to drive the integral-order Duffing system and fractional-order hyperchaotic Lorenz system by a new 3-D fractional-order chaotic system. Based on the fractional theory of stability, the scheme of the nonlinear controller is proved. Moreover, numerical results also show the validity of the method.

Key words: fractional-order chaotic systems, synchronization, unequal order, complete synchronization control

自 1990 年美国海军实验室的 Pecora 和 Carrol 提出了一种混沌同步方法并在电路实验中首次观察到混沌现象以来, 混沌系统的同步控制就成为非线性科学研究领域的一个热门话题^[1]. 混沌同步, 主要就是运用各种控制方法, 通过设计合适的同步控制器, 实现多个不同的混沌系统同步. 关于混沌同步的研究, 各国学者已取得相当丰富的研究成果, 提出了许多同步方法, 这些方法在研究初期广泛适用于整数阶混沌系统同步.

随着分数阶混沌系统在信息安全和信号处理的潜在应用价值越来越大, 对于分数阶混沌系统同步的研究获得了广泛的关注^[2-5]. 目前, 大多数的分数阶混沌系统同步方式是通过控制系统系数矩阵的特征值使其在一定范围内实现控制, 但由于非线性系统的系数矩阵通常是含有变量的非定常矩阵, 要想求其特征值难度较大. 文献[2]根据整数阶混沌系统的自适应同步方法, 利用单一控制器实现了分数阶混沌系统的自适应同步. 文献[3]基于线性系统的稳定判定准则, 将整数阶系统投影同步扩展到分数阶系统, 通过对分数阶 Chen 系统、分数阶 Lü 系统和分数阶类 Lorenz 系统投影同步的数值模拟, 验证了此控制方法的有效性.

以上文献中的同步方法都是针对两个同结构的分数阶混沌系统, 在实际工程应用中, 大多数的混沌系统同步存在于两个异构系统, 甚至是不同阶、不同维数的两个分数阶混沌系统, 因此, 异构混沌系统之间的同步控制必将成为研究的热点. 文献[6]在参数已知的情况下采用主动控制方法实现了两个混沌系统的同步与反同步, 并在驱动系统与相应系统参数未知的情况下, 基于 Lyapunov 稳定性理论和自适应控制方法, 给出了自适应控制器和参数自适应律, 最终通过数值模拟验证了方法的有效性. 文献[7]利用主动控

收稿日期: 2014-12-31.

基金项目: 江苏省普通高校研究生科研创新计划项目(KYLX_0722).

通讯联系人: 闵富红, 博士, 副教授, 研究方向: 非线性电路与系统. E-mail: minfuhong@njnu.edu.cn

制技术实现分数阶 Liu 混沌系统与分数阶统一混沌系统的异结构同步,方法简单,同步速度很快. 文献[8]在文献[7]的基础上研究了维数不同、分数阶阶次不相同情况下的同步问题,利用分数阶系统稳定性理论和非线性动力学理论,构造出相应的非线性控制器,实现了三维分数阶混沌系统和四维分数阶混沌系统之间的完全同步和反同步.

尽管在分数阶混沌系统的同步控制研究方面已取得了一定的成果,但关于分数阶混沌系统与整数阶混沌系统之间的同步研究还处于初步阶段. 文献[9]基于追踪思想,利用反馈控制法实现了三维分数阶 Chen 系统和三维整数阶 Lorenz 混沌系统之间的混沌同步,通过理论分析和数值模拟证明了该方法的有效性. 然而分数阶混沌系统与整数阶混沌系统之间的同步不仅仅存在于相同维数环境下,当两个系统维数不同、结构不同时,如何快速有效地实现同步,仍是一个亟待解决的问题.

基于以上情况,本文提出一种新的混沌同步形式,即利用单个分数阶混沌系统同时控制两个混沌系统. 采取完全同步控制法,令一种新型三维分数阶系统为驱动系统,响应系统分别为四维分数阶超混沌 Lorenz 系统和二维整数阶 Duffing 系统,利用分数阶稳定性理论设计出合适的非线性控制器,并应用仿真软件最终实现了 3 个异构系统的完全同步.

1 控制方法描述

1.1 完全同步控制法

本文采用的同步控制方法为完全同步控制法^[8],即假设存在如下式所示的分数阶驱动系统和响应系统:

$$\frac{d^q x}{dt^q} = f(t, x), \quad (1)$$

$$\frac{d^q y}{dt^q} = g(t, y) - u(t, x, y) \quad (0 < q \leq 1), \quad (2)$$

式中, $u(t, x, y)$ 是非线性控制器.

定义两个系统的同步误差为: $e(t) = y - x$, 则误差系统方程为:

$$\frac{d^q e}{dt^q} = \frac{d^q y}{dt^q} - \frac{d^q x}{dt^q}. \quad (3)$$

若 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0$, 则系统(1)和系统(2)被称为完全状态同步.

1.2 分数阶稳定性分析

文献[10]详细研究了分数阶线性系统的稳定性问题,给出了判断分数阶系统稳定性的充要条件.

引理 1 考虑自治系统(4)

$$\frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = Ax, \quad (4)$$

式中, $x \in \mathbf{R}^n (n \in \mathbf{N})$, $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$.

(1) 当系统(4)是渐近稳定的, 当且仅当对矩阵 A 的任意特征值 λ , $|\arg(\lambda)| > \alpha\pi/2$ 都成立;

(2) 当系统(4)是稳定的, 当且仅当对矩阵 A 的任意特征值 λ , $|\arg(\lambda)| \geq \alpha\pi/2$ 都成立.

α 阶线性系统的稳定区域如图 1 所示. 对于分数阶非线性系统, 若其在平衡点处的雅克比矩阵的所有特征值都在稳定区域内, 则该平衡点为稳定平衡点.

虽然引理 1 可用以判定分数阶线性系统的稳定性, 但由于非线性系统系数矩阵 A 中通常含有状态变量, 分数阶非线性系统不能直接采用此引理. 针对这一问题, 文献[11]将该引理进行了推广, 提

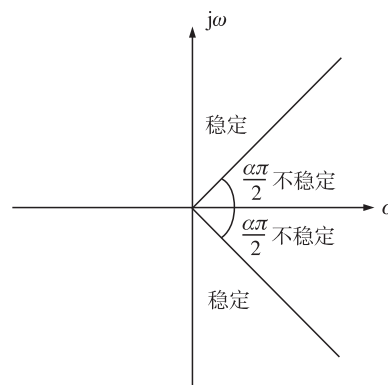


图 1 α 阶线性系统的稳定区域
Fig. 1 Stability area of the α order linear system

出了基于 Lyapunov 方程的分数阶系统稳定性判定定理.

引理 2 对于分数阶系统(4),当阶数 $\alpha < 1$ 时,若系统的系数矩阵 A 满足 Lyapunov 方程,即存在实对称正定矩阵 P ,半正定矩阵 Q 使得方程 $A^H P + PA = -Q$ 对于任意的状态变量 X 恒成立,则分数阶系统(4)渐近稳定.

文献[11]提出了该引理,并对其进行了严格的数学证明,此引理既适用于判定分数阶线性系统,也适用于判定分数阶非线性系统的稳定性.文献[8]在引理 2 的基础上提出了适用于异构分数阶混沌系统完全同步的定理 1.

定理 1 选取适合的非线性控制器,对于分数阶误差系统式(3),当 $0 < q \leq 1$ 时,若存在正定矩阵 P 使函数 $J = e^T P \frac{d^q e}{dt^q} \leq 0$ 恒成立,则分数阶误差系统式(3)的状态变量 $e = [e_1, e_2, \dots, e_n]^T$ 在系统平衡点处渐近稳定,即实现了分数阶系统的完全同步.

证明 由引理 2 可知 $A^H P + PA = -Q$ 成立,若分数阶误差系统稳定,则推出下式:

$$e^T (A^H P + PA) e = -e^T Q e. \quad (5)$$

因为矩阵 Q 为半正定矩阵,故对任意的误差状态变量 e 均可满足:

$$e^T (A^H P + PA) e = -e^T Q e \leq 0. \quad (6)$$

将 $\frac{d^q e}{dt^q} = Ae$ 代入式(6)可得:

$$\left(\frac{d^q e}{dt^q} \right)^T P e + e^T P \left(\frac{d^q e}{dt^q} \right) \leq 0. \quad (7)$$

由引理 2 可知矩阵 P 为实对称正定矩阵,故有:

$$\left(\frac{d^q e}{dt^q} \right)^T P e + e^T P \left(\frac{d^q e}{dt^q} \right) = 2e^T P \left(\frac{d^q e}{dt^q} \right) \leq 0, \quad (8)$$

即:

$$J = e^T P \left(\frac{d^q e}{dt^q} \right) \leq 0. \quad (9)$$

上述证明过程是由引理 2 推导到定理 1,由于引理 2 成立,则定理 1 成立.以下将以定理 1 为理论依据,分别对 3 个系统逐一分析,确定适合完全同步控制法的非线性控制器,并模拟同步结果.

2 单一驱动多个响应同步控制方法设计

2.1 驱动系统与响应系统介绍

本文是以一个驱动系统同时控制两个响应系统.驱动系统为一种新型的三维分数阶混沌系统,该系统具有 3 个非线性项,与分数阶 Lorenz 系统、分数阶 Chen 系统和分数阶 Lü 系统的拓扑结构不同,其数学模型如式(10)所示^[12]:

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha x_1}{dt^\alpha} = -ax_1 - 2x_2x_3^2, \\ \frac{d^\alpha x_2}{dt^\alpha} = bx_2 + 10x_1x_3, \\ \frac{d^\alpha x_3}{dt^\alpha} = -cx_3 + 5x_2^2. \end{cases} \quad (10)$$

式中, $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$ 、 $x_3(t)$ 为分数阶三维系统的状态变量, α 为分数阶阶次,取 $\alpha = 0.98$. 当取系统参数 $(a, b, c) = (28, 12, 10)$, 系统吸引子处于混沌态,如图 2 所示.

两个响应系统分别为整数阶 Duffing 系统^[13]和分数阶超混沌 Lorenz 系统^[14,15].

整数阶 Duffing 系统方程可表示为:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -ky + x - x^3 + r \cos(\omega t). \end{cases} \quad (11)$$

式中, $x(t), y(t)$ 为 Duffing 系统的状态变量. 当取系统参数 $(k, r, \omega) = (0.3, 0.4, 1.2)$ 时, 系统吸引子处于混沌态, 如图 3 所示.

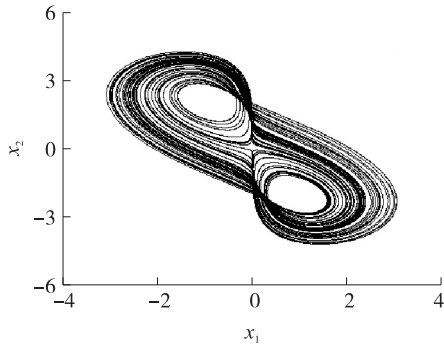


图 2 新型三维分数阶系统吸引子

Fig. 2 Chaotic attractor of new 3-D fractional-order system

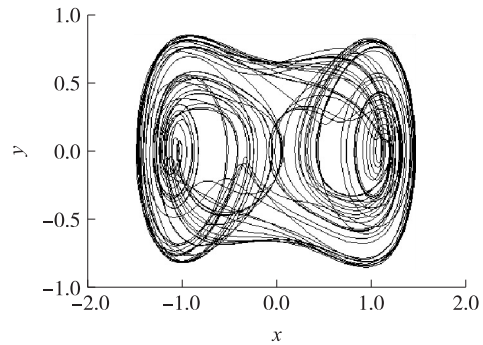


图 3 整数阶 Duffing 系统吸引子

Fig. 3 Chaotic attractor of integral-order Duffing system

分数阶超混沌 Lorenz 系统方程可表示为:

$$\begin{cases} \frac{d^\beta y_1}{dt^\beta} = a_1(y_2 - y_1) + y_4, \\ \frac{d^\beta y_2}{dt^\beta} = c_1 y_1 - y_2 - y_1 y_3, \\ \frac{d^\beta y_3}{dt^\beta} = y_1 y_2 - b_1 y_3, \\ \frac{d^\beta y_4}{dt^\beta} = -y_2 y_3 - r_1 y_4. \end{cases} \quad (12)$$

式中, $y_1(t), y_2(t), y_3(t), y_4(t)$ 为超混沌 Lorenz 系统的状态变量, β 为分数阶阶次, 取 $\beta = 0.99$. 当取系统参数 $(a_1, b_1, c_1, r_1) = \left(10, \frac{8}{3}, 28, 1\right)$ 时, 系统吸引子处于混沌态, 如图 4 所示.

2.2 控制器设计及证明

由上文可知, 当驱动系统为一个三维自治系统时, 若要同步一个二维非自治系统, 通常会先把非自治系统转化为自治系统, 然后再进行控制器的设计与证明.

将 Duffing 系统转换为自治系统, 模型中的参数与式(11)中的一一对应, 则受控的 Duffing 系统方程为:

$$\begin{cases} \frac{dz_1}{dt} = z_2 - u_1(t), \\ \frac{dz_2}{dt} = -kz_2 + z_1 - z_1^3 + r \cos z_3 - u_2(t), \\ \frac{dz_3}{dt} = \omega - u_3(t). \end{cases} \quad (13)$$

同样地, 利用驱动系统控制分数阶超混沌 Lorenz 系统的前三项, 则受控的分数阶超混沌 Lorenz 系统方程为:

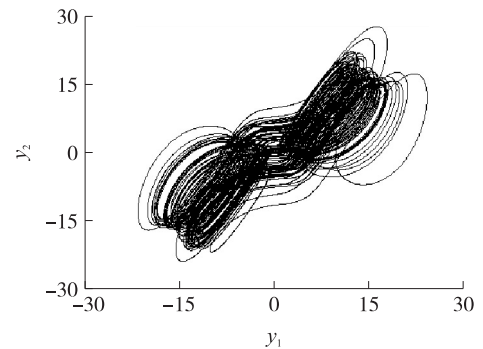


图 4 分数阶超混沌 Lorenz 系统吸引子相图

Fig. 4 Chaotic attractor of fractional-order hyperchaotic Lorenz system

$$\begin{cases} \frac{d^\beta y_1}{dt^\beta} = a_1(y_2 - y_1) + y_4 - u_4(t), \\ \frac{d^\beta y_2}{dt^\beta} = c_1 y_1 - y_2 - y_1 y_3 - u_5(t), \\ \frac{d^\beta y_3}{dt^\beta} = y_1 y_2 - b_1 y_3 - u_6(t), \\ \frac{d^\beta y_4}{dt^\beta} = -y_2 y_3 - r_1 y_4. \end{cases} \quad (14)$$

若同步控制中驱动系统与响应系统的阶数分别为 p 和 q , 且 $0 < p, q \leq 1, p \neq q$, 结合本文中的式(1)、式(2)和式(3)可以得到结论 1^[16]:

$$\frac{d^q e}{dt^q} = \frac{d^q y}{dt^q} - \frac{d^q x}{dt^q} = \frac{d^q y}{dt^q} - \frac{d^{(q-p)}}{dt^{(q-p)}} \left(\frac{d^p x}{dt^p} \right). \quad (15)$$

结合以上结论对原驱动系统等式两边同时求导可得:

$$\begin{cases} \frac{d^{0.02}}{dt^{0.02}} \left(\frac{d^{0.98} x_1}{dt^{0.98}} \right) = \frac{d^{0.02}}{dt^{0.02}} (-ax_1 - 2x_2 x_3^2) = \frac{dx_1}{dt}, \\ \frac{d^{0.02}}{dt^{0.02}} \left(\frac{d^{0.98} x_2}{dt^{0.98}} \right) = \frac{d^{0.02}}{dt^{0.02}} (bx_2 + 10x_1 x_3) = \frac{dx_2}{dt}, \\ \frac{d^{0.02}}{dt^{0.02}} \left(\frac{d^{0.98} x_3}{dt^{0.98}} \right) = \frac{d^{0.02}}{dt^{0.02}} (-cx_3 + 5x_2^2) = \frac{dx_3}{dt}. \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{cases} \frac{d^{0.01}}{dt^{0.01}} \left(\frac{d^{0.99} x_1}{dt^{0.99}} \right) = \frac{d^{0.01}}{dt^{0.01}} (-ax_1 - 2x_2 x_3^2) = \frac{d^{0.99} x_1}{dt^{0.99}}, \\ \frac{d^{0.01}}{dt^{0.01}} \left(\frac{d^{0.99} x_2}{dt^{0.99}} \right) = \frac{d^{0.01}}{dt^{0.01}} (bx_2 + 10x_1 x_3) = \frac{d^{0.99} x_2}{dt^{0.99}}, \\ \frac{d^{0.01}}{dt^{0.01}} \left(\frac{d^{0.99} x_3}{dt^{0.99}} \right) = \frac{d^{0.01}}{dt^{0.01}} (-cx_3 + 5x_2^2) = \frac{d^{0.99} x_3}{dt^{0.99}}. \end{cases} \quad (17)$$

则原先阶次不等的分数阶系统同步问题就被转化为 3 个相同阶次的异构系统同步问题.

令系统误差 $e_1 = z_1 - x_1, e_2 = z_2 - x_2, e_3 = z_3 - x_3, e_4 = y_1 - x_1, e_5 = y_2 - x_2, e_6 = y_3 - x_3$, 结合误差系统方程式(3)和式(15)可推出同步误差方程:

$$\begin{cases} \frac{de_1}{dt} = z_2 - u_1(t) - \frac{d^{0.02}}{dt^{0.02}} (-ax_1 - 2x_2 x_3^2), \\ \frac{de_2}{dt} = -kz_2 + z_1 - z_1^3 + r \cos(z_3) - u_2(t) - \frac{d^{0.02}}{dt^{0.02}} (bx_2 + 10x_1 x_3), \\ \frac{de_3}{dt} = \omega - u_3(t) - \frac{d^{0.02}}{dt^{0.02}} (-cx_3 + 5x_2^2), \\ \frac{d^{0.99} e_4}{dt^{0.99}} = a_1(y_2 - y_1) + y_4 - u_4(t) - \frac{d^{0.01}}{dt^{0.01}} (-ax_1 - 2x_2 x_3^2), \\ \frac{d^{0.99} e_5}{dt^{0.99}} = c_1 y_1 - y_2 - y_1 y_3 - u_5(t) - \frac{d^{0.01}}{dt^{0.01}} (bx_2 + 10x_1 x_3), \\ \frac{d^{0.99} e_6}{dt^{0.99}} = y_1 y_2 - b_1 y_3 - u_6(t) - \frac{d^{0.01}}{dt^{0.01}} (-cx_3 + 5x_2^2). \end{cases} \quad (18)$$

非线性同步控制器的设计可表达为:

$$\begin{cases} u_1(t) = x_2 + 2e_2 - \frac{d^{0.02}}{dt^{0.02}}(-ax_1 - 2x_2x_3^2), \\ u_2(t) = -kx_2 + x_1 - z_1^3 + r\cos(z_3) - \frac{d^{0.02}}{dt^{0.02}}(bx_2 + 10x_1x_3), \\ u_3(t) = \omega - \frac{d^{0.02}}{dt^{0.02}}(-cx_3 + 5x_2^2), \\ u_4(t) = a_1y_2 - a_1x_1 + y_4 - \frac{d^{0.01}}{dt^{0.01}}(-ax_1 - 2x_2x_3^2), \\ u_5(t) = c_1y_1 - y_1y_3 - x_2 - \frac{d^{0.01}}{dt^{0.01}}(bx_2 + 10x_1x_3), \\ u_6(t) = y_1y_2 - b_1x_3 - \frac{d^{0.01}}{dt^{0.01}}(-cx_3 + 5x_2^2). \end{cases} \quad (19)$$

则可由式(18)、式(19)得到同步误差方程:

$$\begin{cases} \frac{de_1}{dt} = -e_2, \\ \frac{de_2}{dt} = -ke_2 + e_1, \\ \frac{de_3}{dt} = 0, \\ \frac{de_4}{dt} = -a_1e_4, \\ \frac{de_5}{dt} = -e_5, \\ \frac{de_6}{dt} = -b_1e_6. \end{cases} \quad (20)$$

根据定理 1 构造 J 函数式可得:

$$J = \mathbf{e}^T \mathbf{P} \left(\frac{d^q \mathbf{e}}{dt^q} \right) = [e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6] \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left[\frac{de_1}{dt}, \frac{de_2}{dt}, \frac{de_3}{dt}, \frac{de_4}{dt}, \frac{de_5}{dt}, \frac{de_6}{dt} \right] =$$

$$-5e_1e_2 - 5ke_2^2 + 5e_1e_2 - a_1e_4^2 - e_5^2 - b_1e_6^2 \leq 0,$$

则可证明存在一个正定矩阵 \mathbf{P} 使函数 $J \leq 0$ 恒成立,且由于分数阶误差系统(式(20))的平衡点为(0,0,0,0,0,0),故同步误差 $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$ 随着时间渐近趋于零. 综上所述,在非线形控制器(式(19))的作用下,新型三维分数阶系统(式(10))和整数阶 Duffing 系统(式(11))、分数阶超混沌 Lorenz 系统(式(12))在对应的时间序列可以达到完全同步.

3 数值仿真

采用 Matlab2013a 仿真软件对方案进行数值模拟,驱动系统与响应系统方程的参数取值与上文中的式(10)、式(11)和式(12)对应一致. 选取驱动系统初值为: $(x_1, x_2, x_3) = (0.1, 0.1, 0.1)$, 响应系统初值为: $(z_1, z_2, z_3) = (0.1, 0.2, 0)$, $(y_1, y_2, y_3, y_4) = (1, 1, 1, 1)$, 并控制仿真时间为 20 s, 设置步长为 0.005, 最终得到同步误差曲线如图 5 所示, 图中分别表征的是同步误差 $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$ 随时间的增大逐渐趋于零的过程. 由此可知, 在控制器的作用下, 可以实现 3 个不同维数且不同阶次的分数阶混沌系统同步.

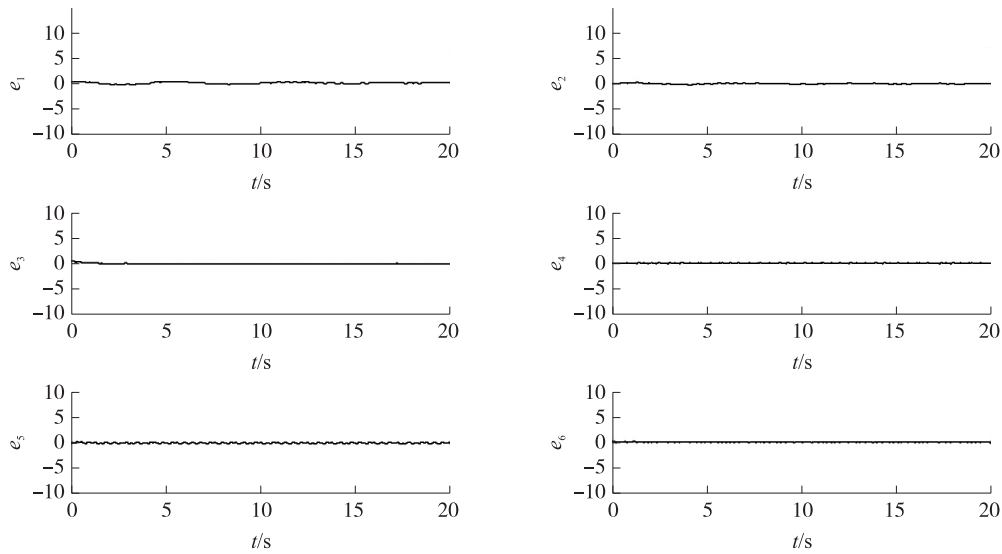
图5 同步误差 $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$ 随时间的演化图

Fig. 5 Evolutionary process of the synchronization error over time

4 结语

本文在传统分数阶混沌系统同步的基础上,提出一种新的同步形式,即以—个新型分数阶混沌系统,同时驱动整数阶 Duffing 系统和分数阶超混沌 Lorenz 系统,且各系统的维数、分数阶阶次均不相同.根据分数阶微分相关理论,将阶次不等的分数阶系统转化为相同阶次的分数阶异构系统,并以分数阶稳定性定理为依据设计合适的非线性控制器,最终实现了 3 个系统的完全同步.文中所提到的同步形式可继续延伸至更多个系统的完全同步,这为分数阶异构系统的网络化同步提供了理论依据.

[参考文献] (References)

- [1] Pecora L M, Carroll T L. Synchronization in Chaotic systems[J]. Physical Review Letters, 1990, 64(8): 821–824.
- [2] 张若洵, 杨洋, 杨世平, 等. 分数阶统一混沌系统的自适应同步[J]. 物理学报, 2009, 58(9): 6 039–6 044.
Zhang Ruoxun, Yang Yang, Yang Shiping, et al. Adaptive synchronization of the fractional-order unified chaotic system[J]. Acta Physica Sinica, 2009, 58(9): 6 039–6 044. (in Chinese)
- [3] 王兴元, 贺毅杰. 分数阶统一混沌系统的投影同步[J]. 物理学报, 2008, 57(3): 1 485–1 492.
Wang Xingyuan, He Yijie. Projective synchronization of the fractional order unified system[J]. Acta Physica Sinica, 2008, 57(3): 1 485–1 492. (in Chinese)
- [4] 胡建兵, 韩焱, 赵灵冬. 基于 Lyapunov 方程的分数阶混沌系统同步[J]. 物理学报, 2008, 57(12): 7 522–7 525.
Hu Jianbing, Han Yan, Zhao Lingdong. Synchronizing fractional chaotic systems based on Lyapunov equation[J]. Acta Physica Sinica, 2008, 57(12): 7 522–7 525. (in Chinese)
- [5] 曹鹤飞, 张若洵. 基于滑模控制的分数阶混沌系统的自适应同步[J]. 物理学报, 2011, 60(5): 121–125.
Cao Hefei, Zhang Ruoxun. Adaptive synchronization of fractional-order chaotic system via sliding mode control[J]. Acta Physica Sinica, 2011, 60(5): 121–125. (in Chinese)
- [6] 蔡娜, 井元伟, 张嗣瀛, 等. 不同结构混沌系统的自适应同步和反同步[J]. 物理学报, 2009, 58(2): 802–813.
Cai Na, Jing Yuanwei, Zhang Siying, et al. Adaptive synchronization and anti-synchronization of two different chaotic systems[J]. Acta Physica Sinica, 2009, 58(2): 802–813. (in Chinese)
- [7] 张成芬, 高金峰, 徐磊, 等. 分数阶 Liu 系统与分数阶统一系统中的混沌现象及二者的异结构同步[J]. 物理学报, 2007, 56(9): 5 124–5 130.
Zhang Chengfen, Gao Jinfeng, Xu Lei, et al. Chaos in fractional-order Liu system and a fractional-order unified system and the synchronization between them[J]. Acta Physica Sinica, 2007, 56(9): 5 124–5 130. (in Chinese)
- [8] 董俊, 张广军, 姚宏, 等. 分数阶异结构超混沌系统完全同步与反相同步控制[J]. 动力学与控制学报, 2014(2): 119–126.

- Dong Jun, Zhang Guangjun, Yao Hong, et al. The control of complete synchronization and anti-phase synchronization for fractional-order hyper-chaotic systems of different structures[J]. Journal of Dynamics and Control, 2014(2): 119–126. (in Chinese)
- [9] 周平, 邝菲. 分数阶混沌系统与整数阶混沌系统之间的同步[J]. 物理学报, 2010, 59(10): 6 851–6 858.
Zhou Ping, Kuang Fei. Synchronization between fractional-order chaotic system and chaotic system of integer orders[J]. Acta Physica Sinica, 2010, 59(10): 6 851–6 858. (in Chinese)
- [10] Matignon D. Stability result on fractional differential equations with applications to control processing[C]//Proceedings of the IEEE SMC Conference. Lille, France, 1996: 963–968.
- [11] 胡建兵, 韩焱, 赵灵冬. 一种新的分数阶系统稳定理论及在 back-stepping 方法同步分数阶混沌系统中的应用[J]. 物理学报, 2009, 58(4): 2 235–2 238.
Hu Jianbing, Han Yan, Zhao Lingdong. A novel stability theorem for fractional systems and its applying in synchronizing fractional chaotic system based on back-stepping approach[J]. Acta Physica Sinica, 2009, 58(4): 2 235–2 238. (in Chinese)
- [12] 邵书义. 新型混沌系统的动力学分析、同步控制及应用[D]. 南京: 南京师范大学电气与自动化工程学院, 2014.
Shao Shuyi. The dynamics analysis, synchronization, control and application of novel chaotic system[D]. Nanjing: School of Electrical and Automation Engineering, Nanjing Normal University, 2014. (in Chinese)
- [13] 王永生, 肖子才, 孙瑾, 等. Duffing 混沌系统电路仿真研究[J]. 电路与系统学报, 2008, 13(1): 131–135.
Wang Yongsheng, Xiao Zicai, Sun Jin, et al. Simulation and experimental study on the chaos circuit of Duffing oscillator[J]. Journal of Circuits and Systems, 2008, 13(1): 131–135.
- [14] 王兴元, 王明军. 超混沌 Lorenz 系统[J]. 物理学报, 2007, 56(9): 136–141.
Wang Xingyuan, Wang Mingjun. Hyperchaotic Lorenz system[J]. Acta Physica Sinica, 2007, 56(9): 136–141. (in Chinese)
- [15] 魏赞. 分数阶超混沌 Lorenz 系统及同步研究[J]. 太原科技大学学报, 2010, 31(1): 72–75.
Wei Yun. Fractional order hyperchaotic Lorenz system and its synchronization[J]. Journal of Taiyuan University of Science and Technology, 2010, 31(1): 72–75. (in Chinese)
- [16] 郝建红, 宾虹, 张潇葵, 等. 不确定混沌系统的同步控制及参数辨识[J]. 河北师范大学学报: 自然科学版, 2014, 38(1): 30–35.
Hao Jianhong, Bin Hong, Zhang Xiaoyan, et al. Synchronization of uncertain chaotic systems and parameters identification[J]. Journal of Hebei Normal University: Natural Science Edition, 2014, 38(1): 30–35.

[责任编辑: 严海琳]