

# 弹性胶辊与刚性辊轮滚动接触区域的数值分析

王 冰<sup>1</sup>, 杨继全<sup>2</sup>

(1. 南京师范大学分析测试中心, 江苏 南京 210023)

(2. 南京师范大学江苏省三维打印装备与制造重点实验室, 江苏 南京 210042)

**[摘要]** 研究纸张输送系统中弹性胶辊与刚性辊轮接触区域的应力应变分布. 建立弹性胶辊与刚性辊轮接触的数学模型, 应用配点法对问题进行求解, 得到正压力和弹性层厚度对接触区域应力应变分布的影响. 正压力与接触区域的应力成正比, 弹性层厚度与接触区域的应力成反比. 为纸张输送胶辊的设计提供参考.

**[关键词]** 纸张输送, 滚动接触, 数值分析

**[中图分类号]** TP39 **[文献标志码]** A **[文章编号]** 1672-1292(2015)03-0070-05

## Numerical Analysis of Rolling Contact Zone Between Rubber Roller and Rigid Roller

Wang Bing<sup>1</sup>, Yang Jiquan<sup>2</sup>

(1. Center for Analysis and Testing, Nanjing Normal University, Nanjing 210023, China)

(2. Jiangsu Key Laboratory of 3D Printing Equipment and Manufacturing, Nanjing Normal University, Nanjing 210042, China)

**Abstract:** To study the stress and deformation distribution of the contact zone between the rubber roller and rigid roller, a mathematical model of rolling contact between the rubber roller and rigid roller is built. The model is derived from the paper feed unit. The collocation method is applied to obtain the solution of the dual series equations obtaining based on elasticity theory. Effects of normal load and rubber thickness are observed through the numerical examples. The observations show that the stress of the contact zone is directly proportional to normal load, and inversely proportional to rubber thickness. It is available for improving the efficiency of rubber roller.

**Key words:** paper feed, rolling contact, numerical analysis

纸张输送系统的主要作用是实现存放纸张的单张分离,并自动有序地传送至印刷、复印等工位. 为保证印刷、复印图像的准确,在纸张进入转印前,需要对纸张位置进行校准. 纸张输送系统包括多组对位辊组成的定位单元,定位辊轮对可以简化成具有弹性层覆盖的胶辊与刚性滚轮的滚动接触. 本文将在准静态、无摩擦的条件下,应用级数形式的应力函数对纸张输送系统中胶辊与刚性辊轮的接触问题进行分析,得到胶辊与刚性辊轮接触时接触区域的应力分布,以及正压力与接触区域面积和渗透量之间的关系. 胶辊是印刷、复印设备中的主要耗材,磨损严重就会发生卡纸或印刷、复印质量下降等问题,通过对胶辊与刚性辊轮接触区域的分析,可以优化设计,为制定胶辊标准提供依据,延长胶辊的使用寿命.

## 1 胶辊与刚性滚轮的接触模型

在解决圆柱体滚动接触问题中,通常使用笛卡尔坐标系下的半空间方程,为方便分析和后续计算,本文建立的模型将在圆柱坐标系下进行推导计算. 建立胶辊与刚性辊轮的接触模型,接触模型的计算推导基于图1所示的胶辊变形分析图,其中,  $R_i$  为胶辊的刚性内核半径,  $R_o$  为胶辊半径,  $\theta_o$  为接触区域边界点  $\theta$  的绝对值.

收稿日期: 2015-03-27.

基金项目: 国家自然科学基金(61273243)、江苏省高校自然科学基金(15KJD460004)、江苏省三维打印装备与制造重点实验室项目(BM2013006).

通讯联系人: 王冰, 博士, 实验师, 研究方向: 机电一体化. E-mail: wangbing-5@163.com

模型满足以下3个条件:

- (1)  $R_i < R_o$ ;
- (2)  $R_o < R$ ;
- (3)  $R_o\theta_0$  与其他量相比非常小.

在接触区域为二维线弹性无摩擦情况下,建立级数形式的应力函数,由应力函数和边界条件推导出应力分量和位移分量.应用无网格数值分析方法求解,得到接触区域的应力分布,进而得到应变、正压力以及渗透量等参数值.

## 2 胶辊与刚性辊轮接触区域的力学特性

### 2.1 基本方程

在圆柱坐标系下,应力分量与应力分布函数的关系可表示为:

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2}, \\ \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}, \\ \tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right). \end{cases} \quad (1)$$

在圆柱坐标系下,各向同性弹性材料位移和应力的关系可表示为:

$$\begin{cases} E \frac{\partial u}{\partial r} = \kappa \sigma_r - \beta \sigma_\theta, \\ E \left( \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) = \kappa \sigma_\theta - \beta \sigma_r, \\ E \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) = 2(1 + \mu) \tau_{r\theta}. \end{cases} \quad (2)$$

式中,  $E$  为杨氏模量;  $\mu$  为泊松比; 系数  $\kappa$  和  $\beta$  与泊松比相关, 在平面应变问题中,  $\kappa = 1$ ,  $\beta = \mu$ . 假设弹性胶辊在其轴向方向没有变形, 研究的问题为平面应变问题.

设边界条件为: 当  $r = R_i$  时,  $v = u = 0$ . 当  $r = R_o$  时,

$$\tau_{r\theta} = 0, \quad \begin{cases} \sigma_r = 0, & |\theta| > \theta_0; \\ u = g(\theta), & |\theta| < \theta_0. \end{cases} \quad (3)$$

当胶辊与刚性辊轮接触, 接触区域的半径位移可由  $\theta_0$  的二阶近似表示为:

$$g(\theta) = u_0 + \frac{1}{2}(R_o + R)\theta^2, \quad (4)$$

式中,  $u_0$  为中心线上接触点的初始位移.

### 2.2 问题分析

胶辊与刚性辊轮的接触区域是对称的, 故所求位移是单值的, 由逆解法建立应力函数<sup>[1]</sup>:

$$\begin{aligned} \Phi = & a_0 \ln r + \frac{1}{2}b_0 r^2 + (b_1 r^3 + c_1 r^{-1} + d_1 r \ln r) \cos \theta + \\ & \sum_{n=2}^{\infty} (a_n r^n + b_n r^{n+2} + c_n r^{-n} + d_n r^{-n+2}) \cos n\theta + \frac{1}{2}d_1 r \sin \theta. \end{aligned} \quad (5)$$

由图1胶辊接触变形图可以得出边界条件为:

$$\begin{cases} v = u = 0, & r = R_i; \\ \tau_{r\theta} = 0, & \begin{cases} \sigma_r = 0, & |\theta| > \theta_0, \\ u = g(\theta), & |\theta| < \theta_0, \end{cases} r = R_o. \end{cases} \quad (6)$$

当胶辊与半径为  $R$  的刚性辊轮接触时, 接触区域的半径位移可由  $\theta$  的二阶函数近似表示为:

$$g(\theta) = u_0 + \frac{1}{2} \left( R_o + \frac{R_o^2}{R} \right) \theta^2. \quad (7)$$

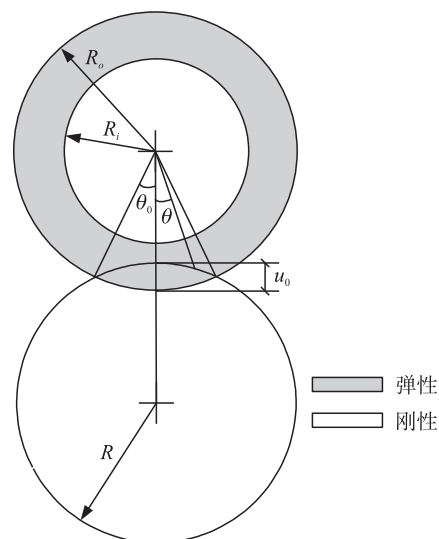


图1 胶辊接触变形图

Fig.1 Diagram of roller contact deformation

边界条件中的径向应力和切向应力用傅里叶级数形式表达为双级数方程,将其转化为普通级数方程可得:

$$\sum_{m=0}^{\infty} h_m F_m(\theta) = -\bar{g}'(\theta), \quad |\theta| < \theta_0. \quad (8)$$

式中,

$$\begin{aligned} F_0(\theta) &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n} [\cos n(\theta_0 - \theta) - \cos n(\theta_0 + \theta)], \\ F_m(\theta) &= \frac{(-1)^{m+1}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\alpha_n}{M^2 - n^2} [\cos n(\theta_0 - \theta) - \cos n(\theta_0 + \theta)], \\ M &= \frac{m\pi}{\theta_0}. \end{aligned} \quad (9)$$

式(9)中,  $F_0(\theta)$  和  $F_m(\theta)$  的收敛速度十分缓慢. 为克服此问题, 对式(9)进行计算方法的优化, 加速其收敛速度, 序列  $\alpha_n$  收敛于非零常数  $\alpha$ , 利用  $\alpha_n$  的收敛性将式(9)优化<sup>[2]</sup>.

通过以上分析可知, 只要对得到的边界条件(式(8))求解  $h_m$ , 即可得到模型问题的应力函数和接触区域的应力分布以及这些量与压力、渗透量之间的关系.

### 3 求解

分别应用施密特正交化方法和自适应无网格配点法对问题进行求解, 并将结果同 Anasys 仿真结果进行比较, 从而得出自适应无网格方法的优势.

数值计算过程是基于  $\theta_0$  已知的条件下, 而在实际模型中已知量是无量纲的渗入量  $\bar{u}_0$  和无量纲的正压力  $\bar{P}$ , 应用 Hertz 理论通过逆解法求得  $\theta_0$  值<sup>[3]</sup>, 即:

$$\theta_0 \approx \frac{a}{R_0} = \sqrt{\frac{\bar{P} R_0}{\pi E}}. \quad (10)$$

使用施密特正交化方法求解需要大量的数值积分和复杂的数值运算, 而使用自适应无网格配点法将大大减少数值积分和数值运算. 将  $\theta_0$  平分成分  $M$  区间, 即

$$\theta = \theta_i = \frac{i\theta_0}{M}. \quad (11)$$

将得到的  $\theta_i$  代入式(8), 得到  $M$  个线性方程, 即可求出  $M$  个  $h_m$  值.  $M$  越大, 计算区间划分得越密. 应用基于应变能梯度的自适应方法来选取合适的  $M$  值, 可使数值计算结果达到满意的精度.

图2所示为无网格配点法与施密特正交化方法以及 ANSYS 软件计算在  $\theta_0 = 0.05$ ,  $\bar{R}_i = 7/11$ ,  $m=40$ ,  $n=900$ ,  $\mu=0.5$  条件下接触区域的应力分布计算结果. 无网格配点法相对于施密特正交化方法具有简单、精度高的优点.

### 4 接触区域力学特性影响因素

#### 4.1 辊轮弹性层厚度对接触区域应力分布的影响

辊轮弹性层的厚度对胶辊与刚性辊轮接触区域的应力分布影响很大. 本文通过改变辊轮弹性层的厚度  $\bar{R}_i$ , 来研究胶辊与刚性辊轮接触区域的应力分布的变化.

图3所示为在  $\theta_0 = 0.05$ ,  $m=40$ ,  $n=900$ ,  $\mu=0.5$  条件下弹性胶辊弹性层的厚度分别为  $\bar{R}_i = 7/11$ 、 $\bar{R}_i = 8/11$ 、

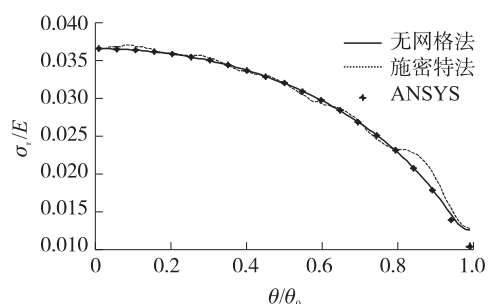


图2 无网格配点法与施密特方法以及 Anasys 软件的计算结果  
Fig.2 Results of Meshless and Schmidt method and Anasys

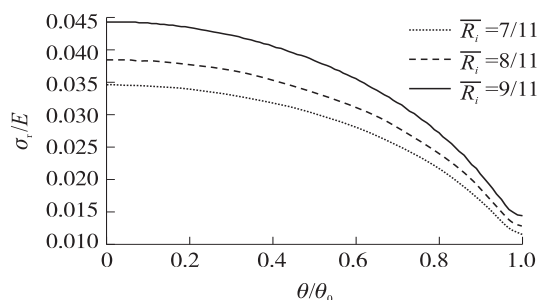


图3 不同辊轮弹性胶辊层厚度下接触区域的应力分布  
Fig.3 Contact stress for roller with different thickness of covering layer

$\bar{R}_i = 9/11$  时接触区域的应力分布.  $\bar{R}_i = 7/11$ 、 $\bar{R}_i = 8/11$ 、 $\bar{R}_i = 9/11$  为复印机中最常用的典型弹性胶辊,其直径为 22 mm,覆盖弹性层厚度为 2 mm~4 mm. 由图 3 可知,在相同正压力  $P$  的条件下,随着弹性胶辊弹性层厚度的增加,接触区域的应力减小.

#### 4.2 辊轮正压力对接触区域应力分布的影响

辊轮的正压力对胶辊与刚性辊轮接触区域的应力分布会产生影响. 由式(10)可知正压力  $P$  与接触区域边界点  $\theta_0$  的关系. 为计算方便及结果直观,直接计算在不同接触区域边界点  $\theta_0$  时接触区域的应力分布. 图 4 所示为在  $\bar{R}_i = 7/11$ ,  $m=40$ ,  $n=900$ ,  $\mu=0.5$  条件下不同接触区域边界点  $\theta_0$  时接触区域的应力分布. 由图 4 可知,在弹性胶辊弹性层厚度  $\bar{R}_i$  一定的条件下,随着正压力  $P$  的增加,接触区域边界点  $\theta$  的绝对值  $\theta_0$  增加,即接触区域变大,接触区域的应力相对增加.

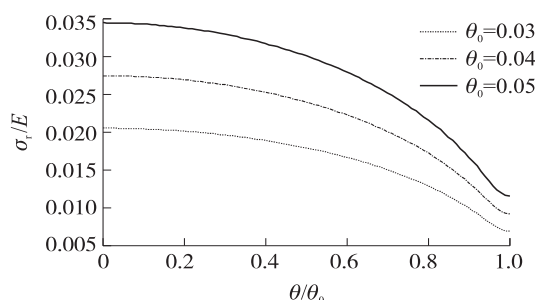


图 4 不同接触区域边界值  $\theta_0$  接触区域的应力分布

Fig.4 Contact stress for different  $\theta_0$

#### 4.3 辊轮弹性层厚度和正压力对胶辊变形的影响

为计算方便以及结果直观,直接计算不同接触区域边界点  $\theta_0$  代替计算不同正压力  $P$  对胶辊变形的影响. 图 5 所示为在  $m=40$ ,  $n=900$ ,  $\mu=0.5$  条件下不同弹性胶辊弹性层厚度  $\bar{R}_i$  以及不同接触区域边界点  $\theta_0$  情况下接触原点渗入量  $u_0$  的变化,其中弹性胶辊弹性层的厚度分别为  $\bar{R}_i = 7/11$ 、 $\bar{R}_i = 8/11$ 、 $\bar{R}_i = 9/11$ ,接触区域边界点  $\theta_0$  取值为 0~0.1<sup>[4]</sup>.

由图 5 可知,胶辊的变形量取决于  $u_0$  和  $\theta_0$  的值. 通过几何推导可得  $u_0$  与  $\theta_0$  的关系为:

$$u_0 = \frac{1}{2} \theta_0^2. \quad (12)$$

从图 5 可知,随着弹性胶辊弹性层厚度  $\bar{R}_i$  的增加,接触原点的渗入量  $u_0$  相对增大. 另一方面,随着接触区域边界点值  $\theta_0$  的增大,接触原点的渗入量  $u_0$  也相对增大,同时随着弹性胶辊弹性层厚度的增加,接触原点的渗入量  $u_0$  越偏离模型的几何值. 这是由于弹性胶辊弹性层在边界处的凸起变形引起的<sup>[5,6]</sup>,图 6 中胶辊变形的实线轮廓即为胶辊弹性层凸起的真实情况.

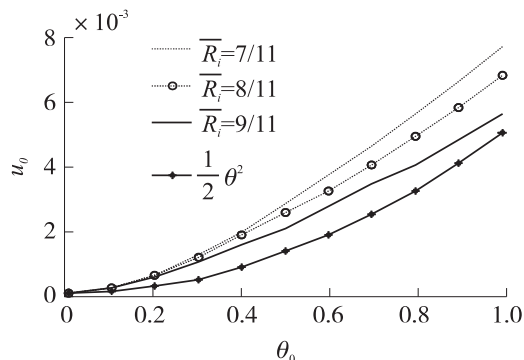


图 5 不同边界值  $\theta_0$  和弹性层厚度  $\bar{R}_i$  下接触原点的渗入量  $u_0$

Fig.5 Indentation under different  $\theta_0$  and  $\bar{R}_i$

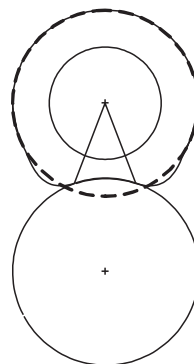


图 6 胶辊弹性层变形示意图

Fig.6 Deformation of rubber covering layer

## 5 结语

纸张在胶辊夹持下的力学特性是纸张进给的关键因素. 通过对辊轮对接触区域力学特性的研究,得知:弹性辊轮对接触区域的应力与弹性胶辊弹性层厚度成反比;弹性辊轮对接触区域的应力与正压力成正比. 辊轮弹性层厚度和正压力对胶辊变形产生影响,在复印机纸张进给设计中应考虑胶辊弹性层厚度和正压力对纸张进给的影响.

#### [参考文献](References)

- [1] Timoshenko S P, Goodier J N. 弹性理论[M]. 3版. 北京:清华大学出版社,2004.

- Timoshenko S P, Goodier J N. Theory of Elasticity[M]. 3rd ed. Beijing: Tsinghua University Press, 2004. (in Chinese)
- [2] Gradshteyn I S, Ryzhik I M. Table of Integrals, Series and Products [M]. 6th ed. New York: Academic Press, 1996. (in Chinese)
- [3] Kalker J J. 三维弹性体的滚动接触[M]. 李自立, 译. 成都: 西南交通大学出版社, 1993  
Kalker J J. Three-Dimensional Elastic Bodies in Rolling Contact [M]. Li Zili, translated. Chengdu: Southwest Jiaotong University Press, 1993. (in Chinese)
- [4] 王玥. 送纸胶辊用橡胶材料的开发[J]. 世界橡胶工业, 2006, 33(12): 24-28.  
Wang Yue. The development of rubber material in paper feeding[J]. World Rubber Industry, 2006, 33(12): 24-28. (in Chinese)
- [5] 钱进, 刘浩, 徐红春. 超声波双张控制器: 中国, ZL200720046355.X[P]. 2008-08-27  
Qian Jin, Liu Hao, Xu Chunhong. Ultrasonic double sheet control: China, ZL200720046355.X[P]. 2008-08-27. (in Chinese)
- [6] 宋钊. 纸板厚度方向的力学模型建立[J]. 包装工程, 2014, 35(3): 52-55.  
Song Zhao. Establishment of mechanical model in the thickness direction of paperboard materials [J]. Package Engineering, 2014, 35(3): 52-55. (in Chinese)

[责任编辑: 严海琳]

(上接第69页)

- Information Engineering, Zhengzhou University, 2013. (in Chinese)
- [6] 罗健桦, 刘益萍, 肖绵合. 基于CSS技术实时定位系统设计[J]. 科技信息, 2014(3): 5-6.  
Luo Jianping, Liu Yiping, Xiao Mianhe. Real time location system design based on CSS technology [J]. Science & Technology Information, 2014(3): 5-6.
- [7] 李林. 智能停车场系统的设计与实现[D]. 大连: 大连理工大学电子信息与电气工程学部, 2009.  
Li Lin. The design and implementation of intelligent parking system [D]. Dalian: Faculty of Electronic Information and Electrical Engineering, Dalian University of Technology, 2009. (in Chinese)
- [8] Nanopan. Nanopan5375 module technical specifications [EB/OL]. [2015-04-30]. <http://www.nanotron.com>.
- [9] D'Souza Ivor, Ma Wei, Notobartolo Cindy. Real-time location systems for hospital emergency response [J]. IT Professional Magazine, 2011, 132: 37-43.
- [10] 熊志广, 石为人, 许磊, 等. 基于加权处理的三边测量定位算法[J]. 计算机工程与应用, 2010, 22: 99-102.  
Xiong Zhiguang, Shi Weiren, Xu Lei, et al. Trilateration localization algorithm based on weighted disposal [J]. Computer Engineering & Applications, 2010, 22: 99-102.

[责任编辑: 严海琳]