

小波技术对LMS算法的提高与分析

王占龙

(中国电子科技集团公司第二十研究所, 陕西 西安 715608)

[摘要] 变步长LMS(Least Mean Square)算法在同时兼顾快速收敛与降低稳态失调误差的问题上做出了很多改进,但仍有较大的提升空间.本文利用小波技术对变步长LMS算法提出改进.小波技术具有数学“显微镜”功能,步长因子的变化速度可以通过拉伸窗口来实时调整.本文将失调误差与收敛速度之间的比值做为小波窗口调整参数,根据两者之间的相对变化实时调整步长因子的变化速度,可实时准确地调整收敛速度,更好地兼顾快速收敛与降低稳态失调误差问题.仿真证明本文提出的算法比现有技术具有更高的收敛速度和更低的稳态失调误差.

[关键词] 小波变换,信号处理,稳态失调误差,变步长LMS算法

[中图分类号] TN911.7 **[文献标志码]** A **[文章编号]** 1672-1292(2016)03-0063-06

The Improvement and Analysis of Wavelet Transform to LMS Algorithm

Wang Zhanlong

(The 20th Institution of Chinese Electronical Technology Company, Xi'an 715608, China)

Abstract: Although Variable Step-Size LMS algorithm has made some perfection in the compromise between the quick convergence and low steady-state misadjustment error, there will be a large space of improvement. The wavelet transformation of LMS algorithm is presented. Because the technology of wavelet has the function of “mathematics's microscope”, the variable speed of step-size is adjusted by pulling the wavelet's window. The steady-state misadjustment error to the convergence speed ratio is regarded as the window's parameter. So the variable speed of step-size is adjusted timely by the relative variation of the two elements, then the convergence speed is adjusted timely and precisely the compromise between the quick convergence and low steady-state misadjustment error is better solved. The simulations verify that the wavelet transformation of LMS algorithm possesses better convergence speed and lower steady-state misadjustment error.

Key words: wavelet transform, signal processing, steady-state misadjustment error, variable step-size LMS algorithm

随着信息技术的发展,很多领域对信号特征提取和噪声等干扰消除的要求日益增强,其中,对信号进行实时地自适应处理变得尤为重要. LMS算法是在维纳-霍夫方程基础上提出的一种自适应信号处理算法,能够实现滤波、平滑和预测等处理^[1]. 由于LMS算法计算简单、易于实现,已被广泛应用于通信噪声控制、信道均衡和有源干扰对消及雷达信号中的杂波消除等方面.

不过,常规的LMS算法中步长因子恒定,即定步长LMS(Fixed Step-Size LMS, FXSSLMS)算法^[2],不能够同时满足快速收敛和小稳态失调误差的要求.为解决此问题,本文提出利用小波技术对步长因子进行重构,使其能够同时兼顾收敛速度与稳态失调误差,做到当稳态失调误差小时收敛速度尽快,当稳态失调误差大时收敛速度及时调整变小.

1 定步长LMS算法基本原理及其性能分析

1.1 LMS算法基本原理

LMS算法计算简单、易于实现,在自适应滤波、参数估计和干扰消除方面都有广泛应用,其模型如图1所示^[3],数学表达式为:

$$y(n) = w^H(n) \cdot x(n), \quad (1)$$

$$e(n) = \hat{y}(n) - y(n) = \hat{\mathbf{w}}^H \cdot \mathbf{x}(n) - \mathbf{w}^H(n) \cdot \mathbf{x}(n) + \varepsilon(n), \quad (2)$$

$$\mathbf{w}(n) = \mathbf{w}(n-1) + \mu e^*(n-1) \mathbf{x}(n-1), \quad (3)$$

式中, $\mathbf{x}(n)$ 表示参考信号向量, 即 $\mathbf{x}(n) = [x(n) \ x(n+1) \ \cdots \ x(n-N+1)]^T$; $\varepsilon(n)$ 为外部噪声; $\hat{y}(n)$ 为 $\mathbf{x}(n)$ 经未知滤波器 $\hat{\mathbf{w}}$ 后与噪声的叠加信号; $y(n)$ 为算法递推过程的滤波输出; $e(n)$ 为输出的估计误差; $\mathbf{w}(n)$ 为算法的滤波加权系数向量, 即 $\mathbf{w}(n) = [w_0(n) \ w_1(n) \ \cdots \ w_{N-1}(n)]^T$; μ 为算法中关键的步长因子(其大小直接影响了算法的稳定性和收敛性)。

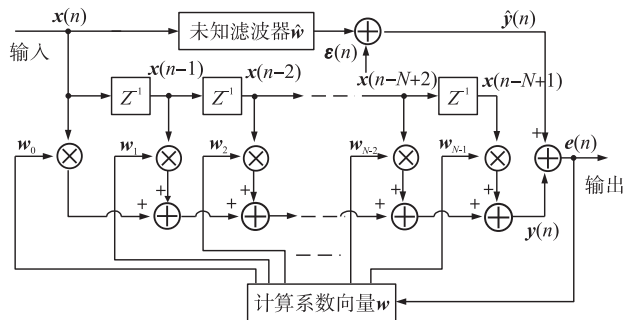


图1 LMS算法模型

Fig.1 Model of LMS algorithm

1.2 LMS算法的收敛性和稳态失调误差

由于LMS算法是递推求解的过程, 故分析其稳态失调误差及收敛性能是必不可少的, 是改进算法的基础。根据式(3)所示的加权系数计算过程可知, 输入参考信号向量 $\mathbf{x}(n)$ 、估计误差 $e(n)$ 均具有随机性, 而步长因子 μ 由算法本身设定, 是影响LMS算法收敛速度和稳态失调误差的关键。

文献[3]中对LMS算法的性能进行了详细的理论分析。由于输入信号自相关矩阵的特征值 λ_i 、未知滤波系数 \hat{w}_i 和算法加权滤波系数 $w_i(0)$ 为定值 ($0 \leq i \leq N-1$), 算法的均方误差只与步长因子 μ 和迭代次数 n 相关。推导得出LMS算法收敛的充分条件是:

$$\begin{aligned} 0 < \mu < 2/\lambda_{\max}, \\ \lambda_{\max} &= \{\lambda_j | \max(\lambda_j), \ j = 0, 1, \dots, N-1\}. \end{aligned} \quad (4)$$

在 μ 一定的情况下, LMS算法收敛所需迭代次数为:

$$n_r = \frac{\ln(r)}{2 \ln(1 - \mu \lambda_{\min})}, \quad (5)$$

式中, λ_{\min} 是所有特征值中的最小值, r 为设定的收敛门限值, 满足 $r \ll 1$ 。

另外, 若LMS算法收敛, 则在 $n \rightarrow \infty$ 时, 算法的均方误差(即最小均方误差, MSE)为

$$E\{|e(\infty)|^2\} = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\mu \lambda_j \sigma_\varepsilon^2}{2 - \mu \lambda_j} + \sigma_\varepsilon^2, \quad (6)$$

式中, σ_ε^2 为噪声 $\varepsilon(n)$ 功率, 是不可消除的, 故定义LMS算法的稳态失调误差 ξ 和失调比 η 分别为:

$$\xi = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\mu \lambda_j \sigma_\varepsilon^2}{2 - \mu \lambda_j} + \sigma_\varepsilon^2, \quad (7)$$

$$\eta = \frac{\xi}{\sigma_\varepsilon^2} = \sum_{j=0}^{N-1} \left[\frac{2}{2 - \mu \lambda_j} - 1 \right]. \quad (8)$$

由式(4)–(7)可知, LMS算法在满足收敛条件 r 时所需的迭代次数 n_r 随步长因子 μ 的增大(满足收敛条件)而减少, 但在 $n \rightarrow \infty$ 时稳态失调误差 ξ 会随 μ 的增大而增大。因此, 在输入信号向量 $\mathbf{x}(n)$ 和噪声信号 $\varepsilon(n)$ 确定的情况下, μ 是提高LMS算法收敛速度和降低其稳态失调误差的关键^[4]。

2 迭代变步长LMS算法

为解决固定步长因子存在的缺陷, 即无法同时兼顾快速收敛和低稳态失调误差^[5], 目前已有多种迭代步

式中, $\psi(t)$ 采用高斯一阶导数小波基, 即 $\psi(t) = -te^{-\frac{t^2}{2}}$. 因为仿真采用在时间 t 上抽样, 所以 $\mu(n)$ 经小波变换后可得式(15).

为了更准确实时地根据收敛速度与失调误差变化情况调整步长因子 $\mu(n)$, 将小波窗口尺度因子 a 设置为失调误差与收敛速度之比, 即:

$$a = \frac{\xi}{\mu}. \quad (16)$$

将式(9)中 $\mu(n)$ 、式(10)中 $p(n)$ 带入后, 式(15)最终可变为:

$$WT_{\mu}(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} -n\alpha \left[e^{\frac{\left(\frac{n-b}{a}\right)^2}{2}} - \frac{(m+k)e^{\frac{\left(\frac{n-b}{a}\right)^2}{2}}}{m+k \exp\left[\beta(|e(n-1)e(n)| + 0.01|e(n)|)\right]} \right], \quad (17)$$

当 b 取值为 0, 这就是迭代变步长因子小波变换后的最终结果.

4.2 LMS 算法小波变换的收敛因子分析与估计

常用的 LMS 算法的收敛因子为:

$$\rho(n) = (1 - \mu(i)\lambda)^{2n}. \quad (18)$$

小波变换后的步长因子为:

$$WT(\mu) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{i=0}^{\infty} -i \cdot \mu(i) e^{-\left(\frac{i-b}{a}\right)^2/2}. \quad (19)$$

式中, $i \cdot e^{-\left(\frac{i-b}{a}\right)^2/2} = \frac{i}{e^{\left(\frac{i-b}{a}\right)^2/2}}$; 当 $i \rightarrow \infty$ 时, 由于分子分母均趋于无穷大, 分别求导后, 分子为 1, 分母趋于无穷大, 因而有:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} WT(\mu) = 0. \quad (20)$$

此外,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{1 - \mu(i)} \right) = 0, \quad (21)$$

当 $i \rightarrow \infty$ 时, 以上两式取值均很小, 很接近, 即:

$$WT(\mu) \approx 1 - \frac{1}{1 - \mu(i)}. \quad (22)$$

所以,

$$1 - \mu(i) = \frac{1}{1 - WT(\mu)}. \quad (23)$$

收敛因子 $\rho(n)$ 经小波变换后变为:

$$\rho_{WT}(n) = (1 - \lambda WT(\mu))^{-2n}, \quad \lambda = \lambda_{\max} = 1. \quad (24)$$

5 仿真实证

本文在高斯白噪声干扰下进行仿真, 相应结果取 100 次独立仿真的平均值. 以 TVSSLMS 为例: 设置输入信号 $x(n)$ 为幅值为 1, 角频率 0.5π 的正弦函数, 干扰 $e(n)$ 为零均值高斯白噪声, 方差为 1, 抽样点数为 1 024. 其中, 当信噪比 $SNR=3$ dB 时, $\alpha=0.02$, $\beta=1\ 000$, $k=200$, $m=2\ 000$.

对 TVSSLMS 的收敛因子进行仿真比对, 结果如图 2 所示.

对 TVSSLMS 的稳态失调误差进行仿真比对, 结果如图 3 所示.

另外, 将 IVSS 技术的收敛因子与稳态失调误差进行仿真, 分别如图 4、图 5 所示, 信号与噪声环境不变, 将其与 TVSS 小波变换后的仿真结果进行对比. 在 IVSS 的步长因子式(11)、收敛因子式(12)中: $\lambda_{\max} = 1$, $\mu = 0.1/\lambda_{\max}$, $\mu_{\max} = 8\mu$, $\mu_{\min} = 0.5\mu$, $k = 220$, $m = 0$, $\lambda = 0.5$. 由此可见, IVSS 收敛因子不及 TVSS 小波变换后的收敛因子收敛快, IVSS 的稳态失调误差大于 TVSS 小波变换后的稳态失调误差.

由图 2、图 3 可见,在 SNR(3 dB)的白噪声背景下,经小波变换后的 TVSSLMS 算法收敛速度和稳态失调误差性能均优于 TVSSLMS 算法,经小波处理后的 TVSSLMS 算法收敛速度比原先明显加快.更为明显的是,稳态失调误差平均降低了 5 dB 以上,最小稳态失调误差比原先降低了 13 dB 左右.

由图 4、图 5 可见,在信号与噪声不变的环境下,小波变换后的 TVSSLMS 算法收敛速度和稳态失调误差性能均优于目前最先进的 IVSSLMS 算法.

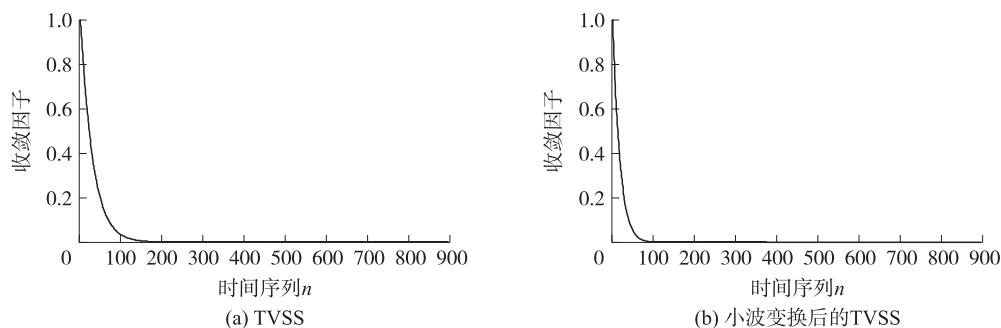


图2 收敛因子对比

Fig.2 Comparison of convergence factor

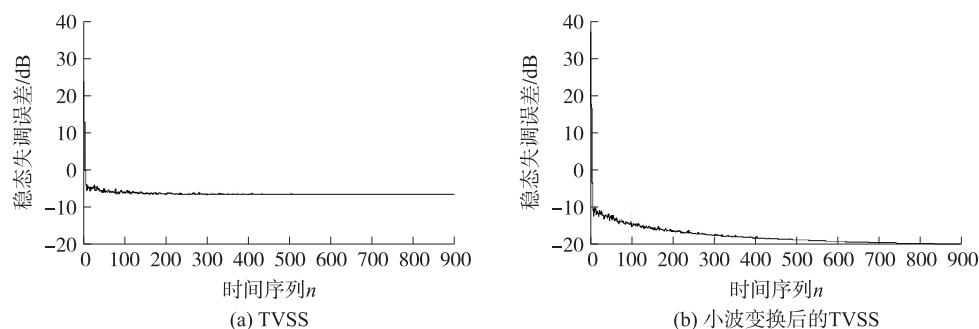


图3 稳态失调误差对比

Fig.3 Comparison of steady-state misadjustment error

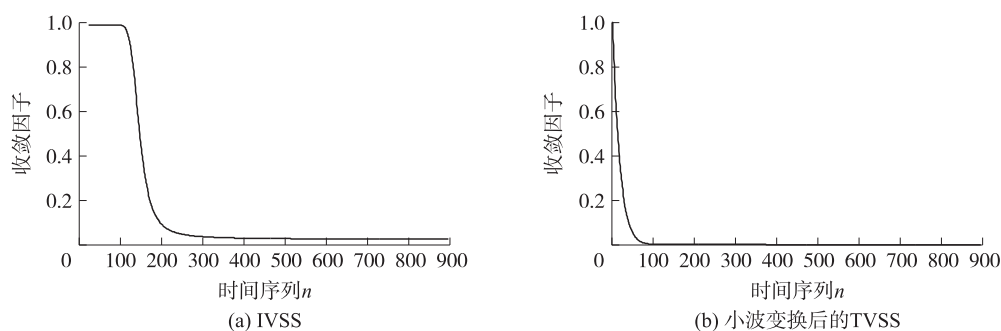


图4 IVSS与小波变换后TVSS的收敛因子对比

Fig.4 Comparison of convergence factor between IVSS and wavelet varied TVSS

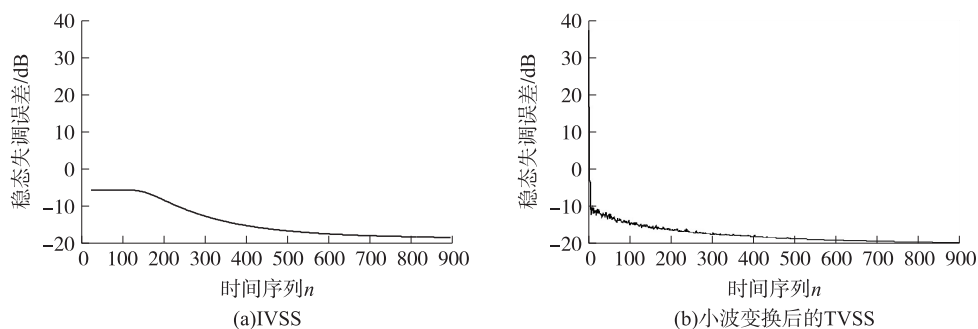


图5 IVSS与小波变换后TVSS的稳态失调误差对比

Fig.5 Comparison of steady-state misadjustment error between IVSS and wavelet varied TVSS

6 结语

本文在分析了已有 VSSLMS 算法特点的基础上,提出了变步长 LMS 的小波变换算法,对其收敛性和稳态失调误差进行了理论分析.该算法通过对步长因子进行小波变换处理后,使得算法实时地根据稳态失调误差与步长因子的相对变换情况,及时准确地调整收敛速度.经过仿真可知,收敛速度较以前明显加快,稳态失调误差较以前平均降低了 10 dB 左右.本文所提方法既能够保证快速收敛,又能最大限度地降低稳态失调误差,且便于实现,具有较高的实际应用价值.

[参考文献](References)

- [1] SIMON H. 自适应滤波器原理[M]. 4 版. 郑宝玉,译. 北京:电子工业出版社,2010:206-212.
SIMON H. Adaptive filter theory[M]. 4th ed. ZHENG B Y, translated. Beijing: Electronic Industry Press, 2010: 206-212. (in Chinese)
- [2] HUANG B Y, XIAO Y G, SUN J W, et al. A variable step-size FXLMS algorithm for narrowband active noise control[J]. IEEE transactions on audio, speech and language processing, 2013, 21(2): 301-312.
- [3] 张贤达. 现代信号处理[M]. 2 版. 北京:清华大学出版社,2002:188-206.
ZHANG X D. Modern signal processing[M]. 2nd ed. Beijing: Tsinghua University Press, 2002: 188-206. (in Chinese)
- [4] HARSHA I K R, BEHROUZ F B. Fast LMS/Newton algorithm for stereophonic acoustic echo cancelation[J]. IEEE transactions on signal processing, 2009, 57(8): 2 919-2 930.
- [5] 罗小东,贾振红,王强. 一种新的变步长 LMS 自适应滤波算法[J]. 电子学报,2006,34(6):1 123-1 126.
LUO X D, JIA Z H, WANG Q. A new variable step size LMS adaptive filtering algorithm[J]. Acta electronica sinica, 2006, 34(6): 1 123-1 126. (in Chinese)
- [6] HWANG J K, LI Y P. Variable step-size LMS algorithm with a gradient-based weighted average[J]. IEEE signal processing letters, 2009, 16(12): 1 043-1 046.
- [7] MAYYAS K. A variable step-size selective partial update LMS algorithm[J]. Digital signal processing, 2013, 23(1): 75-85.
- [8] HUANG H C, LEE J H. A new variable step-size NLMS algorithm and its performance analysis[J]. IEEE transactions on signal processing, 2012, 60(4): 2 055-2 060.
- [9] KWONG R H, JOHNSTON E W. A variable step size LMS algorithm[J]. IEEE transactions on signal processing, 1992, 40(7): 1 633-1 642.
- [10] ABOULNAST T, MAYYAS K. A robust variable step-size LMS-type algorithm: analysis and simulations[J]. IEEE transactions on signal processing, 1997, 45(3): 631-639.
- [11] XU D J, YIN B, WANG W, et al. Variable tap-length LMS algorithm based on adaptive parameters for TDL structure adaption[J]. IEEE signal processing letters, 2014, 21(7): 809-813.
- [12] 田福庆,罗荣,李克玉,等. 基于改进的双曲正切函数变步长 LMS 算法[J]. 系统工程与电子技术,2012,34(9):1 758-1 763.
TIAN F Q, LUO R, LI K Y, et al. New variable step-size LMS algorithm based on modified hyperbolic tangent function[J]. Systems engineering and electronics, 2012, 34(9): 1 758-1 763. (in Chinese)
- [13] CHOI Y S, HOOMAN S M. Simultaneous transmission and reception: algorithm, design and system level performance[J]. IEEE transactions on wireless communications, 2013, 12(12): 5 992-6 010.
- [14] BERSHAD N J, EWEDA E, BERMUDEZ J C M. Stochastic analysis of the LMS and NLMS algorithms for cyclostationary white Gaussian inputs[J]. IEEE transactions on signal processing, 2014, 62(9): 2 238-2 249.

[责任编辑:严海琳]