doi:10.3969/j.issn.1672-1292.2016.04.011

非连续免疫对非线性计算机病毒模型的影响

李　迅[1],王星星[2],张道祥[3]

(1.南京卫生学校,江苏 南京 210038)
(2.合肥师范学院生命科学学院,安徽 合肥 230009)
(3.安徽师范大学数学计算机科学学院,安徽 芜湖 241002)

[**摘要**]　研究了一类具有非连续免疫策略的非线性传染 SIR 计算机病毒模型. 运用右端不连续函数性质及微分包含相关知识,给出了该模型的 Filippov 解的定义,证明了该非连续模型的平衡点存在唯一性. 通过计算得到模型的基本再生数 R_0,通过构造合适的 Lyapunov 函数及运用 Lasalle 不变集原理,证明了当 $R_0>1$ 时,满足初始条件的每一个解都在有限时间内收敛于有病平衡点;当 $R_0<1$ 时,相同的方法可证明模型的解都在有限时间内收敛于无病平衡点. 运用 Matlab 软件进行了数值模拟,验证了理论结果的正确性.

[**关键词**]　非连续免疫,计算机病毒,有限时间全局稳定

[**中图分类号**]TP309.5;O175.15　[**文献标志码**]A　[**文章编号**]1672-1292(2016)04-0061-08

Impact of Discontinuous Immune on Computer Virus Model with Nonlinear Vaccination Probability

Li Xun[1],Wang Xingxing[2],Zhang Daoxiang[3]

(1.Nanjing Health School,Nanjing 210038,China)
(2.College of Life Science,Hefei Normal University,Hefei 230009,China)
(3.Department of Mathematics and Computer Science,Anhui Normal University,Wuhu 241002,China)

Abstract:This paper mainly studies the impact of discontinuous immunity on global dynamics of nonlinear vaccination computer virus model. By using the right hang discontinuity and the knowledge of differential inclusion,we define the solution of Filippov,and prove the existence and uniqueness of equilibrium. We obtain the basic reproduction number R_0 by calculation. By constructing Lyapunov function and using LaSalle invariant set principle,we show that solutions are all convergence to the disease equilibrium infinite time when $R_0>1$. Similarly,we can also demonstrate that solutions are all convergence to the free disease equilibrium in finite time when $R_0<1$. Numerical simulations are carried out to illustrate and expand the theoretical results.

Key words:discontinuous immune,computer virus,global stability in finite time

随着软硬件技术的不断进步和计算机网络的广泛普及,计算机病毒也不断进步,其结构越来越复杂,感染能力和破坏力也越来越强大. 计算机病毒带来了巨大的经济损失和社会恐慌[1]. 反计算机病毒主要有 2 种方法:微观方法和宏观方法[2]. 微观方法是发展强大的专门的反病毒程序,分析新病毒的结构与行为. 但由于新病毒的不可预测性,现有的杀毒软件不能预测新病毒的发展变化趋势,不能预测病毒的传播. 为弥补这一不足,有学者提出了宏观方法来对抗计算机病毒. 宏观方法的灵感主要来自生物传染病模型[3-4]. Kephar 等人[5]首次提出宏观模型,主要是建立计算机病毒的传播仓室模型,研究各仓室内病毒的数量随着时间的变化规律. 刘万平等在以上模型的基础上提出了具有非线性传染概率的计算机病毒舱室模型,通过运用 Lyapunov 函数[6]证明了有病平衡点和无病平衡点存在的唯一性以及全局收敛性.

但这些模型的研究仍存在不足. 在病毒传播的早期,往往由于未意识到严重性,计算机病毒并未得到及时充分的免疫治疗. 一段时间后,当意识到严重性时,会突然加大治疗力度,形成很大的治疗跳跃. 因

收稿日期:2015-11-16.
基金项目:国家自然科学基金(11302002).
通讯联系人:张道祥,博士研究生,副教授,研究方向:应用数学,计算数学. E-mail:1123676642@ qq.com

此,整个治疗过程呈现出非连续,类似的非连续模型广泛存在于力学、神经网络和生物学领域[7-8]. 由此可见,将非连续免疫的策略运用到计算机病毒研究的模型中非常必要.

1 模型的建立

在某一时刻 t,网络中的节点可能处于以下 3 种状态之一:

(1)t 时刻尚未被感染但易感染的节点,被称为易感染状态,记为 $S(t)$;

(2)t 时刻已感染病毒的节点,被称为感染状态,记为 $I(t)$;

(3)t 时刻对病毒具有免疫功能的节点,被称为免疫状态,记为 $R(t)$.

文献[6]研究了如下微分模型:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=(1-p)b-\alpha_1 f(I)S-\mu S+\gamma_2 I-\beta SI+\alpha_2 R,\\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\beta SI-\gamma_2 I-\mu I-\gamma_1 I,\\ \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=pb+\gamma_1 I+\alpha_1 f(I)S-\mu R-\alpha_2 R,\end{cases}\tag{1}$$

式中,易感染节点的输入率为$(1-p)b$,免疫类节点的常数输入率为 pb. 每一个节点在网络世界中的自然死亡率都为μ,每一个易感染的节点被病毒感染的概率为βI,$\beta>0$. 由于治疗的影响,被感染的节点以 $\gamma_2>0$ 的概率成为易感染节点,$\gamma_1>0$ 治愈成为移出类节点. 当然每一个移出类的节点以 $\alpha_2>0$ 的概率丧失免疫成为易感染节点. 由于新疫苗的出现,网络中的每一个易感染节点可暂时免疫,其暂时免疫概率可令为 $\alpha_1 f(I)$,其中 $\alpha_1>0$,函数 f 是连续可微的,$f(0)=1$ 且 $f'\geqslant 0$. 模型的初值为$(S(0),I(0),R(0))\in\mathbf{R}_+^3$,基本再生数为:
$R_0=\dfrac{\beta b(\alpha_2+\mu-p\mu)}{\mu(\alpha_1+\alpha_2+\mu)(\gamma_1+\gamma_2+\mu)}$.

上述模型的右端函数是连续可微的,而非连续情况的是存在于文献[6]中的.

本文考虑在上述模型中加入非连续免疫项 $h(I)$:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=(1-p)b-\alpha_1 f(I)S-\mu S+\gamma_2 I-\beta SI+\alpha_2 R,\\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\beta SI-\gamma_2 I-\mu I-\gamma_1 I-h(I),\\ \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=pb+\gamma_1 I+\alpha_1 f(I)S-\mu R-\alpha_2 R+h(I).\end{cases}\tag{2}$$

为不失一般性,提出假设 1:

假设 1 $h(I)=\varphi(I)I$,$\varphi:\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}_+$ 是一个非单减函数,且在每一个紧致区间内至多有有限个跳跃间断点.

备注 1 为不失一般性,可假设函数 φ 在 0 处是连续的,若不连续则可定义 φ 在 0 处的值$\varphi(0^+)$,当然这对模型(2)没有影响.

模型(2)的右端是不连续的函数,因此经典的连续微分方程理论不能用以解决这类右端具有非连续项的模型,于是需要定义(2)的其他解的形式,此处引入 Filippov 解[9]. 考虑如下一般形式的右端不连续微分方程:

$$x'(t)=f(t,x(t)),\tag{3}$$

式中,右端函数 f 关于 t 或 $x(t)$ 是不连续的,但关于 t 是可测且局部有界的.

定义 1[10] 考虑如下的集值映射:

$$F(t,x)=\bigcap_{\delta>0}\bigcap_{\mu N=0}\overline{\mathrm{co}}(f(t,x^\delta\setminus N)),\tag{4}$$

式中,x^δ 表示 x 的 δ 邻域;$\overline{\mathrm{co}}$意味着取一个集合的凸闭包;交集是在所有的零测度集合 N 和所有的 $\delta>0$ 邻域上取的;在这种定义方式下,右段不连续方程(3)的解就是微分包含 $F(t,x)$的一个解:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\in F(t,x),t\in[0,T).$$

对于带有初值条件的 Filippov 解是一个绝对连续的向量值函数，即若 $(S(t),I(t),R(t))$ 是模型(2)满足初始条件的一个 Filippov 解，则 $(S(t),I(t),R(t))$ 在任一个子区间 $[t_1,t_2]$ 上是一致连续的，且模型(2)的解是满足如下微分包含的向量值函数：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=(1-p)b-\alpha_1 f(I)S-\mu S+\gamma_2 I-\beta SI+\alpha_2 R,\\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\in\beta SI-\gamma_2 I-\mu I-\gamma_1 I-\overline{\mathrm{co}}h(I),\\ \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\in pb+\gamma_1 I+\alpha_1 f(I)S-\mu R-\alpha_2 R+\overline{\mathrm{co}}h(I),\end{cases}\tag{5}$$

式中，$\overline{\mathrm{co}}h(I)=[h(I^-),h(I^+)]$，其中 $h(I^-)$、$h(I^+)$ 分别表示函数 h 在 I 处的左极限和右极限.

由假设 1 可知，当 $h(I)$ 在 I 处不连续时，$\overline{\mathrm{co}}h(I)$ 是一个非空的区间；若 $h(I)$ 在 I 处连续，则 $\overline{\mathrm{co}}h(I)=h(I)$，易发现映射 $(S,I,R)\to((1-p)b-\alpha_1 f(I)S-\mu S+\gamma_2 I-\beta SI+\alpha_2 R,\beta SI-\gamma_2 I-\mu I-\gamma_1 I-\overline{\mathrm{co}}h(I),pb+\gamma_1 I+\alpha_1 f(I)S-\mu R-\alpha_2 R+\overline{\mathrm{co}}h(I))$ 是具有非空、紧致、凸值的上半连续集值映射[11]. 根据可测选择性定理[11]可得：若 (S,I,R) 是模型(5)在 $[0,T]$ 上的一个解，则存在一个可测函数 $m(t)\in\overline{\mathrm{co}}[h(I)]$，使得

$$\begin{cases}\dot{S}(t)=(1-p)b-\alpha_1 f(I)S-\mu S+\gamma_2 I-\beta SI+\alpha_2 R,\\ \dot{I}(t)=\beta SI-\gamma_2 I-\mu I-\gamma_1 I-m(t),\\ \dot{R}(t)=pb+\gamma_1 I+\alpha_1 f(I)S-\mu R-\alpha_2 R+m(t).\end{cases}\tag{6}$$

2　平衡点的存在唯一性

本节主要讨论模型(2)平衡点的存在唯一性. 出于现实世界的考虑，在讨论之前需证明模型满足初始条件的解是有界且为正的.

引理 1　若假设 1 成立，令 $(S(t),I(t),R(t))$ 是模型(2)满足初始条件 $(S(0),I(0),R(0))\in\mathbf{R}_+^3$ 的解，则 (S,I,R)，$t\in(0,T)$ 是有界的.

证明　由式(4)可得：$\dfrac{\mathrm{d}(S+I+R)}{\mathrm{d}t}\in b-\mu(S+I+R)$，

若 $(S+I+R)>\dfrac{b}{\mu}$，则 $\dfrac{\mathrm{d}(S+I+R)}{\mathrm{d}t}<0$，因此 $(S+I+R)<\max\left\{\dfrac{b}{\mu},S_0+I_0+R_0\right\}$.

若 $(S+I+R)<\dfrac{b}{\mu}$，则 $\dfrac{\mathrm{d}(S+I+R)}{\mathrm{d}t}>0$，因此 $(S+I+R)<\dfrac{b}{\mu}$.

综上所述，(S,I,R) 的可行域是有界的.

由假设 1 知 $\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\beta SI-\gamma_2 I-\mu I-\gamma_1 I-\varphi(I)I$，则对两边关于 I 同时积分有：

$$\int_0^t \dot{I}(t)\,\mathrm{d}t=I\int_0^t \beta S-\gamma_2-\mu-\gamma_1-\varphi(I)\,\mathrm{d}t,$$

$$I(t)=I(0)\,\mathrm{e}^{\int_0^t \beta S-\gamma_2-\mu-\gamma_1-\varphi(I)\,\mathrm{d}t}>0,$$

因此 $I(t)$ 在初值 $I(0)$ 大于零时是正的.

接下来证明模型(2)平衡点的存在唯一性. 若令 (S^*,I^*,R^*) 是其平衡点，则由式(4)有如下微分包含：

$$\begin{cases}0=(1-p)b-\alpha_1 f(I^*)S^*-\mu S^*+\gamma_2 I^*-\beta S^*I^*+\alpha_2 R^*,\\ 0\in\beta S^*I^*-\gamma_2 I^*-\mu I^*-\gamma_1 I^*-\overline{\mathrm{co}}h(I^*),\\ 0\in pb+\gamma_1 I^*+\alpha_1 f(I^*)S^*-\mu R^*-\alpha_2 R^*+\overline{\mathrm{co}}h(I^*).\end{cases}\tag{7}$$

显然，若 (S^*,I^*,R^*) 是模型(2)平衡点，则存在 $\xi^*\in\overline{\mathrm{co}}h(I^*)$，使得：

$$0\in\beta S^*I^*-\gamma_2 I^*-\mu I^*-\gamma_1 I^*-\xi^*.$$

此处 ξ^* 是唯一的，且

$$\xi^* = \beta S^* I^* - \gamma_2 I^* - \mu I^* - \gamma_1 I^*. \tag{8}$$

若假设成立,则模型(2)可变为如下形式:

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = (1-p)b - \alpha_1 f(I)S - \mu S + \gamma_2 I - \beta SI + \alpha_2 R, \\ \dfrac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma_2 I - \mu I - \gamma_1 I - \varphi(I)I, \\ \dfrac{dR}{dt} = pb + \gamma_1 I + \alpha_1 f(I)S - \mu R - \alpha_2 R + \varphi(I)I. \end{cases} \tag{9}$$

很显然无病平衡点$\left(\dfrac{(1-p)b}{\mu+\alpha_1}, 0, \dfrac{b(\alpha_1+\mu p)}{\mu(\alpha_1+\alpha_2+\mu)}\right)$总是存在的. 对于无病平衡点则满足如下微分包含:

$$\begin{cases} 0 = (1-p)b - \alpha_1 f(I)S - \mu S + \gamma_2 I - \beta SI + \alpha_2 R, \\ 0 \in \beta S - \gamma_2 - \mu - \gamma_1 - \overline{\mathrm{co}}\varphi(I), \\ 0 \in pb + \gamma_1 I + \alpha_1 f(I)S - \mu R - \alpha_2 R + \overline{\mathrm{co}}\varphi(I)I. \end{cases} \tag{10}$$

联立方程(9),可得:

$$\frac{\beta[(1-p)b\mu + b\alpha_2] - \mu\gamma_1\beta I - \mu\beta I(\mu+\alpha_2)}{\alpha_1\mu f(I) + \beta\mu I + \mu(\mu+\alpha_2)} - \frac{\mu(\gamma_1+\gamma_2+\mu)[\alpha_1 f(I) + \mu + \alpha_2]}{\alpha_1\mu f(I) + \beta\mu I + \mu(\mu+\alpha_2)} \in \overline{\mathrm{co}}\varphi(I). \tag{11}$$

令

$$g(I) = \frac{\beta[(1-p)b\mu + b\alpha_2] - \mu\gamma_1\beta I - \mu\beta I(\mu+\alpha_2)}{\alpha_1\mu f(I) + \beta\mu I + \mu(\mu+\alpha_2)} - \frac{\mu(\gamma_1+\gamma_2+\mu)[\alpha_1 f(I) + \mu + \alpha_2]}{\alpha_1\mu f(I) + \beta\mu I + \mu(\mu+\alpha_2)} \in \overline{\mathrm{co}}\varphi(I).$$

引理2 若 $R_0>1$,则微分包含(11)存在唯一的正解 $\tilde{I}$,且满足

$$\tilde{I} \leqslant \frac{\beta b(\mu - p\mu + \alpha_2)}{\alpha_1\mu + \mu(\mu+\alpha_2)} - \frac{\mu(\mu+\alpha_1+\alpha_2)(\mu+\gamma_1+\gamma_2)}{\alpha_1\mu + \mu(\mu+\alpha_2)}.$$

证明 由于 $R_0>1$,则 $g(0)>\varphi(0)>0$. 又因为函数 $g(I)$ 是单调递减的,$\varphi(I)$ 是关于 I 的非单减函数,$g(I)\leqslant 0$ 当且仅当

$$I \geqslant \frac{\beta b(\mu - p\mu + \alpha_2)}{\alpha_1\mu + \mu(\mu+\alpha_2)} - \frac{\mu(\mu+\alpha_1+\alpha_2)(\mu+\gamma_1+\gamma_2)}{\alpha_1\mu + \mu(\mu+\alpha_2)}.$$

于是集合$\{I: g(I) \geqslant \varphi(I^+), I>0\}$为有界集,取 $\tilde{I} = sup\{I: g(I) \geqslant \varphi(I^+), I>0\}$,显然

$$g(\tilde{I}) = g(\tilde{I}^-) \geqslant \varphi(\tilde{I}^-),$$

且

$$0 < \tilde{I} \leqslant \frac{\beta b(\mu - p\mu + \alpha_2)}{\alpha_1\mu + \mu(\mu+\alpha_2)} - \frac{\mu(\mu+\alpha_1+\alpha_2)(\mu+\gamma_1+\gamma_2)}{\alpha_1\mu + \mu(\mu+\alpha_2)}.$$

以下需证明 $g(\tilde{I}) \in [\varphi(\tilde{I}^-), \varphi(\tilde{I}^+)]$. 可先假设 $g(\tilde{I}) > \varphi(\tilde{I}^+) = \lim\limits_{I\to\tilde{I}^+}\varphi(I)$,由假设1知,存在一个常数 $\varepsilon>0$ 使得

$$g(\tilde{I}+\varepsilon) \geqslant \varphi(\tilde{I}+\varepsilon) = \varphi((\tilde{I}+\varepsilon)^+),$$

其中函数 φ 在 $\tilde{I}+\varepsilon$ 处是连续的,这与 $\tilde{I}$ 的定义矛盾. 因此,$g(\tilde{I}) \in [\varphi(\tilde{I}^-), \varphi(\tilde{I}^+)]$,$\tilde{I}$ 是式(11)的一个正解,引理得证.

接下来需证明微分包含(11)的解是唯一的. 先假设 I_1^*, I_2^* 是微分包含(11)的两个正解,且 $I_1^* \neq I_2^*$,由式(8)可知存在 $\eta_1^* \in \overline{\mathrm{co}}\tilde{\omega}(I_1^*)$,$\eta_2^* \in \overline{\mathrm{co}}\tilde{\omega}(I_2^*)$使得:

$$\begin{cases} \dfrac{\beta[(1-p)b\mu + b\alpha_2] - \mu\gamma_1\beta I_2^* - \mu\beta I_2^*(\mu+\alpha_2) - \mu(\gamma_1+\gamma_2+\mu)[\alpha_1 f(I_2^*) + \mu + \alpha_2]}{\alpha_1\mu f(I_2^*) + \beta\mu I_2^* + \mu(\mu+\alpha_2)} = \eta_2^*, \\ \dfrac{\beta[(1-p)b\mu + b\alpha_2] - \mu\gamma_1\beta I_1^* - \mu\beta I_1^*(\mu+\alpha_2) - \mu(\gamma_1+\gamma_2+\mu)[\alpha_1 f(I_1^*) + \mu + \alpha_2]}{\alpha_1\mu f(I_1^*) + \beta\mu I_1^* + \mu(\mu+\alpha_2)} = \eta_1^*. \end{cases} \tag{12}$$

由假设1知 φ 为非单减函数,故 $H = \dfrac{\eta_1^* - \eta_2^*}{I_1^* - I_2^*} \geqslant 0$.

将(12)中两式相减可得:

$$\mu\gamma_1\beta(I_1^*-I_2^*)+\mu\alpha_1(\gamma_1+\gamma_2+\mu)[f(I_1^*)-f(I_2^*)]=\eta_2^*\alpha_1 f(I_2^*)\mu-\eta_1^*\alpha_1 f(I_1^*)\mu+\eta_2^*\beta\mu I_2^*-\eta_1^*\beta\mu I_1^*+\mu(\mu+\alpha_2)(\eta_2^*-\eta_1^*),$$

两边同除 $I_1^*-I_2^*$ 可得:

$$左边=\mu\beta\gamma_1+\mu\alpha_1(\gamma_1+\gamma_2+\mu)\frac{f(I_1^*)-f(I_2^*)}{I_1^*-I_2^*}>0,$$

$$右边=\alpha_1 f(I_2^*)\mu\frac{\eta_2^*-\eta_1^*}{I_1^*-I_2^*}+\eta_1^*\alpha_1\mu\frac{f(I_2^*)-f(I_1^*)}{I_1^*-I_2^*}-\eta_2^*\beta\mu+\beta I_1^*\mu\frac{\eta_2^*-\eta_1^*}{I_1^*-I_2^*}+\mu(\mu+\alpha_2)\frac{\eta_2^*-\eta_1^*}{I_1^*-I_2^*},$$

因 f 是单调递增函数,$\frac{f(I_2^*)-f(I_1^*)}{I_1^*-I_2^*}<0$,所以右边小于零,而左边大于零,矛盾. 因此,假设错误,满足初始条件的解是唯一的.

3　有限时间全局收敛

本节通过构造 Lyapunov 函数,证明有病平衡点和无病平衡点的全局收敛性. 证明之前先作如下假设:

假设 2　若 $R_0>1$,则 $\varphi(I)$ 在 I^* 处有一个跳跃间断点,其中 I^* 是由引理 2 唯一确定的正解,且

$$\eta^*=\beta S^*-\gamma_2-\mu-\gamma_1\in(\varphi^-(I^*),\varphi^+(I^*)).$$

根据假设 2 可定义:$\theta=\min\{\varphi^+(I^*)-\eta^*,\eta^*-\varphi^-(I^*)\}>0$.

定理 1　若假设 1、假设 2 均成立,模型(2)所有满足初始条件的解都在有限时间内全局收敛于有病平衡点 $E^*=(S^*,I^*,R^*)$,即当 $t>t^*=\frac{4\mu V_1(x(0),y(0),z(0))}{\theta^2(4\mu\alpha-\alpha^2\beta^2)}$ 时都有 $(S,I,R)=(S^*,I^*,R^*)$,$t\in(0,+\infty)$. 其中,$V_1(x(0),y(0),z(0))=\frac{1}{2}[(S(0)-S^*)+(I(0)-I^*)+(R(0)-R^*)]^2+\alpha\int_0^{I(0)-I^*}\frac{\varphi(I^*+\rho)-\eta^*}{I^*+\rho}\mathrm{d}\rho$.

证明　令 $x(t)=S(t)-S^*$,$y(t)=I(t)-I^*$,$z(t)=R(t)-R^*$,则式(3)变为

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\alpha_1 f(I^*)S^*-\alpha_1 f(y+I^*)(x+S^*)-\mu x+\gamma_2 y-\beta(x+S^*)y-\beta I^*x+\alpha_2 z,\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\beta(x+S^*)y+\beta I^*x-\gamma_2 y-\mu y-\gamma_1 y+h(I^*)-h(I^*+y),\\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=-\alpha_1 f(I^*)S^*+\alpha_1 f(y+I^*)(x+S^*)+\gamma_1 y-\mu z-\alpha_2 z-h(I^*)+h(I^*+y).\end{cases}\tag{13}$$

由上文知存在 $\eta^*=\beta S^*-\gamma_2-\mu-\gamma_1\in\overline{\mathrm{co}}\varphi(I^*)$;由式(5)知,存在 $\eta(t)\in\overline{\mathrm{co}}[\varphi(I+I^*)]$,则式(13)变为:

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\alpha_1 f(I^*)S^*-\alpha_1 f(y+I^*)(x+S^*)-\mu x+\gamma_2 y-\beta(x+S^*)y-\beta I^*x+\alpha_2 z,\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\beta xy+\beta I^*x-(\eta(t)-\eta^*)(I^*+y),\\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=-\alpha_1 f(I^*)S^*+\alpha_1 f(y+I^*)(x+S^*)+\gamma_1 y-\mu z-\alpha_2 z-h(I^*)+h(I^*+y).\end{cases}\tag{14}$$

构造如下的 Lyapunov 函数:

$$V_1(x,y,z)=\frac{1}{2}(x+y+z)^2+\alpha\int_0^y\frac{\varphi(I^*+\rho)-\eta^*}{I^*+\rho}\mathrm{d}\rho,$$

其中,α 为一个正常数. 易看出 V_1 是一个正则函数,当 $(x,y,z)\neq 0$ 时,$V_1>0$,且 $V_1(0,0,0)=0$;当 $x\to+\infty$ 或 $y\to+\infty$ 或 $z\to+\infty$ 时,$V_1\to+\infty$. 对 V_1 求导可得:

$$\frac{\mathrm{d}V_1(x,y,z)}{\mathrm{d}t}=(x+y+z)(x'+y'+z')+\alpha\frac{\eta(t)-\eta^*}{y+I^*}y'=(x+y+z)(-\mu x'-\mu y'-\mu z')+\alpha(\eta(t)-\eta^*)\beta x-\alpha(\eta(t)-\eta^*)^2\leqslant$$

$$-\mu x^2+\alpha(\eta(t)-\eta^*)\beta x-\alpha(\eta(t)-\eta^*)^2\leqslant-\mu\left\{x-\frac{\alpha\beta[\eta(t)-\eta^*]}{2\mu}\right\}^2-\frac{4\mu\alpha-\alpha^2\beta^2}{4\mu}[\eta(t)-\eta^*]^2.$$

取 $4\mu\alpha-\alpha^2\beta^2>0$,即 $0<\alpha<\frac{4\mu}{\beta^2}$,则有 $\frac{dV_1}{dt}\leqslant 0$. 由假设2知,当 $(x,y,z)\neq 0$ 时,$[\eta(t)-\eta^*]^2>\theta^2$,则可得对所有的 $t\in\{t:(x,y,z)\neq(0,0,0)\}$ 有:

$$\frac{dV_1(x,y,z)}{dt}\leqslant -\frac{4\mu\alpha-\alpha^2\beta^2}{4\mu}\theta^2.$$

从0到 t 对上式两边进行积分可得:

$$0\leqslant V_1(x,y,z)\leqslant V_1(x(0),y(0),z(0))-\frac{4\mu\alpha-\alpha^2\beta^2}{4\mu}\theta^2 t.$$

令 $V_1(x(0),y(0),z(0))-\frac{4\mu\alpha-\alpha^2\beta^2}{4\mu}\theta^2 t=0$,解得 $t^*=\frac{4\mu V_1(x(0),y(0),z(0))}{\theta^2(4\mu\alpha-\alpha^2\beta^2)}$. 也即当 $t=t^*$ 时,$V_1(x(t),y(t),z(t))=0$. 由文献[12]可知,当 $t>t^*$,对所有的 t 都有 $V_1(x(t),y(t),z(t))=0$,即当 $t>t^*$ 时,$(x(t),y(t),z(t))=(0,0,0)$,则有 $(S(t)-S^*,I(t)-I^*,R(t)-R^*)=(0,0,0)$,即当 $t>t^*$ 时,$(S(t),I(t),R(t))=(S^*,I^*,R^*)$,故定理得证.

接下来将证明所有满足初值条件的解都是在有限时间收敛于无病平衡点. 由于假设1假设了 $h(I)$ 在 $I=0$ 处是连续的,故无病平衡点在假设1下并不是一个非连续的点,为解决所有的解有限时间内全局收敛于无病平衡点需要给出如下假设:

假设3　若 $h:\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}_+$ 是一个非单减的函数,且在每一个紧致区间内至多有有限个跳跃间断点,另外 $h(0)=0$ 但在 $I=0$ 处是不连续的.

定理2　若假设3成立,则当 $R_0<1$ 时,模型(3)所有满足初值条件的解都是在有限时间内全局收敛于无病平衡点 $E_0=(S^0,0,R^0)=\left(\frac{b(\alpha_2+\mu-p\mu)}{\mu(\alpha_1+\alpha_2+\mu)},0,\frac{b(\alpha_1+\mu p)}{\mu(\alpha_1+\alpha_2+\mu)}\right)$,即当 $t\geqslant t^*=\frac{V_2(x(0),I(0),z(0))}{2\mu h(0^+)}$ 时,$(S,0,R)=\left(\frac{b(\alpha_2+\mu-p\mu)}{\mu(\alpha_1+\alpha_2+\mu)},0,\frac{b(\alpha_1+\mu p)}{\mu(\alpha_1+\alpha_2+\mu)}\right)$,其中,$V_2(x(0),I(0),z(0))=\frac{1}{2}(S-S^0+I+R-R^0)^2$.

证明　令 $x=S-S^0$,$z=R-R^0$,则模型(3)变为:

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-\alpha_1 f(I)(x+S^0)+\alpha_1 S^0-\mu x+\gamma_2 I-\beta(x+S^0)I+\alpha_2 z,\\ \frac{dI}{dt}=\beta(x+S^0)I-\gamma_2 I-\mu I-\gamma_1 I-h(I),\\ \frac{dz}{dt}=\gamma_1 I+\alpha_1 f(I)(x+S^0)-\alpha_1 S^0-\mu z-\alpha_2 z+h(I).\end{cases}$$

构造如下的 Lyapunov 函数:

$$V_2(x,I,z)=\frac{1}{2}(x+I+z)^2+2\mu I,$$

很明显当 $(x,I,z)\neq(0,0,0)$ 时,$V_2>0$;当且仅当 $(x,I,z)=(0,0,0)$ 时,$V_2=0$.

对 V_2 关于 t 进行求导可得:

$$\frac{dV_2(x,I,z)}{dt}=(x+I+z)(x'+I'+z')+2\mu I'=(x+I+z)(-\mu x-\mu z-\mu I)+2\mu I'\leqslant -2\mu\beta Ix+2\mu\beta Ix+$$
$$2\mu I[\beta S^0-(\gamma_1+\gamma_2+\mu)]-2\mu\eta(t)=2\mu I(R_0-1)(\gamma_1+\gamma_2+\mu)-2\mu\eta(t).$$

若 $R_0<1$,则

$$\frac{dV_2(x,I,z)}{dt}\leqslant -2\mu\eta(t).$$

由假设3可知,$\eta(t)\geqslant h(0^+)$,则可得:

$$\frac{dV_2(x,I,z)}{dt}\leqslant -2\mu h(0^+).$$

从0到 t 对上式两边积分可得:

$$0 \leqslant V_2(x,I,z) \leqslant V_2(x(0),I(0),z(0)) - 2\mu h(0^+)t.$$

故由文献[12]知,当 $t \geqslant t^* = \dfrac{V_2(x(0),I(0),z(0))}{2\mu h(0^+)}$ 可得 $(x,I,z)=(0,0,0)$,即

$$(S,0,R)=\left(\frac{b(\alpha_2+\mu-p\mu)}{\mu(\alpha_1+\alpha_2+\mu)},0,\frac{b(\alpha_1+\mu p)}{\mu(\alpha_1+\alpha_2+\mu)}\right).$$

定理得证.

4　数值仿真

本节将运用 Matlab 软件模拟理论的正确性.

4.1　地方平衡点的全局收敛

根据假设 1 可知 $h(I)=\varphi(I)I$,为方便起见,直接令 $I=1$ 的常值函数,$\varphi(I)$ 为取值为 0 和 1 的间断跳跃函数:

$$h(I)=\begin{cases}0, & 0<t<10;\\ 1, & t>10.\end{cases}$$

选取参数为:$p=0.5$;$b=2$;$\alpha_1=0.2$;$\alpha_2=0.5$;$\mu=0.2$;$\gamma_1=\gamma_2=0.5$;$\beta=0.8$. 给定的一组初值:$S(0)=10$;$I(0)=10$;$R(0)=10$.

数值仿真得到结果如图 1 所示. 从图 1 可看出,S 类、I 类、R 类计算机节点经过一段时间后都各自到达了平衡,这和定理 1 的结果一致.

4.2　无病平衡点的全局收敛

根据假设 3 可知 $h(I)$ 是一个跳跃函数,且 $h(0)=0$,则可取函数 $h(I)$ 为:

$$h(I)=\begin{cases}1+\sin\dfrac{I}{10}, & 0<t<10;\\ \sqrt{I}, & t>10.\end{cases}$$

选取参数为:$p=0.8$;$b=2$;$\beta=0.5$;$\alpha_1=0.5$;$\alpha_2=0.5$;$\mu=0.8$;$\gamma_1=0.6$;$\gamma_2=0.4$. 给定的一组初值:$S(0)=10$;$I(0)=10$;$R(0)=10$.

数值仿真得到结果如图 2 所示. 从图 2 可看出,S 类、R 类计算机节点经过一段时间后都各自到达了平衡,被感染的 I 类节点经过一段时间治疗后和 x 轴重合,也即 I 类感染节点经过一段时间免疫治疗后灭亡了,这和定理 2 的结果一致.

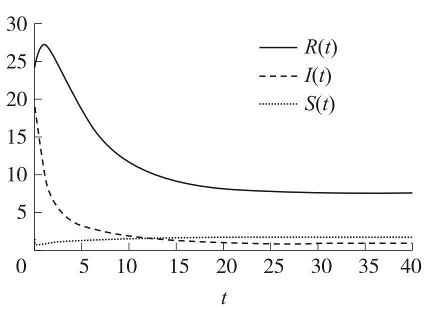

图 1　地方平衡点的变化趋势图

Fig. 1　Changing trend of disease equilibrium

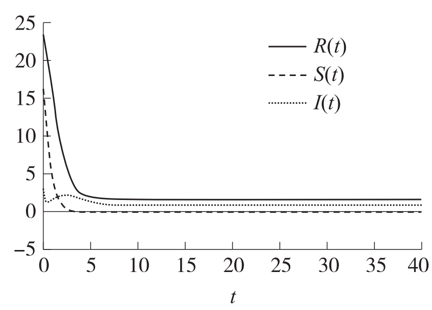

图 2　无病平衡点的变化趋势图

Fig. 2　Changing trend of free disease equilibrium

5　结论

(1)通过对非连续免疫策略计算机病毒模型的研究,得到满足初始条件的解都能够在有限时间内到达平衡点. 这一点具有重要的现实意义,因为不管是感染病毒的计算机还是患者都希望知道自己的“病情”能够在某个确定的时间内达到稳定或被治愈.

(2)数值算例验证了本文理论结果的正确性. 这说明利用微分包含知识可较好地解决具有非连续性计算机病毒模型的动力学问题,由此也可将非连续思想推广到其他领域,从而得到更符合实际的结果.

[参考文献](**References**)

[1] SZOR P. The art of computer virus research and defense[M]. Boston:Addison-Wesley Education Publishers,2005.
[2] DATAS,WANG H. The effectiveness of vaccinations on the spread of email-borne computer viruses[C]//IEEE CCECE/CCGEI. Saskatoon,2005:219-223.
[3] COHEN F. Computer viruses:theory and experiments[J]. Computer security,1987,6(1):22-35.
[4] MURRAY W H.The application of epidemiology to computer viruses[J]. Comput Secur,1988,7(2):130-150.
[5] KEPHART J Q,WHITE S R. Directed graph epidemical model of computer viruses[C]//Proceedings of the 1991 IEEE Symposium on Security and Privacy. Washington DC:IEEE Computer Society,1991:343-359.
[6] CAN C,YANG X ,LIU W,et al. A propagation model of computer virus with nonlinear vaccination probability[J]. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat,2014,19(1):92-100.
[7] ZHANG D X,DING W W,ZHU M. Existence of positive periodic solutions of competitor-competitor-mutualist Lotka-Voterra systems with infinite delays[J]. Syst Sci Complex,2015,28(2):316-326.
[8] ZHANG D X,DING W W,ZHOU W. Existence of positive periodic solution of delayed Gilpin-Ayala competion systems with discontinuous harvesting policy[J]. Journal of Anhui normal university(natural science edition),2014,37(6):515-519.
[9] FILIPPOV A F. Differential equations with discontinuous righthand sides[M]//Mathematics and its applications(Soviet Series). Russian:Kluwer Academic Publishers Group,1988.
[10] 黄立宏,郭振远,王佳伏. 右端不连续微分方程理论与应用[M]. 北京:科学出版社,2011:28-29.
HUANG L H,GUO Z Y,WANG J F. Theory and application of the right and discontinuous differential equation[M]. Beijing:Science Press,2011:28-29.(in Chinese)
[11] AUBIN J P,CELLINA A. Differential inclusions set-valued maps and viability theory[M]//Grundlehren der Mathmatischen Wissenschaften(Fundamental Principles of Mathematical Science). Berlin:Springer-Verlag,1984.
[12] FORTI M,GRAZZINI M,NISTRI P. Generalized Lyapunov approach for convergence of neural networks with discontinuous or non-Lipschitz activations[J]. Phys D,2006,214(1):88-99.

[责任编辑:严海琳]